

На правах рукописи



Иванов Алексей Викторович

**МЕТОДИКА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ ДЛЯ ИЗДЕЛИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 2.3.1 – «Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика (технические науки)»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук

Тверь – 2026

Работа выполнена на кафедре электронных вычислительных машин федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тверской государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТвГТУ»).

Научный руководитель: Матвеев Юрий Николаевич,
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры «Электронные вычислительные
машины» ФГБОУ ВО «Тверской государственный
технический университет»

Официальные оппоненты: Буркова Ирина Владимировна,
доктор технических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт
проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук», г. Москва

Царькова Евгения Геннадьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Информационные системы и
методы искусственного интеллекта» ФГБОУ ВО
«Тверской государственный университет», г. Тверь

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический
университет», г. Тамбов

Защита состоится «01» декабря 2026 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.410.01 в ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет» по адресу: 170026, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, д. 22.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тверского государственного технического университета и на сайте www.tstu.tver.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.410.01
д.ф.-м.н., проф.

С.М. Дзюба

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Металлопрокат, в том числе строительная арматура (в объеме порядка 8 млн тонн в год), поступает на производство железобетонных изделий и конструкций заготовками стандартной длины (6-18 м) и разрезается на отрезки заданного конструкторской документацией размера, при этом раскрой неизбежно дает отход, достигающий на практике 3-8%. Задача минимизации таких потерь (задача линейного раскроя) решается методами целочисленного линейного программирования. Основы линейного программирования заложены в работах Л.В. Канторовича и Дж. Данцига, методы целочисленного программирования развиты Р. Гомори, который вместе с П. Гилмором применил линейное программирование к задаче раскроя. Эти методы систематизированы в трудах Г. Вагнера, Х. Тахи, Т. Ху, а трудоемкость метода ветвей и границ для задачи о ранце исследована в работах Р.М. Колпакова и М.А. Посыпкина. Задача раскроя хорошо изучена в постановке, когда потребность в отрезках задана заранее. Между тем на серийном производстве эта потребность определяется планом выпуска изделий, который допустимо перевыполнять в установленных пределах, а значит, план выпуска представляет собой не единственную точку, а множество допустимых производственных программ с разным отходом у каждой. Следовательно, отход можно снижать не только выбором плана раскроя, но и выбором производственной программы в пределах допуска. Зависимость отхода от выбора производственной программы до настоящего времени не исследовалась, что и определяет актуальность работы.

Степень разработанности темы. Классический метод решения задачи линейного раскроя, основанный на генерации столбцов, разработан П. Гилмором и Р. Гомори. Классификация задач раскроя и упаковки предложена Х. Дикхоффом и уточнена Г. Вешером и др., точные модели и алгоритмы обобщены в работах М. Делорма, М. Иори и С. Мартелло. Раскрой с ограничениями на превышение спроса рассматривали З. Деграве и Л. Шраге, совместную оптимизацию раскроя и размеров производственных партий исследовали Н. Хамис и др., раскрой при стохастическом спросе изучали Д. Алем и др. Задача раскроя в отдельных отраслях рассмотрена в работах Х. Штадтлера, Ю.И. Валиахметовой, С.В. Телицкого, а ее частные постановки исследованы П. Тркманом, А. Черри, С. Уметани. Раскрою арматуры в строительстве посвящены работы К. Квона, В. Бенджаорана, З. Мусави Надушани, Ч. Чжэна. Постановки с гибкими параметрами заказа, в которых допускается отклонение объема заказа от заявленного, предложены И. Луо и Дж. Беком.

Анализ научных трудов показал, что ни в одной из рассмотренных постановок производственная программа не выступает параметром, по которому исследуется сама функция отходов. Теоретическая основа для такого исследования существует, поскольку Ч. Блэр и Р. Джеросло показали, что функция значения целочисленной программы по параметру правой части принадлежит классу функций Гомори, однако применительно к производственной программе в задаче раскроя этот результат ранее не использовался. Это определило цель и задачи диссертационного исследования.

