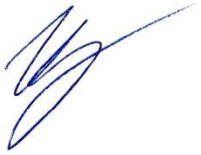
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный технический университет»

На правах рукописи



Иванов Алексей Викторович

МЕТОДИКА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ ДЛЯ ИЗДЕЛИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Научная специальность – 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)»

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Матвеев Юрий Николаевич

Тверь, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

ГЛАВА 1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ К ЛИНЕЙНОМУ РАСКРОЮ ДЛИННОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ 12

1.1. Задача линейного раскроя длинномерных материалов 12

1.2. Обзор существующих подходов к минимизации отходов раскроя 14

1.2.1. Классическая постановка задачи раскроя 15

1.2.2. Раскрой с ограничениями на перепроизводство 16

1.2.3. Совместная оптимизация линейного раскроя и размеров производственных партий 16

1.2.4. Раскрой при стохастическом спросе 17

1.2.5. Прикладные работы по раскрою арматуры в строительстве 18

1.2.6. Раскрой с гибкими параметрами заказа 19

1.2.7. Обоснование актуальности разработки методики 20

1.3. Технологический процесс производства железобетонных изделий 22

1.3.1. Общая схема технологического процесса 22

1.3.2. Процесс подготовки арматуры 24

1.4. Прикладная задача и постановка задачи исследования 30

1.4.1. Прикладная задача оптимизации линейного раскроя арматуры 30

1.4.2. Постановка научной задачи исследования 33

1.5. Выводы по первой главе 39

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ 40

2.1. Постановка задачи линейного программирования 40

2.2. Постановка задачи целочисленного линейного программирования 43

2.2.1. Метод ветвей и границ 44

2.2.2. Метод отсечений 48
2.2.3. Программные средства для решения задачи целочисленного и смешанного целочисленного линейного программирования 50
2.3. Постановка задачи линейного раскроя 51
2.4. Генерация шаблонов раскроя 54
2.5. Задача о ранце 55
2.5.1. Классическая постановка задачи о ранце 55
2.5.2. Неограниченная задача о ранце 56
2.6. Метод генерации столбцов 57
2.6.1. Идея метода генерации столбцов 57
2.6.2. Критерий оптимальности 58
2.6.3. Вспомогательная задача и алгоритм 58
2.7. Выводы по второй главе 60
ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ 61
3.1. Свойства целевой функции и выбор метода решения 62
3.1.1. Нелинейный характер функции количества отходов 62
3.1.2. Обоснование выбора полного перебора допустимых программ 65
3.2. Общая схема методики 66
3.3. Процедура вычисления отходов для заданной программы 69
3.4. Реализация методики 71
3.4.1. Перечисление шаблонов раскроя 71
3.4.2. Построение допустимого множества производственных программ 73
3.4.3. Полный перебор множества программ 74
3.4.4. Анализ результатов и выбор оптимума 75

3.4.5. Пример с прямоугольной матрицей норм расхода 79
3.5. Границы применимости методики 82
3.6. Выводы по третьей главе 83
ГЛАВА 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ 84
4.1. Методология проведения эксперимента 84
4.2. Программная реализация 86
4.2.1. Выбор языка программирования 86
4.2.2. Выбор программного средства для решения задачи целочисленного программирования и визуализации результатов 87
4.3. Применение методики к задачам линейного раскроя 90
4.4. Обсуждение результатов и оценка экономического эффекта 103
4.5. Выводы по четвертой главе 106
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 107
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 109
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Копии листов типовых серий 118
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Полная таблица допустимых шаблонов раскроя 129
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ 131
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Акты о внедрении результатов работы 133

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Металлопрокат является основой современной промышленности и строительства. Только строительной арматуры в России производится около 8 млн тонн в год, из которых 6,4 млн тонн потребляется внутри страны [1]. Прокат поступает на производство заготовками стандартной длины и разрезается на отрезки, размеры которых обычно заданы конструкторской документацией.

Поскольку отрезки короче заготовки и их длины между собой не согласованы, то при раскрое неизбежно остается отход. Согласно нормативу РДС 82-202-96 [2] потери при раскрое достигают 7%, а прикладные исследования по раскрою арматуры дают на практике от 3% до 8% [3]. При таких объемах сокращение отходов даже на доли процента дает заметный эффект.

Задача минимизации таких потерь известна как задача линейного раскроя и решается методами целочисленного линейного программирования [4]. За шесть десятилетий, прошедших с работы П. Гилмора и Р. Гомори [5, 6], для нее построены эффективные методы решения. Все они отвечают на один и тот же вопрос: как раскроить материал при заданной потребности в отрезках нужной длины. Между тем на серийном производстве эта потребность не является внешним условием: она определяется планом выпуска изделий, который на практике бывает допустимо перевыполнять в пределах установленного процента.

Тем самым план выпуска представляет собой не единственную точку, а множество допустимых производственных программ, и отход у каждой свой. Если немного увеличить выпуск, то дополнительные отрезки нередко удается нарезать из уже закупленных заготовок, и тогда отход уменьшается. Но с некоторого момента заготовок перестает хватать, требуется еще одна, и отход скачком возрастает примерно на ее длину. Поэтому лучший по отходу вариант далеко не всегда совпадает с плановым объемом выпуска. Систематическое использование допуска на перевыполнение плана как управляемого параметра

оптимизации до настоящего времени не рассматривалось, что и определяет актуальность работы.

Степень разработанности темы

Основы линейного и целочисленного программирования заложены работами Л.В. Канторовича [7] и Дж. Данцига [8], методы решения целочисленных задач развиты Р. Гомори [9], А. Лэнд и Э. Дойг [10]. Значительный вклад в систематизацию знаний в области исследования операций внесли Г. Вагнер [11], Х. Таха [12], Т. Ху [4], С.А. Ашманов, А.В. Тимохов, М.А. Посыпкин, Р.М. Колпаков, К.А. Багриновский, В.П. Бусыгин, А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский, В.А. Березнев, В.Г. Карманов, А.А. Третьяков, Р.А. Звягина, М.А. Яковлева, С.И. Зуховицкий, И.А. Радчик и другие.

Собственно задача линейного раскроя восходит к работам П. Гилмора и Р. Гомори, предложивших метод генерации столбцов [5, 6]. От классической постановки отходит несколько направлений. Раскрой с ограничениями на перепроизводство рассматривали З. Дегравe и Л. Шраге [13]. Совместная оптимизация раскроя и размеров производственных партий развивается в работах Н. Хамиса с соавторами [14]. Раскрой при стохастическом спросе исследован Д. Алемом с соавторами [15]. Прикладные работы по раскрою арматуры в строительстве обобщены К. Квоном с соавторами [3], влияние колебаний спроса на отход исследовано В. Бенджаораном с соавторами [16]. Постановки с гибкими параметрами заказа, в которых допускается отклонение объема заказа от заявленного, предложены И. Луо и Дж. Беком [17].

Перечисленные направления различаются ролью производственной программы. В одних она задается извне как неизменное условие задачи раскроя, в других оптимизируется совместно с планом раскроя внутри единой модели по стоимостному критерию. Однако ни в одном из них программа не выступает параметром, по которому исследуется сама функция отходов: не изучается ни вид этой зависимости, ни наличие у нее локальных минимумов, ни способ выбрать среди допустимых программ лучшую. Теоретическая основа для такого

исследования существует: К. Блэр и Р. Джеросло показали [18], что функция значения целочисленной программы по параметру правой части принадлежит классу функций Гомори, однако применительно к производственной программе в задаче раскроя этот результат ранее не использовался.

Цель и задачи. Целью работы является разработка методики, которая позволяет выбрать производственную программу выпуска изделий с наименьшим отходом линейного раскроя в пределах допуска на перевыполнение плана. Для достижения заявленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Провести анализ существующих подходов к минимизации отходов линейного раскроя длинномерных материалов и установить, какую роль в них играет производственная программа;
2. Провести анализ технологического процесса производства изделий из длинномерных материалов, выявить этап линейного раскроя материала и установить, как исходные данные задачи раскроя определяются производственной программой через конструкторскую документацию;
3. Формализовать задачу выбора производственной программы, построить допустимое множество программ в рамках заданного допуска и определить количество отходов как функцию производственной программы;
4. Разработать методику поиска производственной программы с наименьшим отходом и реализовать ее в виде программного средства;
5. Провести экспериментальную проверку методики на задачах, построенных на изделиях типовых серий, оценить достижимый экономический эффект и возможности выбора альтернативной мерной длины проката.

Объектом исследования является процесс планирования производственной программы предприятия, серийно выпускающего типовые изделия из длинномерных материалов.

Предметом работы является зависимость отходов линейного раскроя от производственной программы и способ поиска программ с наименьшим отходом в пределах допуска на перевыполнение плана.

Методы исследования. В работе применены методы системного анализа, математического программирования, линейной алгебры, а также вычислительный эксперимент с использованием современных программных средств оптимизации и визуализации данных.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Постановка задачи выбора производственной программы выпуска изделий по критерию минимума отходов линейного раскроя на конечном множестве программ в пределах допуска на перевыполнение плана;

2. Исследование характера функции количества отходов на множестве допустимых производственных программ с целью определения наличия у нее множества локальных минимумов;

3. Методика поиска производственной программы с наименьшим отходом, основанная на полном переборе допустимого множества программ.

Положения соответствуют п. 4 «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта» и п. 5 «Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта» паспорта научной специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)».

Научная новизна:

1. Поставлена задача выбора производственной программы выпуска изделий по критерию минимума отходов линейного раскроя, отличающаяся от известных постановок тем, что производственная программа выступает не заданным извне параметром задачи раскроя, а управляемым параметром оптимизации в пределах нормативного допуска на перевыполнение плана;

2. Установлено, что функция количества отходов на множестве допустимых производственных программ имеет нелинейный характер и содержит множество локальных минимумов, что отличает ее от функций, оптимизируемых в известных постановках задачи раскроя, и позволяет обосновать неприменимость градиентных и локальных методов поиска;

3. Разработана методика поиска производственной программы с наименьшим отходом, отличающаяся от существующих подходов тем, что связывает нормы расхода материала на изделия с задачей раскроя и выполняет полный перебор допустимого множества программ, что позволяет гарантированно находить глобальный минимум отходов.

Теоретическая значимость заключается в развитии системного анализа производственного планирования в части задач раскроя длинномерных материалов. Задача раскроя рассматривается совместно с планом выпуска изделий, который связан с ней через нормы расхода материала, что расширяет класс существующих постановок за пределы задач с фиксированным спросом. Описание поведения функции количества отходов на допустимом множестве производственных программ опирается на теорию целочисленного программирования в общем и не зависит от специфики отрасли. Поэтому оно применимо к производствам, где потребность в материале выводится из плана выпуска.

Практическая ценность. На основе предложенной методики разработано программное обеспечение, которое по номинальному плану выпуска, нормам расхода и мерной длине материала определяет производственную программу с наименьшим отходом в пределах заданного допуска на перевыполнение. Кроме того, методика позволяет сравнивать варианты мерной длины закупаемого проката и выявлять случаи, когда снижение отхода невозможно. Методика способна выполнять роль диагностического инструмента существующей производственной программы и помогать в принятии управленческих решений при производстве типовых изделий из материала, требующего линейного раскроя.