Цель и задачи. Целью работы является разработка методики, которая позволяет выбрать производственную программу выпуска изделий с наименьшим отходом линейного раскроя в пределах допуска на перевыполнение плана. Для достижения заявленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Провести анализ существующих подходов к минимизации отходов линейного раскроя длинномерных материалов и установить, какую роль в них играет производственная программа;
2. Провести анализ технологического процесса производства изделий из длинномерных материалов, выявить этап линейного раскроя материала и установить, как исходные данные задачи раскроя определяются производственной программой через конструкторскую документацию;
3. Формализовать задачу выбора производственной программы, построить допустимое множество программ в рамках заданного допуска и определить количество отходов как функцию производственной программы;
4. Разработать методику поиска производственной программы с наименьшим отходом и реализовать ее в виде программного средства;
5. Провести экспериментальную проверку методики на задачах, построенных на изделиях типовых серий, оценить достижимый экономический эффект и возможности выбора альтернативной мерной длины проката.

Объект исследования. Процесс планирования производственной программы предприятия, серийно выпускающего типовые изделия из длинномерных материалов.

Предмет исследования. Зависимость отходов линейного раскроя от производственной программы и способ поиска программ с наименьшим отходом в пределах допуска на перевыполнение плана.

Методы исследования. В работе применяются методы системного анализа, математического программирования, линейной алгебры, а также вычислительный эксперимент с использованием современных программных средств оптимизации и визуализации данных.

Научная новизна работы.

1. Научная новизна диссертационного исследования заключается в постановке задачи выбора производственной программы выпуска изделий по критерию минимума отходов линейного раскроя, в которой производственная программа выступает не как заданный извне параметр задачи раскроя, а как управляемый параметр оптимизации в пределах нормативного допуска на перевыполнение плана.

2. Установлено, что функция количества отходов на множестве допустимых производственных программ имеет нелинейный характер и содержит множество локальных минимумов, что отличает ее от функций, оптимизируемых в известных постановках задачи раскроя, и позволяет обосновать неприменимость градиентных и локальных методов поиска.

3. Разработана методика поиска производственной программы с наименьшим отходом раскроя, которая связывает нормы расхода материала на изделия с задачей раскроя и за счет полного перебора допустимого множества программ гарантированно находит глобальный минимум отходов.

На защиту выносятся: 1. Постановка задачи выбора производственной программы выпуска изделий по критерию минимума отходов линейного раскроя на конечном множестве программ в пределах допуска на перевыполнение плана. 2. Исследование характера функции количества отходов на множестве допустимых производственных программ с целью определения наличия у нее множества локальных минимумов. 3. Методика поиска производственной программы с наименьшим отходом, основанная на полном переборе допустимого множества программ. Положения соответствуют п. 4 «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта» и п. 5 «Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта» паспорта специальности 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки).

Теоретическая значимость. Теоретическая значимость заключается в развитии системного анализа производственного планирования и управления в части задач раскроя длинномерных материалов. Задача раскроя рассматривается совместно с планом выпуска изделий, который связан с ней через нормы расхода материала, что расширяет класс существующих постановок за пределы задач с фиксированным спросом. Описание поведения функции количества отходов на допустимом множестве производственных программ опирается на теорию целочисленного программирования и, в общем, не зависит от специфики отрасли.

Поэтому оно может быть применено к производствам, где потребность в материале определяется планом выпуска через нормы расхода.

Практическая ценность. На основе предложенной методики разработано программное обеспечение, которое по номинальному плану выпуска, нормам расхода и мерной длине материала определяет производственную программу с наименьшим отходом в пределах заданного допуска на перевыполнение плана. Кроме того, методика позволяет сравнивать варианты мерной длины закупаемого материала и выявлять случаи, когда снижение отхода невозможно, таким образом, выполняя роль диагностического инструмента. Результаты работы прошли испытания на предприятии АО «ТЖБИ-4», г. Тверь, и использованы в АО «Специальное конструкторское бюро средств управления», г. Тверь, и ООО «Проектно-конструкторское бюро автоматизации производств», г. Тверь, что подтверждено актами. По результатам работы получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2023682978 от 01.11.2023 и № 2026615676 от 27.02.2026.