Реализация работы. Практическая ценность методики подтверждена актом испытаний на предприятии АО «ТЖБИ-4», а также актами об использовании результатов работы в АО «Специальное конструкторское бюро средств управления» и в ООО «Проектно-конструкторское бюро автоматизации производств». Результаты работы оформлены в виде свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2023682978 от 01.11.2023 «Программа для поиска целочисленного решения двухмерной задачи оптимизации с применением итеративного округления координат» и № 2026615676 от 27.02.2026 «Программа для планирования оптимального линейного раскроя металлопроката». Сведения о внедрении результатов исследования приведены в приложении Г.

Достоверность научных положений подтверждается корректностью постановки задачи, использованием апробированного математического аппарата целочисленного линейного программирования, воспроизводимостью результатов вычислительного эксперимента, а также тем, что исходные данные задач взяты из действующей типовой проектной документации и государственных стандартов. Дополнительным подтверждением служит экспертное заключение АНО «Научно-исследовательский центр искусственного интеллекта и анализа данных».

Апробация работы. Научные положения и практические результаты диссертационной работы в целом и по отдельным разделам докладывались и обсуждались на XIV Международной научно-практической конференции «Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании» (Пенза, 2024), XV Международной научно-практической конференции «Образование в XXI веке: проблемы и перспективы» (Пенза, 2023), XI Международной научно-практической конференции «Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании» (Пенза, 2021). Процесс исследования регулярно обсуждался на научно-практических семинарах кафедры ЭВМ ТвГТУ.

Публикация результатов. По результатам работы опубликовано 8 печатных работ, включая 5 научных статей в изданиях, входящих в перечень ВАК и 3 публикации в сборниках конференций. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад соискателя. Автором самостоятельно выполнены постановка задачи выбора производственной программы, исследование свойств функции количества отходов, разработка методики и ее программная реализация, подготовка исходных данных по типовым сериям, проведение вычислительного эксперимента и анализ полученных результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 111 источников. Полный объем работы составляет 138 страниц, содержит 24 рисунка, 26 таблиц и 4 приложения.

ГЛАВА 1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ К ЛИНЕЙНОМУ РАСКРОЮ ДЛИННОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной главе представляется задача линейного раскроя длинномерных материалов и формулируется в общем виде, применимом к широкому кругу производств. После этого проводится анализ уже существующих подходов к минимизации отходов раскроя. В конце главы предлагается постановка задачи, которая ранее не предлагалась ни в одном из описанных подходов.

Особое внимание уделяется предприятиям, выпускающим типовые железобетонные изделия (ЖБИ) серийного производства, поскольку далее на примере производства ЖБИ производится апробация разрабатываемой методики в настоящей работе. Перед формализацией методики исследуется технологический процесс производства ЖБИ и выявляется место этапа линейного раскроя арматуры в этом процессе. Также рассматривается структура конструкторской документации производства ЖБИ, которая определяет исходные данные задачи. На основе проведенного анализа формулируется прикладной пример и формальная постановка научной задачи, состоящей в поиске производственной программы с минимальными отходами раскроя в пределах нормативного допуска на перевыполнение плана.

1.1. Задача линейного раскроя длинномерных материалов

Суть линейного раскроя состоит в нарезке исходных заготовок фиксированной длины на более короткие отрезки заданных размеров. Она относится к числу базовых производственных операций и встречается во многих областях промышленности, в том числе в металлообработке, деревообработке, производстве трубопроводов, металлоконструкций и железобетонных изделий. Общей чертой всех перечисленных видов производства является то, что исходный материал поступает в качестве длинномерных заготовок стандартной длины, а требуемые отрезки имеют меньшую длину, чем заготовка. Их длина обычно, определяется проектной или конструкторской документацией. Важно различать заготовки фиксированной длины (доски, металлопрокат, прутки арматуры) и

материал, который поставляется мотками, например, кабель или проволока. В данной работе в качестве линейного раскроя рассматривается только раскрой заготовок фиксированной длины.

При нарезке заготовки неизбежно возникает остаток, который в большинстве случаев не пригоден для дальнейшего использования и является отходом, который выбрасывается или уходит в переработку. Задача линейного раскроя состоит в выборе таких шаблонов раскроя, для которых суммарный отход минимален, а потребность в отрезках каждого типа удовлетворена полностью.

В производстве железобетонных изделий заготовками служат арматурные *прутки* стандартной длины, из которых нарезаются *стержни* разных длин для армирования изделий из железобетона: колонн, перемычек и других конструкций.

В научной литературе задача линейного раскроя обозначается как одномерная задача раскроя *(one-dimensional cutting stock problem, 1D CSP)* [19] и относится к числу классических задач исследования операций [11, 12]. Впервые математическую постановку задачи линейного программирования независимо сформулировали Л.В. Канторович [7] и Дж. Данциг [8]. Задача получила развитие в виде различных методов решения задач целочисленного и линейного программирования и породила ряд направлений исследований, обзор которых приводится далее в этой главе.

Для систематизации разнообразных постановок задач раскроя и упаковки Х. Дикхофф [20] предложил типологию, описывающую каждую задачу четырьмя признаками: **размерностью** (одномерная, двумерная, трехмерная), **типом ассортимента** заготовок (одна длина, несколько стандартных длин, произвольные длины), **типом спроса** на стержни (все стержни обязательны либо часть из них выбирается) и характером **геометрии раскроя**.

Рассматриваемая в настоящей работе задача соответствует одномерному раскрою с однородными заготовками (все прутки имеют одну длину L),

обязательным спросом (все требуемые стержни должны быть нарезаны) и прямолинейным раскроем поперек заготовки.

Задача линейного раскроя тесно связана с рядом других задач комбинаторной оптимизации. При единичном спросе на каждый стержень и минимизации числа заготовок она переходит в задачу об упаковке в контейнеры *(bin packing problem)* [21]. Вспомогательная задача выбора одного шаблона раскроя, максимизирующего суммарную ценность вырезаемых стержней при ограничении на длину заготовки, представляет собой задачу о ранце *(knapsack problem)* [22, 23].

С точки зрения математического программирования задача линейного раскроя формулируется как задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) [4]. Способ нарезки одной заготовки определяется шаблоном раскроя, то есть набором, указывающим на то, сколько стержней каждого типа нужно вырезать из одной заготовки. Количество заготовок, которые нужно разрезать по каждому из шаблонов являются переменными задачи, которые оптимизируются. Ограничения задачи обеспечивают покрытие спроса на стержни каждого типа, а целевая функция минимизирует расход материала. Формальная постановка приводится в конце данной главы.

Принадлежность задачи к классу ЦЛП определяет ее вычислительную сложность и требует специальных методов решения. Дополнительная трудность состоит в том, что число допустимых шаблонов раскроя растет экспоненциально с количеством типов стержней, поэтому перечислить их заранее удается не всегда. Для этого случая применяется метод генерации столбцов [24] (рассматривается далее), который позволяет получить нужные шаблоны по одному с помощью вспомогательной задачи методом динамического программирования [25].

1.2. Обзор существующих подходов к минимизации отходов раскроя

Задача линейного раскроя изучается в области исследования операций более шестидесяти лет, за это время появилось множество постановок и способов

решения этой задачи. Отправной точкой служит классическая постановка с методом генерации столбцов Гилмора и Гомори (раздел 1.2.1), от которой отходят несколько направлений: раскрой с ограничениями на перепроизводство [13], совместная оптимизация раскроя и планирования партий [14], раскрой при стохастическом спросе [15], прикладные работы по раскрою арматуры в строительстве [3] и постановки с гибкими параметрами заказа [17]. Далее каждое из них рассматривается отдельно, после чего в конце раздела приводится их сравнение.

1.2.1. Классическая постановка задачи раскроя

В классической постановке одномерной задачи раскроя задается неограниченный запас заготовок фиксированной длины L и вектор спроса $\bar{d} = (d_1, \dots, d_m)$ на стержни каждого типа j длиной l_j. Требуется найти количества x_p применений каждого допустимого шаблона раскроя p, при которых суммарные отходы минимальны, а спрос удовлетворен, то есть по каждому типу стержней нарезается не меньше требуемого количества.

Практически применимый способ решения этой задачи при большой размерности предложили П. Гилмор и Р. Гомори [5, 6]. Количество допустимых шаблонов растет экспоненциально с ростом числа типов стержней, поэтому их явное перечисление невозможно уже при умеренной размерности. Ключевой особенностью данного метода стал подход, использующий так называемую «генерацию столбцов», когда вместо полной модели работа ведется с небольшим подмножеством шаблонов, а недостающие добавляются по мере необходимости через вспомогательную задачу о ранце, решаемую по двойственным оценкам (теневым ценам) текущего решения.

Данный метод гарантирует оптимальное решение линейной релаксации задачи [26], то есть когда исходная задача целочисленного программирования решается как обычная задача линейного программирования без ограничения на целочисленность переменных. Для нахождения целочисленного решения

существуют модификации метода, которые применяют дополнительные техники, например, встраивание генерации столбцов в схему ветвей и границ [26]. Такое сочетание называется методом ветвей и цен *(branch-and-price)* [27]. Метод остается стандартным инструментом задачи раскроя и лежит в основе большинства последующих работ по данному направлению.

1.2.2. Раскрой с ограничениями на перепроизводство

В практических задачах раскроя число фактически нарезанных стержней почти всегда превышает заявленный спрос. Сложность заключается в том, чтобы покрыть этот спрос точно и без остатка. Целочисленными шаблонами это удается лишь в редких случаях и для получения требуемого числа стержней одного типа приходится применять шаблоны, которые дают избыток стержней других типов. Это явление называется перепроизводством стержней.

Каждый лишний стержень превращается в незапланированный запас, занимающий складские площади и замораживающий оборотные средства, поэтому в постановку задачи вводят верхние ограничения на перепроизводство по каждому типу стержней. Формальный подход к такой постановке задачи предложили З. Дегравe и Л. Шраге [13]. Следует подчеркнуть, что перепроизводство стержней является вынужденным следствием неделимости шаблонов и не совпадает с перевыполнением плана выпуска изделий, то есть управляемым увеличением выпуска готовых конструкций в пределах нормативного допуска, который используется как инструмент оптимизации в настоящей работе.

1.2.3. Совместная оптимизация линейного раскроя и размеров производственных партий

Направление совместной оптимизации возникло из наблюдения, что решение о том, сколько заготовок нарезать за один цикл неразрывно связано с тем, сколько продукции вообще стоит выпускать в плановом периоде. Классическая постановка раскроя принимает потребность в стержнях как

заданную извне, тогда как на практике эта потребность сама является результатом планирования производственных партий (это ещё называется *lot sizing*). Такая задача определяет объем и период выпуска, сбалансированные со спросом и мощностями производства. При раздельном решении размеры партий фиксируются, а затем под уже заданный объем подбираются шаблоны раскроя.

Объединение этих задач мотивировано структурой издержек. Помимо отходов раскроя объединенная модель учитывает затраты на хранение запасов и на переналадку оборудования при смене шаблона. Совместная оптимизация находит компромисс по суммарным затратам, который нельзя достичь при независимом решении каждой задачи по отдельному критерию.