Апробация работы. Научные положения и практические результаты диссертационной работы в целом и по отдельным разделам докладывались и обсуждались на XI и XIV Международной научно-практической конференции «Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании» (Пенза, 2021 и 2024) и XV Международной научно-практической конференции «Образование в XXI веке: проблемы и перспективы» (Пенза, 2023).

Публикация результатов. По материалам работы опубликовано 8 печатных работ, включая 5 научных статей в изданиях, входящих в перечень ВАК по специальности 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки), и 3 публикации в сборниках конференций, индексируемых в РИНЦ. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 111 источников. Полный объем работы составляет 138 страниц, включая 24 рисунка, 26 таблиц и 4 приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи, объект и предмет исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассмотрены существующие подходы к линейному раскрою длинномерных материалов. Задача линейного раскроя относится к классическим задачам исследования операций и записывается как задача

целочисленного линейного программирования, основной метод ее решения предложили П. Гилмор и Р. Гомори. По опубликованным данным, отход металлопроката при раскрое составляет от 3 до 8%, а наибольший эффект от снижения объема отходов возникает в случаях, когда металл составляет основную часть себестоимости изделий. В рассмотренных работах производственная программа либо задается как внешний параметр задачи раскроя, либо оптимизируется внутри общей модели по критерию стоимости. Однако ни в одной из них не исследуется, как отход зависит от самой программы. Вместе с тем на практике допускается перевыполнение плана выпуска типовых изделий в пределах заданного допуска. На примере производства железобетонных изделий (рисунок 1) показано, что задача раскроя возникает на заготовительном этапе подготовки арматуры. Исходные данные задачи раскроя формируют матрицу норм расхода, которая связывает производственную программу с потребностью в стержнях. На этой основе поставлена научная задача: определить среди допустимых производственных программ такую, при которой отход будет минимальным.

Во **второй главе** изложен математический аппарат, лежащий в основе разработанной в диссертации методики. Изложение ведется от задачи линейного программирования к задаче целочисленного линейного программирования и далее к задаче линейного раскроя. Задача линейного раскроя формулируется как задача целочисленного линейного программирования с особой структурой, в которой столбцами матрицы ограничений служат шаблоны раскроя. Для работы с множеством шаблонов рассмотрены два подхода: полное перечисление, применимое при малом числе типов стержней, и метод генерации столбцов, применимый при большой мощности множества шаблонов и использующий вспомогательную задачу о ранце.

В **третьей главе** разработана методика поиска производственной программы с наименьшим отходом. Методика, в отличие от отдельного метода или алгоритма, объединяет несколько методов и алгоритмов, каждый из которых применяется на своем этапе: перечисление шаблонов раскроя, решение задачи целочисленного линейного программирования и полный перебор допустимых программ. Новизна методики заключается в постановке задачи, где управляемой переменной служит сама производственная программа, а не требуемое количество стержней, как в классической задаче раскроя.