Характерным примером служит модель для многоуровневого производства [14], где производственная программа выступает переменной решения, но оптимизируется совместно с раскроем по единому стоимостному критерию в денежном выражении (отходы плюс хранение плюс переналадка), а не по критерию отходов. Это направление ближе всего к настоящей работе по признаку управляемости производственной программы, однако решает принципиально другую задачу: единая модель находит одно оптимальное решение, тогда как настоящая работа строит и исследует все варианты количества получаемых отходов от раскроя на ограниченном множестве производственных программ.

1.2.4. Раскрой при стохастическом спросе

Во всех рассмотренных выше постановках спрос на стержни предполагался точно известным до начала планирования раскроя. На практике это допущение не всегда выполняется. Заказы на конкретные типоразмеры нередко поступают уже после составления графика раскроя, а прогноз будущей потребности несет неустранимую на момент решения неопределенность. Детерминированная модель, которая оптимизирует раскрой под единственный фиксированный спрос в таких условиях может оказаться неустойчивой.

Для такой постановки задачи разработаны двухэтапные стохастические модели с рекурсом (право скорректировать решение после того, как случайная величина стала известна), когда общие для всех сценариев шаблоны выбираются заранее, а после реализации спроса штрафуются излишек и дефицит [15]. Источником неопределенности здесь выступает входной спрос, а порождающая его производственная программа рассматривается как случайная и не поддающаяся управлению величина.

1.2.5. Прикладные работы по раскрою арматуры в строительстве

Отдельное направление образуют работы, в которых задача раскроя решается непосредственно для арматурного проката в строительстве. От абстрактной постановки они отличаются тем, что длины стержней не задаются произвольно, а зависят от конструкции железобетонного элемента и правил его армирования. Поэтому вместе с планом раскроя предметом оптимизации становятся сами конструктивные решения, определяющие набор требуемых длин.

В. Бенджаоран и др. [16] экспериментально исследовали влияние состава спроса на величину отхода и установили, что чем однороднее спрос по длинам стержней, тем меньше отход при прочих равных условиях. Состав спроса при этом менялся как условие вычислительного эксперимента, а не выбирался целенаправленно из множества допустимых вариантов.

Другие работы снижают отход изменением самих конструктивных решений. З. Надушани и др. оптимизируют места стыковки стержней [28]. В этом случае длинная арматура набирается из нескольких стержней, и смещение места стыка меняет их длины, что позволяет подогнать стержни под длину прутка. Ч. Чжэн и др. [29] определяют разбивку арматуры конструкции на отдельные стержни одновременно с планом раскроя.

К. Квон и др. обобщили это направление в систематическом обзоре [3]. По их данным, несмотря на применение методов оптимизации, отход при раскрое арматуры на практике сохраняется на уровне от 3 до 8%, а наиболее

результативным способом его дальнейшего снижения авторы называют подбор длин стержней за счет смещения мест их стыковки.

Общим для перечисленных работ является то, что производственная программа задается проектом и остается фиксированной. Варьируются только конструктивные решения и план раскроя, но не объем выпуска изделий.

1.2.6. Раскрой с гибкими параметрами заказа

Еще одну близкую к настоящей работе группу образуют постановки задачи, в которых параметры заказа задаются не точно, а интервалами допустимых значений. Ю. Луо и Дж. Бек рассмотрели [17] возникшую на металлургическом предприятии двухэтапную задачу двумерного гильотинного раскроя, в которой допускаются отклонения двух видов. Во-первых, длина отдельного изделия может лежать в заданном интервале. Во-вторых, суммарная площадь каждого заказа может отклоняться от заявленной на оговоренный с заказчиком процент, например на 15% в обе стороны. Обе степени свободы используются для сокращения отхода.

Допуск на объем заказа сближает эту постановку с настоящей работой настолько, что стоит остановиться и явно пояснить их различие. Оно состоит в трех особенностях. Во-первых, задача Луо и Бека двумерная и лист в ней режется только сквозными резами через всю заготовку, тогда как в данной работе производится одномерный линейный раскрой длинномерного проката. Во-вторых, в их задаче допуск задан на суммарную площадь одного заказа, тогда как в настоящей работе допуск задан на целочисленный выпуск составных изделий. При такой постановке каждое изделие порождает спрос сразу на несколько типов стержней, которые могут пересекаться между изделиями. Наконец, интервалы у Луо и Бека служат границами переменных внутри единой модели, которая решается однократно и дает одно решение по критерию стоимости, тогда как зависимость отхода от объема заказа в их модели не исследуется. Именно исследование этой зависимости делает методику применимой в системах

планирования и принятия решений на производстве, поскольку дает информацию для лица, принимающего решение.

1.2.7. Обоснование актуальности разработки методики

Рассмотренные направления разделяются на две группы по роли производственной программы в постановке задачи. В первой группе, включающей классическую постановку задачи (раздел 1.2.1), раскрой с ограничениями на перепроизводство (раздел 1.2.2), раскрой при стохастическом спросе (раздел 1.2.4) и прикладные работы по раскрою арматуры в строительстве (раздел 1.2.5) производственная программа фиксируется как входной параметр. В этих задачах изменение программы не рассматривается как инструмент снижения отходов, а оптимальное решение находится для заданного спроса за счет распределения ресурсов.

Во второй группе, включающей совместную оптимизацию раскроя и планирования партий (раздел 1.2.3) и раскрой с гибкими параметрами заказа (раздел 1.2.6) производственная программа является переменной решения. Однако, её оптимизация производится вместе с планом раскроя в рамках единой математической модели. Основным критерием в них является стоимость, а отходы служат лишь одной из составляющих затрат.

Таблица 1.1 – Сравнение существующих подходов к задаче линейного раскроя

Направление	**Производственная программа**	**Критерий**	**Зависимость отходов от программы**
Классическая постановка [6]	фиксирована	отходы	не исследуется
Перепроизводство [13]	фиксирована	отходы	не исследуется
Планирование партий [14]	переменная	стоимость	не исследуется
Стохастический спрос [15]	фиксирована	ожидаемые отходы	не исследуется
Раскрой арматуры [3, 16]	фиксирована	отходы	не исследуется
Гибкие параметры заказа [17]	переменная	стоимость	не исследуется
Данная работа	**управляемый параметр**	**отходы**	**исследуется**

Два последних столбца таблицы 1.1 отвечают на разные вопросы. Столбец «Критерий» показывает, что именно минимизируется в задаче, а столбец «Зависимость отходов от программы» показывает, исследуется ли то, как меняется отход при изменении объема выпуска. Во всех рассмотренных направлениях отход минимизируется при заданной программе, а вопрос о том, как отход зависит от самой программы, не ставится. Ни в одной существующей постановке задачи раскроя не изучается ни вид этой зависимости, ни наличие у нее минимумов, ни способ найти программу с наименьшим отходом.

В настоящей работе рассматривается в первую очередь производственная программа. Она не задается извне как неизменное условие и не оптимизируется наравне с планом раскроя. Программа остается самостоятельным параметром: она перебирается в пределах нормативного допуска, и для каждого ее значения отход вычисляется заново. Это дает не одну оптимальную точку, а полную картину того, как объем выпуска влияет на отход. Таким образом, разработка методики поиска оптимальной производственной программы по критерию минимума отходов линейного раскроя в пределах нормативного допуска представляет самостоятельную научную задачу, не решенную в рамках известных подходов.

В целом, можно сказать, что данная сфера развивается довольно активно. Новые постановки задачи раскроя продолжают появляться: в 2023 году был рассмотрен раскрой при точном выполнении спроса, когда перепроизводство стержней запрещено [30], а в 2025 году была опубликована работа о раскрое в металлургическом производстве [31]. Задача решается также и в других отраслях: в алюминиевой промышленности [32] и в судостроении, где раскраивается листовой прокат [33]. Развиваются и отдельные постановки: раскрой в последовательные периоды с переносом остатков [34], учет пригодного к повторному использованию делового отхода [35], сокращение числа применяемых шаблонов [36]. Однако, ни в одной из этих работ перевыполнение плана выпуска изделий не служит управляемым параметром: перепроизводство стержней либо запрещается, либо целиком относится к отходам.

1.3. Технологический процесс производства железобетонных изделий

Железобетонные изделия (ЖБИ) представляют собой часто типовые конструктивные элементы, изготавливаемые из бетона с арматурным усилением и применяемые в строительстве. К типовым видам ЖБИ относятся колонны, ригели, перемычки, плиты, фундаментные блоки и панели [37]. Арматурный каркас принимает на себя напряжение и необходим для обеспечения прочности изделия и конструкции, в которой оно используется. Настоящий раздел рассматривает технологический процесс производства ЖБИ и в нем показывается этап, на котором возникает задача линейного раскроя. Этим обуславливается практическая значимость предлагаемой методики. Производство ЖБИ выбрано объектом апробации методики, поскольку для любого изделия требуется линейный раскрой арматуры. Таким образом легко продемонстрировать работу методики и эффект экономии материала.

1.3.1. Общая схема технологического процесса

Производство ЖБИ представляет собой многоэтапный технологический процесс, который принято структурировать по четырем группам операций. Заготовительные операции включают **подготовку арматуры** (правку, резку, сборку каркасов) и **приготовление бетонной смеси**. **Транспортные операции** обеспечивают перемещение материалов и полуфабрикатов между технологическими участками. **Монтажно-укладочные** операции представляют собой основные производственные действия по формованию изделия: установку арматурного каркаса в форму, укладку и уплотнение бетонной смеси. Контролирующие операции обеспечивают соответствие продукции проектным требованиям на входе (контроль качества материалов) и на выходе (контроль геометрии и прочности готового изделия). Общая схема технологического процесса приведена на рисунке 1.1.