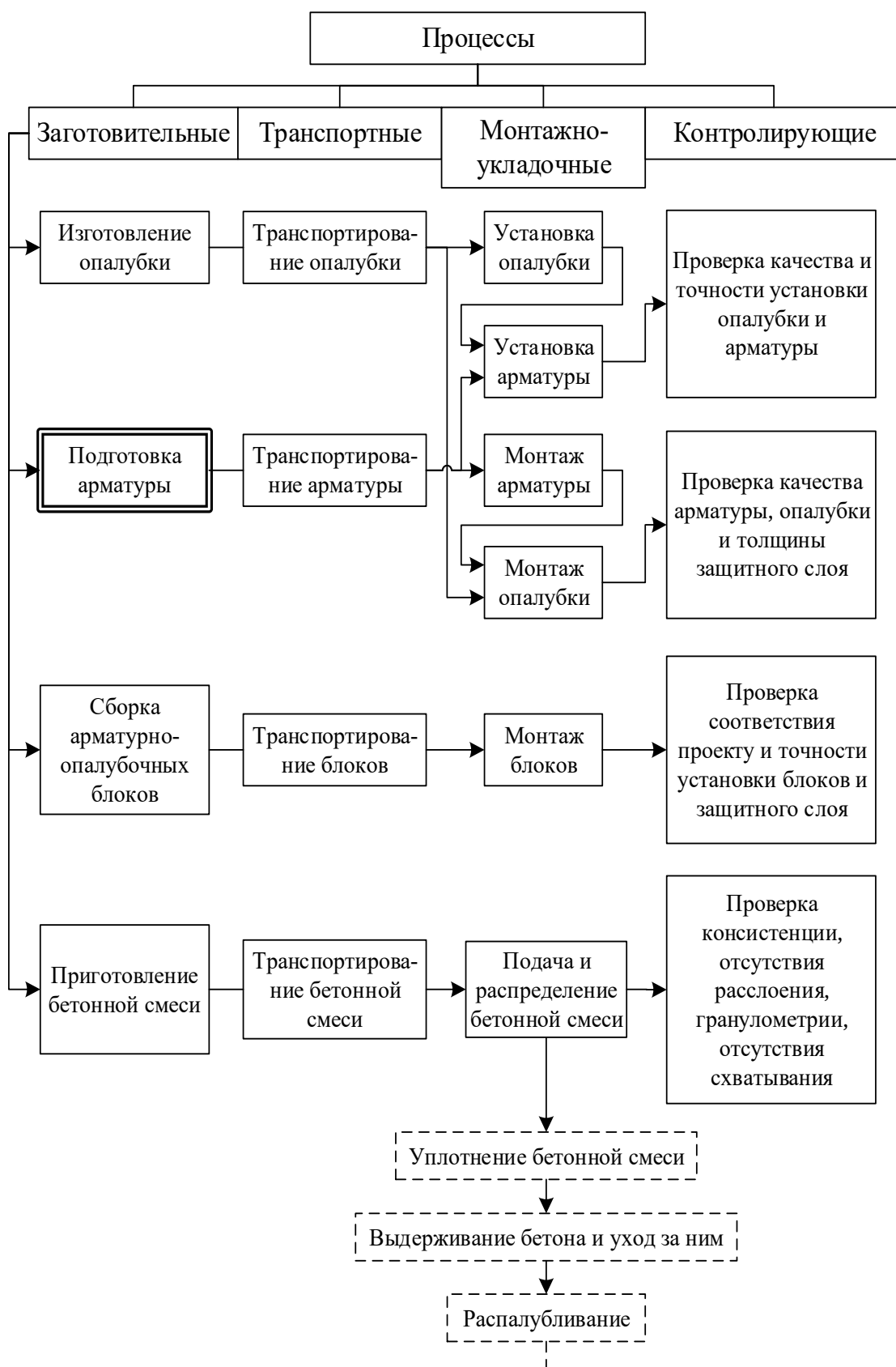


Рисунок 1 – Технологический процесс производства железобетонных изделий

Последовательность этапов методики представлена на рисунке 2. Входными данными служат число типов изделий n и типов стержней m , длина прутка L , длины стержней l_j , матрица норм расхода $C = (c_{ij})$, где c_{ij} – количество стержней типа j в одном изделии типа i , номинальный план $\bar{q}'$, допуск на перевыполнение плана Δ и шаг дискретизации δ . Ключевой особенностью постановки является то, что она охватывает два уровня производства. Задача раскроя определяет, сколько прутков раскроить по каждому шаблону, чтобы получить требуемое количество стержней, а управляемым параметром служит производственная программа, то есть выпуск изделий. Связь между уровнями задает матрица норм расхода C , которая пересчитывает выпуск изделий в потребность в стержнях.