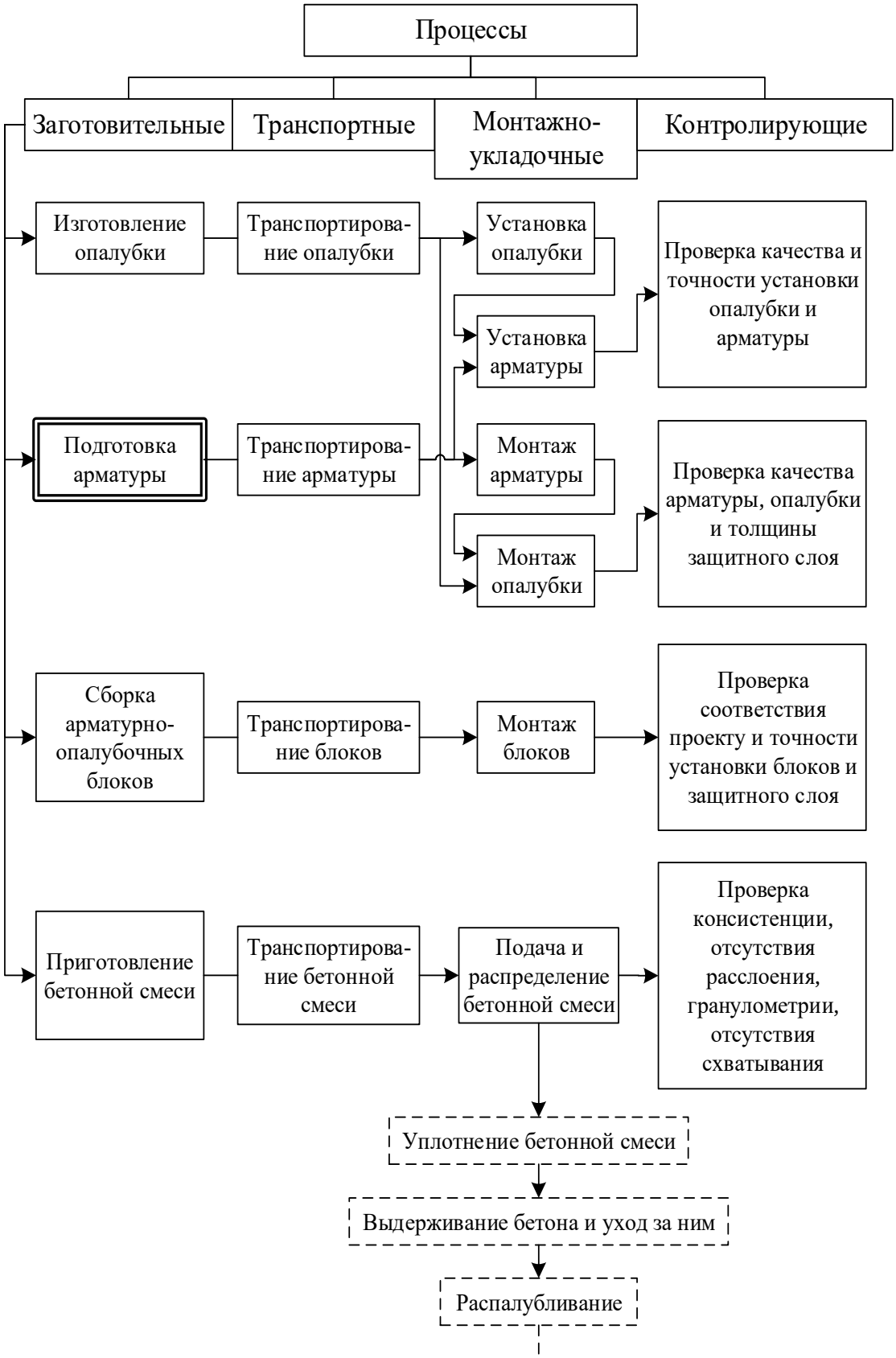


Рисунок 1.1 – Технологический процесс производства железобетонных изделий

Схема показывает, что четыре группы операций образуют не линейную последовательность, а матрицу. Каждая заготовительная операция имеет собственную транспортную, монтажно-укладочную и контролирующую ветвь. Приведенная классификация относится к бетонным работам в целом, однако состав заготовительных операций, то есть приготовление бетонной смеси и подготовка арматуры, одинаков и при возведении конструкций на объекте, и при заводском выпуске сборных изделий. Поэтому для целей настоящей работы схема позволяет показать этап технологического процесса, на котором применяется предлагаемая методика. Этим этапом является подготовка арматуры, выделенная на схеме двойной рамкой. Она рассматривается в следующем разделе, где рисунок 1.2 укрупняет ее до отдельных шагов.

1.3.2. Процесс подготовки арматуры

Исходным материалом для раскроя служит арматурный прокат, поступающий на предприятие в виде прутков стандартной длины L одного диаметра (как правило, от 6 до 18 метров, предпочтительные 6,0; 9,0; 11,7; 11,9; 12,0; 18,0 [38 п. 5.1.5]). Из этих прутков нарезаются стержни нескольких типов, различающихся длиной. Длина и количество стержней в изделии определяются конструкторской документацией и обусловлены расчетом армирования конкретной конструкции. Именно на этапе подготовки арматуры планируется раскрой и выполняется оптимизация полученного плана. Подготовка арматуры начинается с получения технологической документации. Входными данными процесса служат:

- Техническая документация с детальной спецификацией арматурных стержней: их размер, диаметр и марка стали;
- Конструкторские чертежи армирования изделий с указанием расположения стержней и допустимых припусков на сварку и резку;
- Производственная программа, то есть плановое количество изделий каждого типа за плановый период.

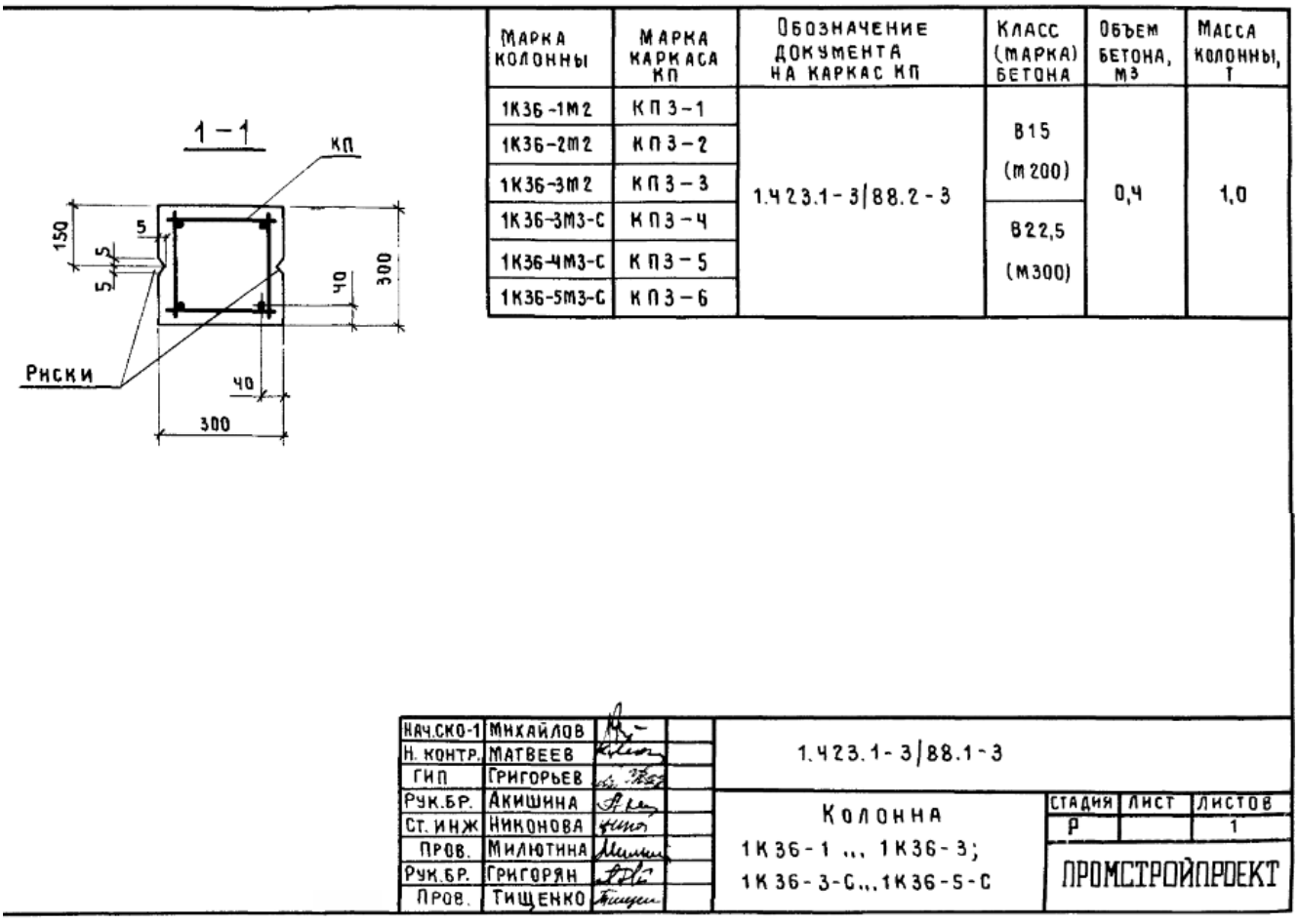
На основании конструкторской документации для каждого типа изделия определяется его арматурный каркас, то есть перечень типов стержней и их количество в одном изделии. Сопоставление арматурных каркасов с производственной программой дает суммарную потребность в стержнях каждого типа, которая и служит исходными данными для задачи раскроя. Схема процесса подготовки арматуры приведена на рисунке 1.2.

Рисунок 1.2 – Схема процесса подготовки арматуры.
На вход поступает технологическая документация,
на выходе образуется план раскроя прутков

Для массовых железобетонных изделий документация задается типовыми сериями. В настоящей работе используются две: серия 1.423.1-3/88 на колонны

железобетонные прямоугольного сечения для одноэтажных производственных зданий [39] и серия 1.038.1-1 на перемычки железобетонные брусковые для зданий с кирпичными стенами [40]. Чертежи типовых серий определяют вид исходных данных задачи раскроя.

Длины стержней в этих сериях не читаются по одному чертежу, вместо этого рабочий чертеж изделия дает общий вид, поперечные сечения и размеры бетонной части, но длин арматурных стержней в нем нет. Вместо них приведена таблица, ставящая каждой марке изделия в соответствие марку его арматурного каркаса (рисунок 1.3). Сама марка изделия кодирует типоразмер и вариант армирования, поэтому изделия одинаковых размеров, но с разным армированием, имеют разные марки и разные каркасы.