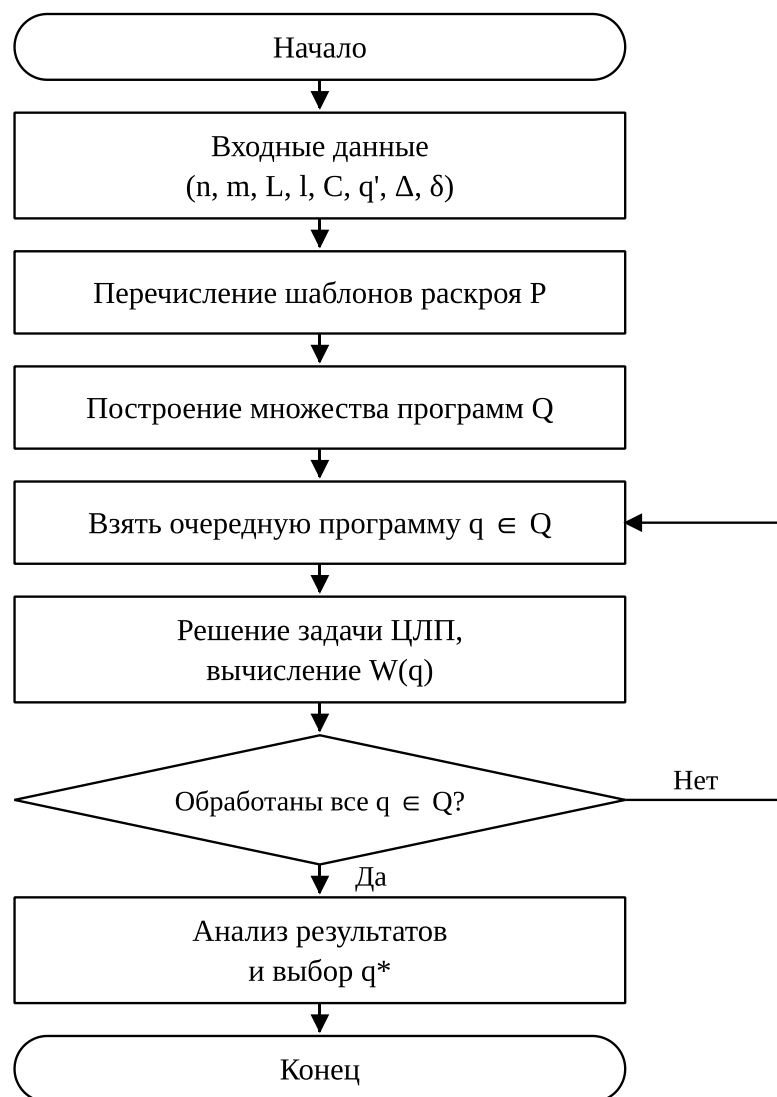


Рисунок 2 – Общая схема методики

На первом этапе методики перечисляются шаблоны раскроя. Шаблоном раскроя называется вектор $\bar{a}_p = (a_{1p}, \dots, a_{mp})$, где a_{jp} – количество стержней типа j , вырезаемых из одного прутка по шаблону p . Шаблон допустим, если стержни помещаются в прутки:

$$\sum_{j=1}^m a_{jp} l_j \leq L, \quad (1)$$

а множество всех допустимых шаблонов обозначается через P .

На втором этапе строится множество допустимых производственных программ. Программа $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ задает выпуск изделий n типов. Поскольку невыполнение плана не допускается, а перевыполнение разрешено в пределах допуска Δ , множество допустимых программ имеет вид:

$$Q = \left\{ \bar{q} \in \mathbb{Z}^n \mid q'_i \leq q_i \leq \left\lfloor q'_i \left(1 + \frac{\Delta}{100} \right) \right\rfloor, \quad i = 1, \dots, n \right\}. \quad (2)$$

Множество Q конечно и строится как декартово произведение диапазонов допустимого выпуска по каждому изделию с шагом δ . Далее для каждой программы $\bar{q} \in Q$ вычисляется отход. Программа определяет *производный спрос* на стержни через матрицу норм расхода:

$$d_j(\bar{q}) = \sum_{i=1}^n c_{ij} q_i, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Производный спрос задает правые части ограничений задачи раскроя, то есть требуемое количество стержней каждого типа. Задача раскроя решается как задача целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{p \in P} x_p \rightarrow \min, \quad \sum_{p \in P} a_{jp} x_p \geq d_j(\bar{q}), \quad j = 1, \dots, m, \quad x_p \in \mathbb{Z}, \quad x_p \geq 0, \quad (4)$$

где x_p – количество прутков, раскраиваемых по шаблону p . Минимальное число прутков, покрывающее спрос $\bar{d}(\bar{q})$, обозначается через $Y(\bar{d}(\bar{q}))$, а отход равен длине израсходованных прутков за вычетом полезной длины стержней:

$$W(\bar{q}) = Y(\bar{d}(\bar{q})) L - \sum_{j=1}^m d_j(\bar{q}) l_j. \quad (5)$$

Вычисления для разных программ независимы, поэтому задача перебора поддается распараллеливанию. Задача выбора производственной программы состоит в нахождении программы с минимальным отходом:

$$\bar{q}^* = \underset{\bar{q} \in Q}{\operatorname{argmin}} W(\bar{q}). \quad (6)$$

Программа влияет на отход только через правую часть задачи (4). Ч. Блэр и Р. Джеросло показали, что функция значения целочисленной программы по правой части принадлежит классу функций Гомори, то есть число прутков Y является неубывающей ступенчатой функцией спроса. Второе слагаемое в (5), то есть полезная длина, имеет линейную зависимость от программы. Поэтому функция $W(\bar{q})$ кусочно-линейна со скачками: пока число прутков не меняется, дополнительные изделия нарезаются из уже закупленного проката и отход убывает, а когда требуется еще один прут, он резко возрастает примерно на длину прутка. В результате функция имеет множество локальных минимумов, и минимальный отход, как правило, при номинальном плане не достигается.

Отсюда следует выбор метода решения задачи (6). Функция $W(\bar{q})$ определена на дискретном множестве и не имеет градиента, поэтому градиентные методы к ней неприменимы, а из-за множества локальных минимумов локальный поиск и покоординатный спуск не гарантируют нахождения глобального минимума. Поскольку множество Q конечно, гарантированное решение дает полный перебор.

На последнем этапе анализируются результаты перебора и выбирается оптимальная программа $\bar{q}^*$. Кроме оптимума, перебор показывает поведение функции количества отходов на всем допустимом множестве, в том числе расположение локальных минимумов и то, как меняется отход при изменении выпуска каждого изделия.

Границы применимости методики определяются мощностью $|Q|$, которая растет экспоненциально с числом типов изделий, поскольку каждый новый тип умножает $|Q|$ на число значений своего диапазона. При $n \leq 3$, $\Delta = 10\%$ и $\delta = 1\%$ множество содержит не более нескольких тысяч программ, и время полного перебора не превышает нескольких секунд.

В четвертой главе методика проверена на двух задачах раскроя арматуры по типовым сериям железобетонных изделий 1.038.1-1 (перемычки) и 1.423.1-3/88 (колонны) при длине прутка 12000 мм и допуске $\Delta = 10\%$. Для расчетов разработан программный комплекс на языке программирования Python, который был зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ.

В задаче с перемычками 3ПБ13-37 и 2ПБ30-4 номинальный план $\bar{q}' = (95, 95)$, множество Q содержит 100 программ. Полный перебор находит программу $\bar{q}^* = (98, 98)$, при которой отход снижается с 8050 до 7420 мм, то есть на 7,8%, при увеличении выпуска на 3% от номинала. Функция количества отходов имеет на множестве Q 13 локальных минимумов, одним из которых является номинальный план (рисунок 3), поэтому локальный спуск из номинала не делает ни одного шага.