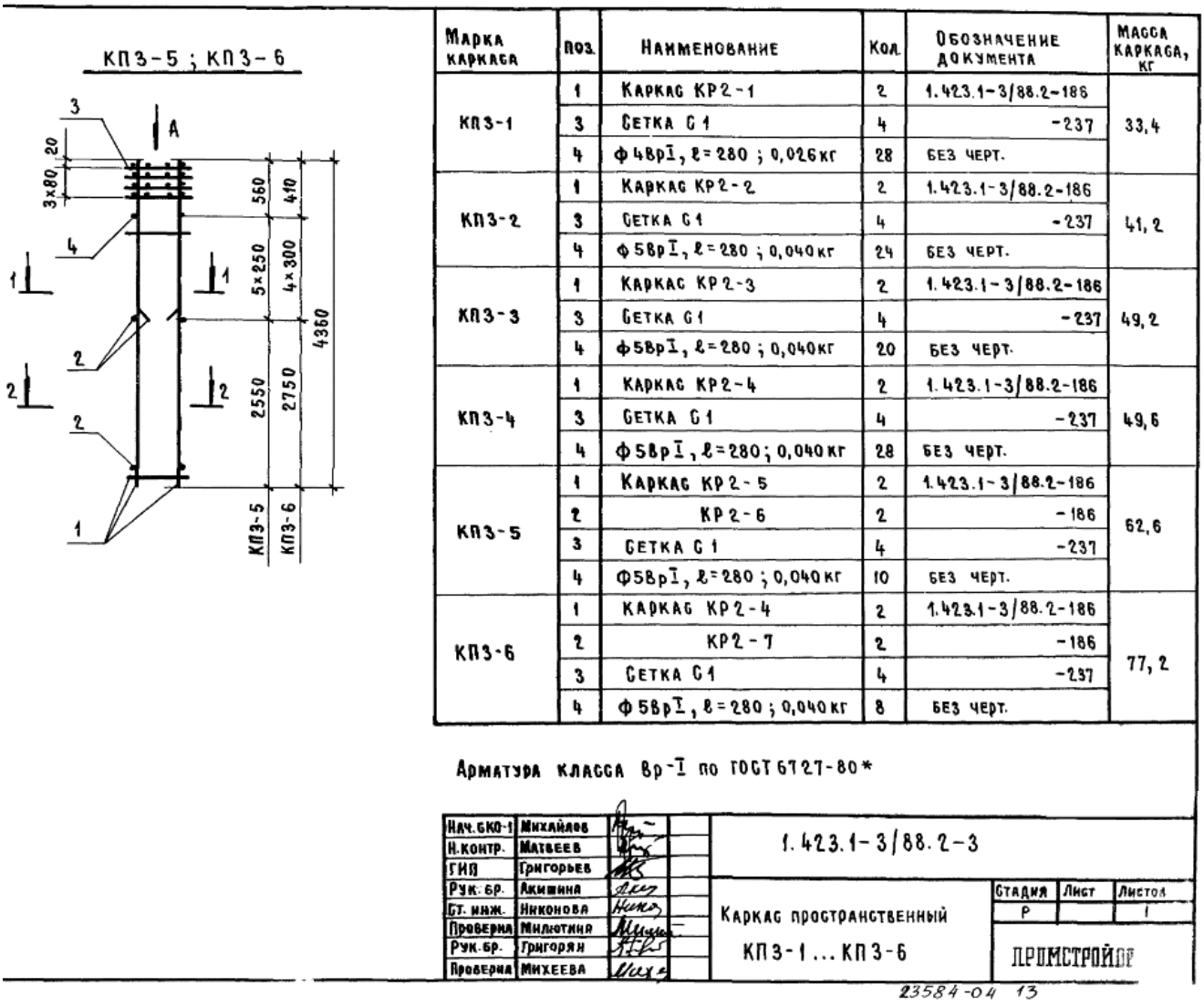


Марка колонны	Марка каркаса КП	Обозначение документа на каркас КП	Класс (марка) бетона	Объем бетона, м3	Масса колонны, т
1К36-1М2	КП3-1	1.423.1-3/88.2-3	В15 (М200)	0,4	1,0
1К36-2М2	КП3-2				
1К36-3М2	КП3-3				
1К36-3М3-С	КП3-4		В22,5 (М300)		
1К36-4М3-С	КП3-5				
1К36-5М3-С	КП3-6				

Нач.СКО-1	Михайлов	1.423.1-3/88.1-3	
Н. контр.	Матвеев		
ГИП	Григорьев		
Рук.бр.	Акишина		
Ст. инж	Никонова	Колонна 1К36-1 ... 1К36-3; 1К36-3-С...1К36-5-С	Стадия: Р; Лист: ; Листов: 1
Пров.	Милютина		
Рук.бр.	Григорян		
Пров.	Тищенко		Промстройпроект

Рисунок 1.3 – Фрагмент листа 1.423.1-3/88.1-3 с рабочим чертежом колонн 1К36: сечения и таблица соответствия марок колонн маркам каркасов

На листе 1.423.1-3/88.1-3 указана ссылка на следующий лист, содержащий пространственный каркас – 1.423.1-3/88.2-3 (рисунок 1.4), на котором приведен сборочный чертеж пространственных каркасов КП3. Арматурный каркас является составным изделием, а не просто набором стержней. Пространственный каркас (КП) собирается сваркой из плоских каркасов (КР), сеток и отдельных стержней. Этот лист перечисляет состав каждого каркаса, однако не содержит длин стержней: для каждого элемента указаны только его марка, количество и обозначение того листа, на котором он начерчен. Так, например, для колонны 1К36-1М2 с КП3-1 чертеж каркаса КР2-1 находится на листе 1.423.1-3/88.2-186 (рисунок 1.5).



Марка каркаса	поз.	Наименование	Кол.	Обозначение документа	Масса каркаса, кг
КП3-1	1	Каркас КР2-1	2	1.423.1-3/88.2-186	33,4
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф4Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,026кг	28	БЕЗ ЧЕРТ.	
КП3-2	1	Каркас КР2-2	2	1.423.1-3/88.2-186	41,2
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф5Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,040кг	24	БЕЗ ЧЕРТ.	
КП3-3	1	Каркас КР2-3	2	1.423.1-3/88.2-186	49,2
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф5Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,040кг	20	БЕЗ ЧЕРТ.	
КП3-4	1	Каркас КР2-4	2	1.423.1-3/88.2-186	49,6
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф5Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,040кг	28	БЕЗ ЧЕРТ.	
КП3-5	1	Каркас КР2-5	2	1.423.1-3/88.2-186	62,6
	2	КР2-6	2	-186	
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф5Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,040кг	10	БЕЗ ЧЕРТ.	
КП3-6	1	Каркас КР2-4	2	1.423.1-3/88.2-186	77,2
	2	КР2-7	2	-186	
	3	Сетка С1	4	-237	
	4	ф5Вр$\overline{I}$, ℓ=280 ; 0,040кг	8	БЕЗ ЧЕРТ.	

Арматура класса Вр-$\overline{I}$ по ГОСТ 6727-80*

Нач.ГКО-1	Михайлов	
Н.контр.	Матвеев	
ГИП	Григорьев	
Рук.бр.	Акишина	
Ст.инж.	Никонова	
Проверил	Милютина	
Рук.бр.	Григорян	
Проверил	Михеева	

1.423.1-3/88.2-3

Каркас пространственный КП3-1...КП3-6

Стадия	Лист	Листов
Р		1

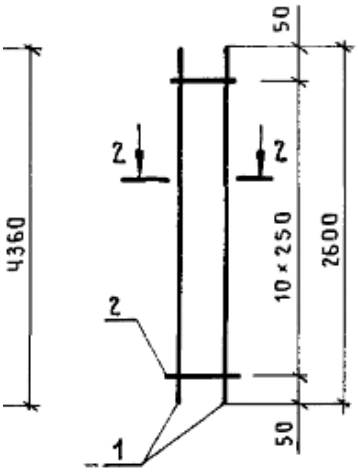
ПРОМСТРОЙПРОЕКТ

23584-04 13

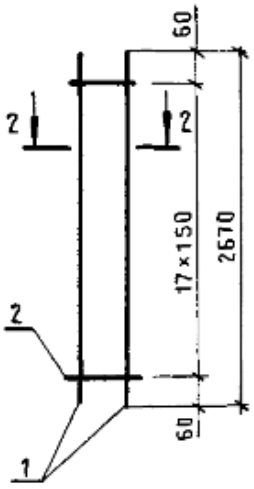
Рисунок 1.4 – Фрагмент листа 1.423.1-3/88.2-3 с чертежом пространственных каркасов КП3-1…КП3-6: вид, сечения и спецификация элементов

5

КР 2 – 6



КР 2 – 10



Марка каркаса	Поз.	Наименование		Кол.	Масса ед., кг	Масса каркаса, кг
КР2-1	1	ф 16 А III	ℓ = 4360	2	6,88	14,2
	2	4 Вр I	ℓ = 280	14	0,03	
КР2-2	1	ф 18 А III	ℓ = 4360	2	8,71	17,9
	2	5 Вр I	ℓ = 280	12	0,04	
КР2-3	1	ф 20 А III	ℓ = 4360	2	10,75	21,9
	2	5 Вр I	ℓ = 280	11	0,04	
КР2-4	1	ф 20 А III	ℓ = 4360	2	10,75	22,1
	2	5 Вр I	ℓ = 280	14	0,04	
КР2-5	1	ф 18 А III	ℓ = 4360	2	8,71	18,1
	2	5 Вр I	ℓ = 280	17	0,04	
КР2-6	1	ф 18 А III	ℓ = 2600	2	5,20	10,8
	2	5 Вр I	ℓ = 280	11	0,04	
КР2-7	1	ф 20 А III	ℓ = 2800	2	6,90	14,2
	2	5 Вр I	ℓ = 280	10	0,04	
КР2-8	1	ф 18 А III	ℓ = 2600	2	5,20	10,7
	2	5 Вр I	ℓ = 280	8	0,04	
КР2-9	1	ф 22 А III	ℓ = 4360	2	13,01	27,7
	2	6 А I	ℓ = 280	27	0,06	
КР2-10	1	ф 22 А III	ℓ = 2670	2	7,97	17,1
	2	6 А I	ℓ = 280	18	0,06	

Арматура класса А-I, А-III по ГОСТ 5781-82*;
класса Вр-I по ГОСТ 6727-80*

Нач.СКО-1	Михайлов	
Н.контр.	Матвеев	
ГИП	Григорьев	
Рук.бр.	Акишина	
Ст.инж.	Никонова	
Пров.	Милютина	
Рук.бр.	Григорян	
Пров.	Тищенко	

1.423.1-3/88.2-186

Каркас плоский
КР 2-1 ... КР 2-10

Стадия	Лист	Листов
Р		1

ПРОМСТРОЙПРОЕКТ

Рисунок 1.5 – Фрагмент листа 1.423.1-3/88.2-186 с чертежом плоских каркасов КР2-1…КР2-10 и таблицей стержней с указанием диаметра, класса и длин

Тем самым длины стержней не читаются из документации напрямую, а собираются по цепочке «производственная программа – марки изделий – марки каркасов – длины стержней», проходящей через несколько листов серии. Например, каркас КР2-1 на рисунке 1.5 состоит из двух стержней диаметром 16 мм класса А-III длиной 4360 мм и четырнадцати стержней диаметром 4 мм класса Вр-I длиной 280 мм. Раскраиваются именно стержни, набор которых для каждого изделия задан документацией. Потребность в стержнях каждой длины можно выразить в виде матрицы, которая далее в работе называется матрицей норм расхода C. Она показывает, сколько стержней каждой длины расходуется на одно изделие каждого типа.

Задача раскроя ставится отдельно для каждого сочетания диаметра и класса арматуры, поскольку стержень одного диаметра нельзя нарезать из прутка другого. В приведенном примере рабочие стержни диаметром 16 мм класса А-III и поперечные стержни диаметром 4 мм класса Вр-I образуют две независимые задачи, причем поперечные стержни изготавливаются из холоднотянутой проволоки, которая поставляется мотками [41], правится и режется в размер непрерывно, поэтому задача раскроя в рассматриваемой постановке для них не возникает.

Возвращаясь к схеме технологического процесса (рисунок 1.1), по производному спросу строится набор допустимых шаблонов линейного раскроя прутка и определяется, сколько прутков раскраивается по каждому шаблону, чтобы потребность в стержнях была полностью покрыта, а суммарный отход минимален. Число прутков по каждому шаблону может быть только целым, поэтому задача формулируется как задача целочисленного линейного программирования [4]. Методы ее решения рассматриваются далее в главе 2.

1.4. Прикладная задача и постановка задачи исследования

Задача оптимизации линейного раскроя арматуры возникает на предприятиях, которые серийно производят типовые железобетонные изделия. Производственная программа задает количество изделий каждой марки, а по документации, разобранной в разделе 1.3, появляется потребность в стержнях определенных длин. Эти стержни нарезаются из прутков арматуры мерной длины и при нарезке неизбежно образуется отход.

Суммарный отход зависит не только от выбора шаблонов раскроя, но и от самой производственной программы. Изменение количества выпускаемых изделий меняет потребность в стержнях, а вместе с ней минимально возможные отходы. На основании этого изложение в данном разделе строится в два шага. Сначала на конкретном примере рассматривается задача раскроя при заданном спросе, затем производственная программа вводится как управляемый параметр и ставится научная задача исследования.

В то же время экономия зависит не от метода расчета, а от того, какую долю в цене изделия занимает материал. Например, у железобетонной перемычки арматура составляет 16,8% себестоимости, а отход раскроя – 1,97% этой арматуры. Даже если убрать отход полностью, это дало бы не более 0,33% себестоимости изделия, потому что основную часть цены составляет бетон. Однако методика не привязана к железобетону. Там, где материал составляет основную часть себестоимости, например, в металлоконструкциях вроде ферм, типовых изделий из бруса или изделий из профильной трубы точно такая же экономия материала дает намного больший эффект.

1.4.1. Прикладная задача оптимизации линейного раскроя арматуры

Рассмотрим задачу раскроя при заданном спросе на примере из работы [42]. В исходных данных заданы длина прутка, набор требуемых длин стержней и их количества, которые получаются из конструкторской документации по цепочке, разобранной в разделе 1.3.

Арматурные прутки имеют стандартную длину $L = 750$ см. Из них требуется получить стержни трех типов длиной $l_1 = 250$ см, $l_2 = 200$ см и $l_3 = 150$ см в количестве $d_1 = 200$, $d_2 = 250$ и $d_3 = 50$ штук соответственно. Задача состоит в выборе шаблонов раскроя прутков, при котором суммарные отходы минимальны, а спрос на стержни каждого типа удовлетворен полностью.

Раскрой каждого прутка задаётся шаблоном, то есть набором (a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}), где a_{jp} обозначает количество стержней типа j, получаемых из одного прутка по шаблону p. Шаблон считается допустимым, если суммарная длина вырезаемых стержней не превышает длину прутка. На первом шаге перечисляются все допустимые шаблоны, то есть все целочисленные комбинации (a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}), удовлетворяющие условию:

$$250\,a_{1p} + 200\,a_{2p} + 150\,a_{3p} \leq 750, \quad a_{jp} \in \mathbb{Z}, \quad a_{jp} \geq 0$$

Для данного примера таким образом получается 10 допустимых шаблонов, которые приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Допустимые шаблоны раскроя прутка длиной 750 см

Шаблон	**Длина сегмента**			**Отходы**
	$l_1 = 250$ см	$l_2 = 200$ см	$l_3 = 150$ см	
p_1	3	0	0	0
p_2	2	1	0	50
p_3	2	0	1	100
p_4	1	2	0	100
p_5	1	1	2	0
p_6	1	0	3	50
p_7	0	3	1	0
p_8	0	2	2	50
p_9	0	1	3	100
p_{10}	0	0	5	0
Требуемое кол-во фрагментов	200	250	50	

В таблице приведены только полные шаблоны, в которые нельзя добавить ни одного стержня. Остальные комбинации получаются из них удалением стержней, дают больший отход и в оптимальное решение не входят. Как видно из таблицы, шаблоны p_1, p_5, p_7 и p_{10} дают нулевые отходы; однако это не означает, что только они войдут в оптимальное решение. Задача состоит в подборе такого сочетания шаблонов, которое в совокупности покрывает спрос по всем трём типам стержней с минимальными суммарными отходами. Например, шаблон p_1 (три стержня по 250 см, отход 0) полностью закрывает спрос на стержни типа l_1, однако для стержней типов l_2 и l_3 потребуются другие шаблоны. Шаблон p_{10} (пять стержней по 150 см, отход 0) эффективен для l_3, но при спросе $d_3 = 50$ штук достаточно всего 10 прутков по этому шаблону. Примеры допустимых шаблонов раскроя показаны на рисунке 1.6.

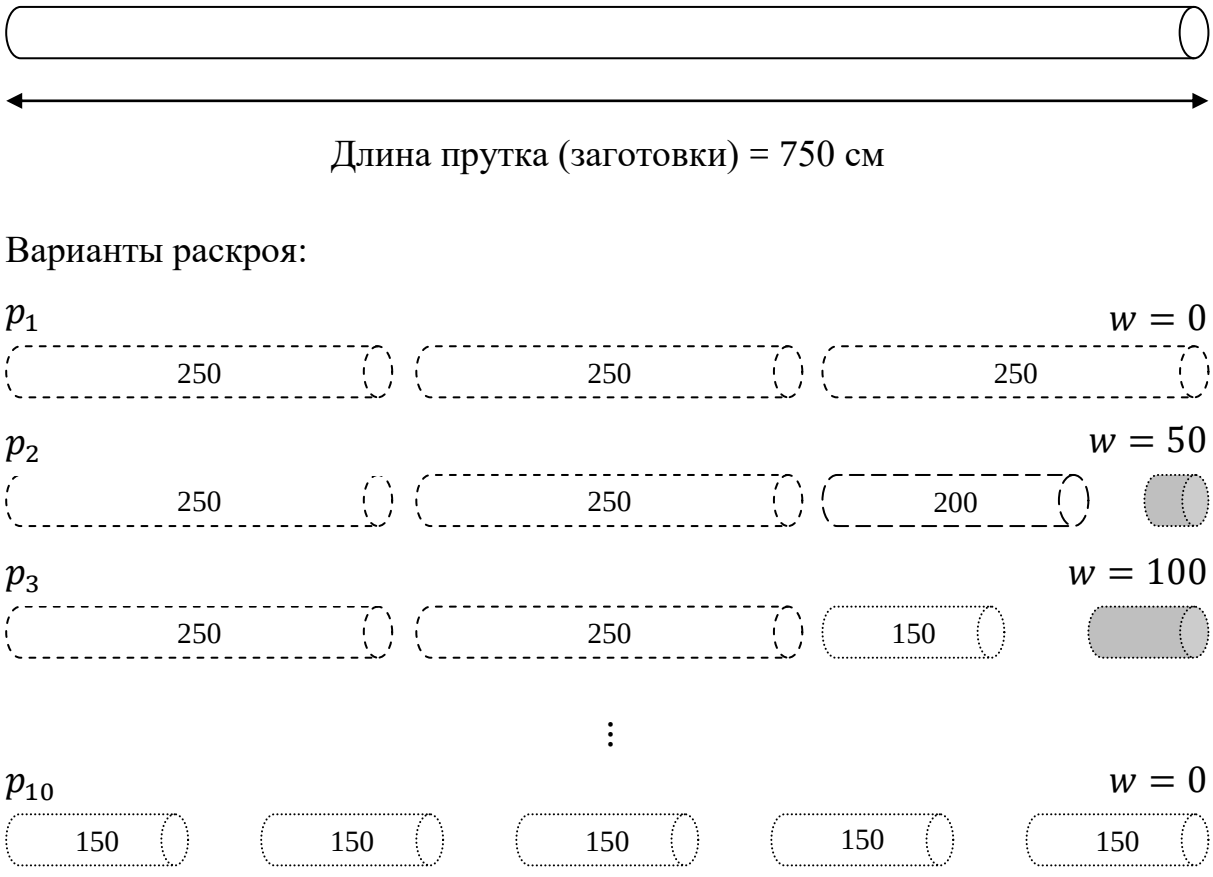


Рисунок 1.6 – Примеры допустимых шаблонов раскроя прутка длиной 750 см

Через x_p обозначим количество прутков, раскраиваемых по шаблону p. Тогда задача оптимального раскроя для данного примера записывается как:

$$\begin{cases} \sum_p x_p \to min \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 200 \quad (l_1 = 250 \text{ см}) \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 \geq 250 \quad (l_2 = 200 \text{ см}) \\ x_3 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 5x_{10} \geq 50 \quad (l_3 = 150 \text{ см}) \\ x_p \in \mathbb{Z}, \quad x_p \geq 0, \quad p = 1, \dots, 10 \end{cases}$$

Целевая функция минимизирует число израсходованных прутков, что при фиксированном спросе равносильно минимизации суммарных отходов. Каждое из трех ограничений обеспечивает покрытие спроса на стержни соответствующего типа. Целочисленность x_p отражает физическое ограничение, когда каждый пруток раскраивается по выбранному шаблону целое число раз, поскольку применение «дробной доли» шаблона физически невозможно.

В данном примере спрос d_j задан как внешний параметр. В настоящей работе он определяется производственной программой и является управляемым. Раздел 1.4.2 содержит формальную постановку задачи выбора программы с минимальными отходами.

1.4.2. Постановка научной задачи исследования

Анализ существующих подходов к минимизации отходов линейного раскроя длинномерных материалов показал, что производственная программа либо задается как внешний параметр задачи раскроя, либо оптимизируется внутри общей модели по критерию стоимости, но ни в одном случае не служит параметром, по которому исследуется сама функция отходов. В настоящей работе производственная программа рассматривается как управляемый параметр и перевыполнение плана выпуска изделий в пределах нормативного допуска используется как инструмент снижения отходов.

Ниже приводится формальная постановка задачи выбора производственной программы с минимальными отходами раскроя. Производственная программа

$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ задаёт количество изделий каждого типа, подлежащих выпуску, а номинальный план $\bar{q}'$ определяет нижнюю границу для выпуска каждого изделия. Нижняя граница совпадает с номинальным планом, поскольку невыполнение плана на практике не допускается, но иногда допускается перевыполнение плана производства. Множество допустимых производственных программ при допуске на перевыполнение исходного плана Δ определяется как:

$$Q = \left\{ \bar{q} \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; q_i' \le q_i \le \left\lfloor q_i' \left(1 + \frac{\Delta}{100}\right) \right\rfloor,\ i = 1, \dots, n \right\},$$

где n – количество видов изделий, q' - номинальная (исходная) производственная программа, Δ – допуск на перевыполнение исходного плана в процентах от номинального плана. Перевыполнение плана сверх номинального объема рассматривается как экономически оправданное при допущении, что изделия, выпущенные сверх номинала, реализуются по цене не ниже переменных затрат на их изготовление.

Множество Q является конечным и дискретным, поскольку каждая компонента q_i принимает целочисленные значения на ограниченном отрезке $[q_i',\ q_i'(1 + \Delta/100)]$ и обозначает необходимое количество изделий типа i. Каждая программа $\bar{q} \in Q$ однозначно определяет суммарный спрос на стержни m типов через матрицу норм расхода $C = (c_{ij})$:

$$d_j(\bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\ q_i, \quad j = 1, \dots, m,$$

где m – количество типов стержней, а c_{ij} – количество стержней типа j, необходимых для производства одного изделия типа i. Вектор $\bar{d} = \left(d_1(\bar{q}), \dots, d_m(\bar{q})\right)$ будем называть производным спросом, поскольку он не задаётся напрямую, а вычисляется из производственной программы $\bar{q}$ через норму расхода c_{ij}. Введение производного спроса необходимо, поскольку задача раскроя формулируется в терминах количества потребляемых стержней, а управляемым

параметром является производственная программа, которая задает количество производимых изделий. Вектор $\bar{d}$ позволяет связать эти два понятия.