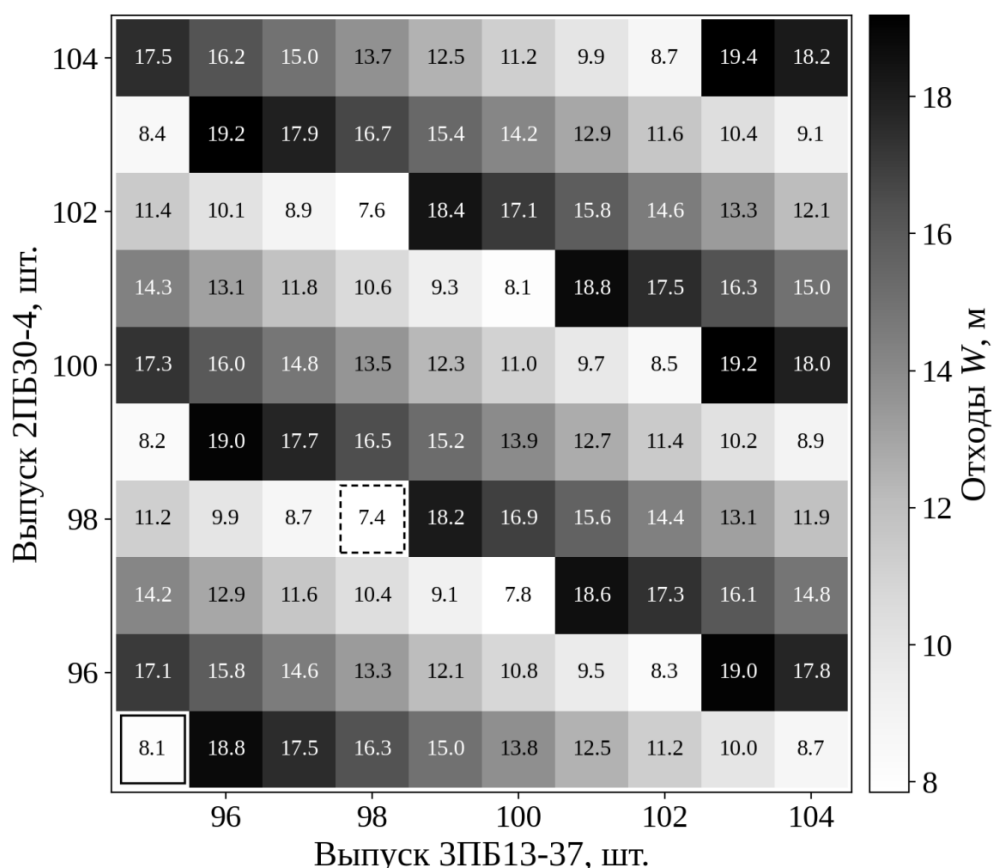


Рисунок 3 – Поверхность отходов W для множества всех производственных программ Q . Клетка со сплошной обводкой – номинальный план $\bar{q}' = (95, 95)$, клетка с пунктирной обводкой – оптимальный план $\bar{q}^* = (98, 98)$

В задаче с колоннами снижения отхода нет ни на одной из 125 программ, поскольку спрос делится нацело на вместимости используемых шаблонов раскроя. Но и в этом случае методика позволяет оценить использование альтернативных мерных длин прутка из допустимых по ГОСТ 34028-2016. Для колонн переход на длину 11700 мм снижает долю отходов $W/(YL)$ с 13,00 до 10,77%, а для перемычек, наоборот, повышает ее до 2,85% (таблица 1). Для колонн это сокращает закупку проката на 2,5% и дает экономию около 950 тыс. руб. на каждую 1000 т арматурного проката по состоянию цен на май 2026 года.