По вектору производного спроса ставится задача целочисленного программирования для оптимального раскроя прутков длиной L, из которых нарезаются стержни типов $j = 1, \dots, m$ длиной l_j.

Постановка относится к одному сочетанию диаметра и класса арматуры (раздел 1.3.2). Прутки при этом считаются одной мерной длины, случай нескольких длин в одном плане раскроя не рассматривается. Множество всех допустимых шаблонов обозначим как P.

Шаблоном раскроя называется вектор $\bar{a}_p = (a_{1p}, \dots, a_{mp})$, где p – порядковый номер шаблона из набора всех шаблонов P, а a_{jp} – количество стержней типа j, вырезаемых из одного прутка согласно шаблону p. Шаблон допустим, если выполняется условие $\sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j \le L$, а отход шаблона равен $w_p = L - \sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j$. Через x_p обозначим количество прутков, раскраиваемых по шаблону p. Тогда задача оптимального раскроя для фиксированной программы $\bar{q}$ формулируется как задача целочисленного линейного программирования [26]:

$$\begin{cases} \sum\limits_{p \in P}^{p} x_p \to min \\ \sum\limits_{p \in P}^{p} a_{jp} x_p \ge d_j(\bar{q}), \quad j = 1, \dots, m \\ x_p \in \mathbb{Z}, \;\; x_p \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

Целевая функция задачи (1) минимизирует число израсходованных прутков $\sum_{p \in P} x_p$, а ее оптимальное значение при программе $\bar{q}$ обозначается через Y. Ограничения задачи (1) гарантируют покрытие производного спроса по каждому типу стержней. Условие целочисленности требует, чтобы каждый пруток раскраивался по конкретному шаблону целое число раз. Задача (1) является классической задачей раскроя [5] и решается на множестве допустимых шаблонов P. При небольшом числе типов стержней множество P перечисляется полностью,

при большой его мощности применяется метод генерации столбцов. Оба способа рассматриваются далее в главе 2.

Метод генерации столбцов включает два этапа, которые повторяются, пока не будет найден оптимальный набор шаблонов. На первом этапе решается линейная релаксация задачи (1) на текущем (неполном) наборе шаблонов, в которой переменные x_p считаются вещественными, а не целыми. Симплекс-метод дает значения x_p и двойственные оценки y_j по одной на каждое ограничение по стержню типа j. Двойственная оценка y_j показывает то, насколько уменьшится число израсходованных прутков при снижении спроса на стержни типа j на единицу. Таким образом выражается ценность одного такого стержня в текущем решении. На втором этапе по этим оценкам решается вспомогательная задача, представляющая собой неограниченную задачу о ранце. Среди всех целочисленных комбинаций $(a_{1p}, \dots, a_{mp})$, удовлетворяющих условию допустимости шаблона $\sum_j a_{jp}\, l_j \le L$, находится такая, для которой суммарная ценность стержней $\sum_j y_j\, a_{jp}$ максимальная:

$$\sum_{j=1}^{m} y_j\, a_{jp} \to max \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j \le L, \quad a_{jp} \in \mathbb{Z}, \quad a_{jp} \ge 0$$

Двойственные оценки, полученные на основе ограничений основной задачи, становятся коэффициентами целевой функции задачи о ранце. Каждый стержень типа j оценивается в y_j единиц, а шаблон в целом как сумма $\sum_{j=1}^{m} y_j\, a_{jp}$. Для каждого шаблона p определяется приведенная стоимость, то есть разность между собственной стоимостью шаблона и суммарной ценностью вырезаемых им стержней:

$$r_p = 1 - \sum_{j=1}^{m} y_j\, a_{jp}$$

Собственная стоимость шаблона равна единице, поскольку целевая функция задачи (1) считает израсходованные прутки, а применение шаблона расходует ровно один пруток. Из теоремы о дополняющей нежёсткости [43] следует, что в оптимальном решении релаксации для каждого используемого шаблона ($x_p > 0$) выполняется $r_p = 0$, а для всех остальных $r_p \geq 0$. Шаблон выгодно добавить в набор, если $r_p < 0$, то есть если суммарная ценность его стержней превышает единицу. Условием остановки служит отсутствие шаблонов с $r_p < 0$. Если такой шаблон не найден, набор оптимален и цикл завершается. В противном случае шаблон добавляется в набор и итерация повторяется с первого этапа. На финальном наборе шаблонов решается целочисленная задача (1). Суммарный отход при программе $\bar{q}$ определяется через число прутков в оптимальном решении задачи (1):

$$W(\bar{q}) = YL - \sum_{j=1}^{m} d_j\,(\bar{q})\,l_j,$$

то есть как суммарная длина израсходованных прутков за вычетом полезной длины стержней, идущих в изделия. Стержни, нарезанные сверх производного спроса, входят в отход. Поскольку производный спрос $d_j(\bar{q})$ при фиксированной программе задан, минимизация числа прутков равносильна минимизации отхода $W(\bar{q})$. Тем самым определена функция $W\colon Q \to \mathbb{R}$, которая ставит каждой допустимой программе в соответствие минимально достижимый объем отходов при оптимальном раскрое. Схему вычисления $W(\bar{q})$ можно обозначить следующим образом:

$$\bar{q} \overset{d_j=\sum_i c_{ij}q_i}{\rightarrow} \bar{d} \overset{\text{задача (1)}}{\rightarrow} W(\bar{q})$$

Научная задача настоящей работы состоит в нахождении производственной программы из допустимого множества Q, при которой суммарные отходы минимальны:

$$\bar{q}^* = \underset{\bar{q}\in Q}{argmin} W(\bar{q}) \qquad (2)$$

Программа $\bar{q}$ влияет на отходы только через производный спрос $d_j(\bar{q})$ в правой части ограничений задачи (1). По теории функции значения целочисленной программы [18, 44] отсюда следует, что $W(\bar{q})$ кусочно-линейна со скачками. Внутри областей, где количество прутков является постоянным, отход линейно убывает, а на границах скачкообразно возрастает.

Эти свойства определяют выбор метода. Градиентные методы [45] к задаче (2) неприменимы, поскольку $W(\bar{q})$ определена на дискретном множестве и не имеет градиента, а наличие локальных минимумов не позволяет применить и локальный поиск. Поскольку множество Q конечно, гарантированное решение дает полный перебор: вычисляется $W(\bar{q})$ для каждой программы $\bar{q} \in Q$ как решение задачи (1) и выбирается наименьшее значение. Этот подход составляет основу методики, предлагаемой в данной работе. Постановка задачи выбора производственной программы и основные результаты описываются в работе [46]. Обозначения, используемые далее в работе, сведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Обозначения, используемые в работе

Обозначение	**Смысл**
L	длина исходной заготовки (например, прутка арматуры)
n	количество типов изделий
m	количество типов стержней
$i = 1, \dots, n$	порядковый номер типа изделия
$j = 1, \dots, m$	порядковый номер типа стержня
l_j	длина стержня типа j
c_{ij}	количество стержней типа j в одном изделии типа i
Q	допустимое множество производственных программ
$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$	производственная программа
$\bar{q}' = (q'_1, \dots, q'_n)$	номинальный план выпуска
$\bar{q}^*$	оптимальная производственная программа
$d_j(\bar{q})$	производный спрос на стержни типа j
p	порядковый номер шаблона раскроя
a_{jp}	количество стержней типа j в шаблоне p
w_p	отход шаблона p: $w_p = L - \sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j$

Таблица 1.3 – Обозначения, используемые в работе (продолжение)

x_p	количество прутков, раскраиваемых по шаблону p
$W(\bar{q})$	суммарные отходы при оптимальном раскрое для программы $\bar{q}$
Δ	допуск на перевыполнение плана в процентах
P	множество допустимых шаблонов раскроя
Y	наименьшее число прутков, покрывающее производный спрос

1.5. Выводы по первой главе

Задача линейного раскроя длинномерных материалов относится к числу классических задач исследования операций и записывается как задача целочисленного линейного программирования. Основной метод её решения предложили П. Гилмор и Р. Гомори. Он решает линейную релаксацию точно и без полного перечисления шаблонов. Отход при раскрое составляет от 3% до 8%, а наибольший эффект его снижение дает там, где металл составляет основную часть себестоимости. Производственная программа в рассмотренных работах либо задается как внешний параметр задачи раскроя, либо оптимизируется внутри общей модели по критерию стоимости. Ни в одной из них не исследуется то, как отход $W(\bar{q})$ зависит от самой программы. Вместе с тем на практике допускается перевыполнение плана производства типовых изделий в пределах допуска Δ.

Задача раскроя возникает на заготовительном этапе подготовки арматуры, а исходные данные для нее собираются по цепочке «производственная программа – марки изделий – марки каркасов – длины стержней» и сводятся к матрице норм расхода. Она связывает производственную программу с производным спросом.

На этой основе поставлена научная задача (2): найти на множестве производственных программ Q такую, у которой был бы наименьший отход. Функция количества отходов $W(\bar{q})$ является кусочно-линейной со скачками и содержит локальные минимумы, поэтому наименьший отход, как правило, при номинальном плане не достигается. Градиентные и локальные методы к такой функции неприменимы, а гарантированный результат дает полный перебор, поскольку множество Q конечно.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ

В данной главе описывается математический аппарат, который лежит в основе методики поиска оптимальной производственной программы. Изложение ведется от общего к частному: сначала вводится задача линейного программирования и ее целочисленное расширение, затем на их основе формулируется задача линейного раскроя, после чего рассматриваются генерация шаблонов раскроя, вспомогательная задача о ранце и метод генерации столбцов, который использует задачу о ранце для поиска оптимальной конфигурации шаблонов раскроя. Приводимые здесь подходы основаны на источниках научной литературы, а их последовательное изложение необходимо для обоснования методики, которая представляется далее в главе 3.

2.1. Постановка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЛП) состоит в оптимизации линейной целевой функции при линейных ограничениях в форме равенств и неравенств. Задача ЛП является одной из основных моделей в математическом программировании, к которой сводятся многие задачи планирования и распределения ресурсов [8]. В канонической форме задача ЛП записывается как:

$$\begin{cases} \min\limits_{\bar{x}} \ \bar{c}^{\top}\bar{x} \\ A\bar{x} \geq \bar{b} \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}, \tag{3}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ – это вектор переменных, которые необходимо найти, $\bar{c} \in \mathbb{R}^k$ – вектор коэффициентов целевой функции, A – матрица ограничений размерностью $m \times k$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ – вектор свободных членов, которые обозначают доступный запас ресурсов. Множество точек $\bar{x}$, удовлетворяющих ограничениям задачи (3), образует выпуклый многогранник, называемый областью допустимых решений (ОДР). Если ОДР не пустая и целевая функция ограничена снизу, то оптимум достигается в одной из вершин многогранника.

Стандартным методом решения задачи ЛП является симплекс-метод [8], который целенаправленно перебирает вершины допустимой области, на каждом шаге переходя к вершине с меньшим значением целевой функции, пока не достигнет оптимума (рисунок 2.1). На практике симплекс-метод решает задачи большой размерности за приемлемое время, хотя в худшем случае число шагов может расти экспоненциально.