Таблица 1 – Доля отходов при изменении управляемых параметров

Задача	Номинальный план, прутки 12 м	После изменения программы	После изменения длины прутка на 11,7 м
Перемычки	1,97%	1,77%	2,85%
Колонны	13,00%	13,00%	10,77%

Таким образом, экономия не гарантируется для каждой задачи, но методика всегда дает обоснованное заключение о том, достижимо ли снижение отхода и каким параметром, что делает ее инструментом поддержки принятия решений. Методика не опирается на особенности производства железобетонных изделий, поэтому она применима к производству других типовых изделий, для изготовления которых требуется линейный раскрой материала.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы. **Приложения** содержат копии листов типовых серий, полную таблицу шаблонов раскроя для примера третьей главы, свидетельства о регистрации программ для ЭВМ и акты о внедрении результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО РАБОТЕ

Результаты, достигнутые в диссертации, позволяют сделать следующие основные выводы:

1. Проведен анализ существующих подходов к минимизации отходов линейного раскроя, который показал, что зависимость отходов от производственной программы в них не исследуется.

2. Установлена связь конструкторской документации с постановкой задачи через матрицу норм расхода, которая ставит производственной программе в соответствие потребность в стержнях каждой длины.

3. Поставлена задача выбора производственной программы по критерию минимума отходов на конечном множестве программ, заданном допуском на перевыполнение плана.

4. Разработана методика поиска оптимальной производственной программы, основанная на полном переборе допустимого множества программ, необходимость которого следует из установленного наличия у функции количества отходов множества локальных минимумов. Методика реализована в программном комплексе, который зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ.

5. Методика проверена на двух задачах раскроя арматуры: в задаче с перемычками она снижает отход на 7,8% (долю отходов с 1,97 до 1,77%) при увеличении выпуска на 3%, а в задаче с колоннами обоснованно показывает, что снижение невозможно.

6. Показано, что если производственная программа не снижает отход, то методика позволяет сравнить варианты мерной длины проката.

7. Дана оценка экономического эффекта: для колонн переход на прутки 11700 мм сокращает закупку арматурного проката на 2,5% и дает экономию около 950 тыс. руб. на каждую 1000 т по состоянию цен на май 2026 года.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК

1. **Иванов, А. В.** Планирование и оптимизация линейного раскроя металлопроката методами целочисленного программирования / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: «Технические науки». – 2026. – № 3(31). – С. 102–110.
2. **Иванов, А. В.** Оптимизация производственной программы для снижения отходов при линейном раскрое / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2026. – № 6. – С. 146–149.
3. **Иванов, А. В.** Поиск решения задачи целочисленного программирования с помощью итеративного округления координат / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Программные продукты и системы. – 2023. – № 4(36). – С. 539–550. – DOI 10.15827/0236-235X.144.539-550.
4. **Иванов, А. В.** Алгоритм решения задач целочисленного программирования с применением итеративного округления координат / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – № 7. – С. 149–152.
5. **Иванов, А. В.** Использование метода покоординатного спуска для поиска решения задачи целочисленного программирования / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: «Технические науки». – 2023. – № 1(17). – С. 53–62. – DOI 10.46573/2658-5030-2023-1-53-62.

Публикации в изданиях, индексируемых в РИНЦ

6. **Иванов, А. В.** Поиск кратчайшего пути до целочисленной точки внутри области допустимых решений / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Образование в XXI веке: проблемы и перспективы: сборник статей XV Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2023. – С. 56–60.
7. **Иванов, А. В.** Определение направления движения при поиске целочисленного решения методом итеративного округления / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании: сборник статей XIV Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2024. – С. 60–64.
8. **Иванов, А. В.** Современные программные средства решения задач целочисленного линейного программирования / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев // Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании: сборник статей XI Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2021. – С. 59–63.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

9. Программа для планирования оптимального линейного раскроя металлопроката : свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2026615676 от 27 февраля 2026 г. : РФ / **А. В. Иванов**, Ю. Н. Матвеев. – ТвГТУ, 2026.
10. Программа для поиска целочисленного решения двухмерной задачи оптимизации с применением итеративного округления координат : свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2023682978 от 1 ноября 2023 г. : РФ / Ю. Н. Матвеев, **А. В. Иванов**. – ТвГТУ, 2023.