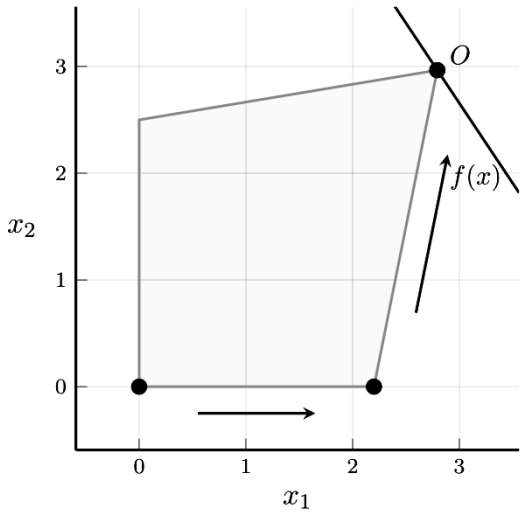


Рисунок 2.1 – Поиск оптимального решения симплекс-методом: движение по вершинам области допустимых решений

Для решения задачи ЛП симплекс-методом ее приводят к канонической (стандартной) форме, в которой ограничивающие неравенства заменяются равенствами за счет введения дополнительных переменных $s_i \geq 0$. Тогда неравенство вида $\bar{a}_i^{\mathsf{T}} \bar{x} \leq b_i$ можно переписать как $\bar{a}_i^{\mathsf{T}} \bar{x} + s_i = b_i$. Матрица ограничений A при этом дополняется единичной матрицей размера $m \times m$, которая соответствует введенным переменным:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^* \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix} = \bar{b}, \qquad \bar{x} \geq 0,\ \bar{s} \geq 0.$$

Например, для области, заданной неравенствами $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 - 6x_2 \leq 15$, $-5x_1 + x_2 \leq 11$ (рисунок 2.2), введение переменных $s_1, \ldots, s_4$ переводит каждое неравенство в уравнение прямой, на которой соответствующая переменная равна нулю (рисунок 2.3). Такое представление используется симплекс-методом для определения базиса, отвечающего текущей вершине допустимой области: переменные, равные нулю в данной вершине, являются небазисными, в то время как остальные являются базисными.

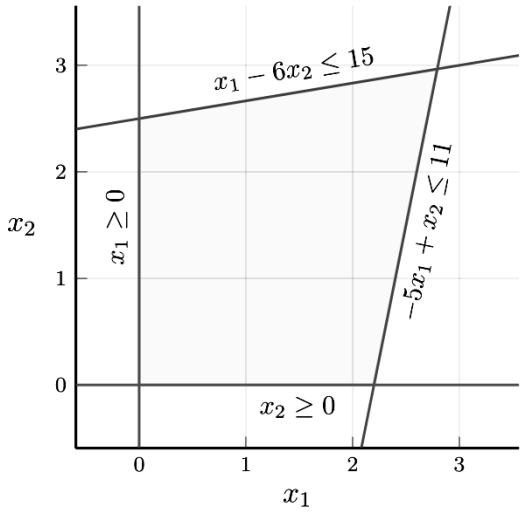


Рисунок 2.2 – ОДР задачи ЛП, заданная неравенствами

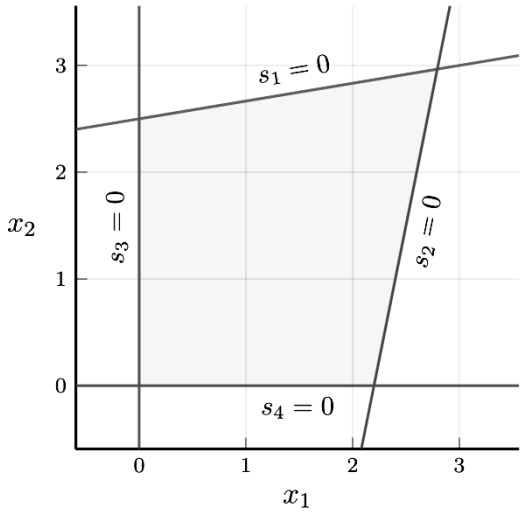


Рисунок 2.3 – Ограничения после ввода дополнительных переменных

Каждой прямой задаче ЛП (3), соответствует двойственная задача:

$$\begin{cases} \max\limits_{\bar{y}} \ \bar{b}^{\top}\bar{y} \\ A^{\top}\bar{y} \leq \bar{c} \\ \bar{y} \geq 0 \end{cases},$$

где $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ – вектор двойственных переменных, которые соответствуют ограничениям прямой задачи ЛП. По теореме о сильной двойственности [43] оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают. Оптимальное значение двойственной переменной y_i называется теневой ценой -го ограничения и показывает насколько изменится оптимальное значение целевой функции при увеличении правой части b_i на единицу. Теневая цена выражает предельную ценность соответствующего ресурса в оптимальном решении и является ключевым инструментом при построении метода генерации столбцов, который рассматривается далее в разделе 2.6.

Связь между решениями прямой и двойственной задач устанавливается теоремой о дополняющей нежёсткости [43]. Согласно этой теореме, в паре оптимальных решений $\bar{x}^*$ и $\bar{y}^*$ для каждой переменной прямой задачи и соответствующего ей ограничения двойственной задачи хотя бы одно из двух условий выполняется строго: либо переменная равна нулю ($x_j^* = 0$), либо двойственное ограничение выполняется как точное равенство. Иными словами, если переменная x_j^* положительна, то соответствующее ей двойственное ограничение обращается в равенство. Это утверждение служит теоретическим обоснованием критерия оптимальности, которое используется далее в работе.

2.2. Постановка задачи целочисленного линейного программирования

Во многих прикладных задачах переменные по своему смыслу могут принимать только целые значения, например число раскраиваемых заготовок или число выпускаемых изделий. Добавление к задаче (3) требования целочисленности переменных приводит к задаче целочисленного линейного программирования (ЦЛП):

$$\begin{cases} \min\limits_{\bar{x}} \bar{c}^{\top}\bar{x} \\ A\bar{x} \geq \bar{b} \\ \bar{x} \in \mathbb{Z}^k, \quad \bar{x} \geq 0 \end{cases}, \tag{4}$$

Если отбросить условие целочисленности (то есть заменить $\bar{x} \in \mathbb{Z}^k$ на $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$), то такая задача называется линейной релаксацией задачи ЦЛП и совпадает с исходной задачей ЛП (3). Оптимальное значение линейной релаксации является нижней оценкой оптимума задачи ЦЛП, поскольку допустимая область релаксации содержит все целочисленные допустимые точки.

Однако само оптимальное решение релаксации, как правило, не является целым, а его округление не гарантирует ни допустимости, ни оптимальности целочисленного решения. В общем случае задача ЦЛП является NP-трудной [47], что при предположении $P \neq NP$ исключает существование универсального алгоритма, который мог бы найти решение за полиномиальное время.

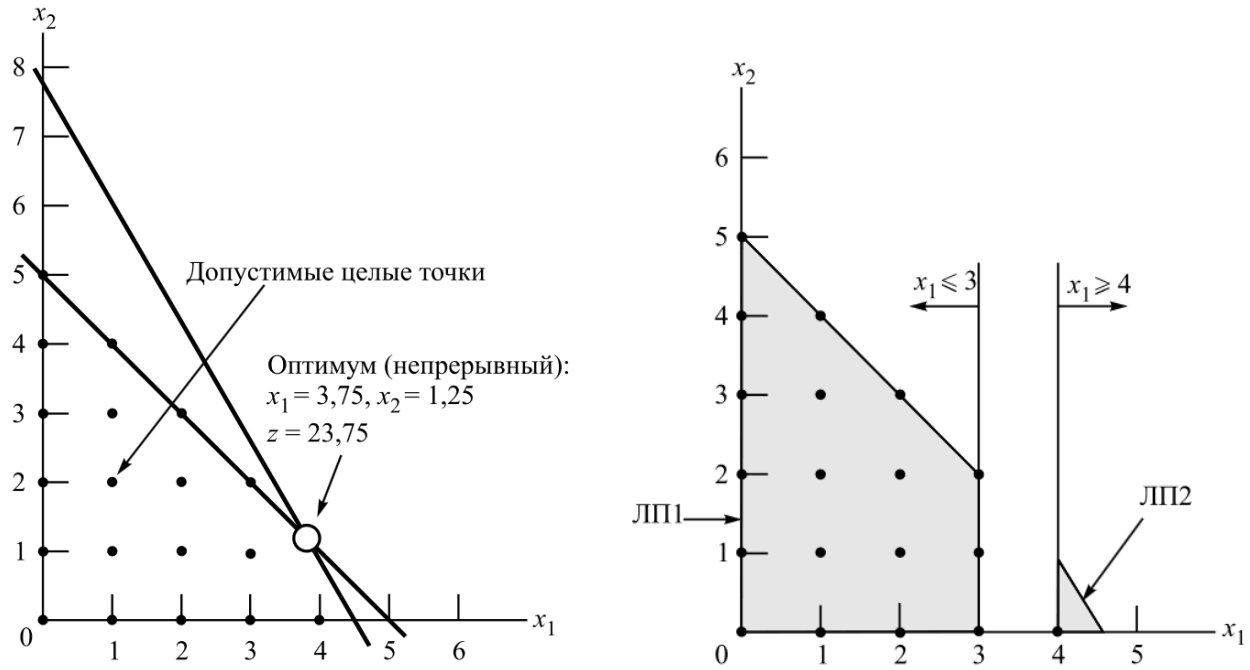
Для точного решения задачи ЦЛП существует два основных подхода, использующих линейную релаксацию как источник оценок: метод ветвей и границ и метод отсечений. Оба гарантируют нахождение глобального оптимума.

2.2.1. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ (branch and bound), предложенный А. Лэнд и Э. Дойг [10], организует направленный перебор целочисленных решений, сочетая разбиение области допустимых решений на подобласти (ветвление) с отсечением бесперспективных подобластей на основании оценки границ. Не смотря на то, что он был придуман довольно давно, данный метод остается базовым компонентом практически всех современных алгоритмов целочисленного программирования [26].

Сначала решается линейная релаксация задачи ЦЛП без условий целочисленности. Область допустимых решений релаксации и ее оптимум показаны на рисунке 2.4а. Если оптимальное решение релаксации – целочисленное, то оно является решением исходной задачи. В противном случае

выбирается переменная x_j, значение которой в решении релаксации дробно, и задача разбивается на две подзадачи добавлением ограничений $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ и $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil$, где x_j^* – дробное значение переменной. Полоса $\lfloor x_j^* \rfloor < x_j < \lceil x_j^* \rceil$ не содержит целочисленных значений x_j и потому исключается из рассмотрения, тогда как обе подзадачи сохраняют все целочисленные допустимые точки исходной задачи, что гарантирует, что оптимальное решение не будет потеряно. Разбиение области на две подзадачи показано на рисунке 2.4б.



(а) (б)

Рисунок 2.4 – Пространство допустимых решений задачи ЦЛП и оптимальное решение ее линейной релаксации (а), а также разбиение области допустимых решений на две подзадачи (б)

Первый шаг ветвления по переменной x_1 порождает две подзадачи ЛП1 и ЛП2. Если ни одна из них не дает целочисленного решения сразу, ветвление продолжается для каждой из них по отдельности, вновь порождая по две подзадачи. Процесс ветвления продолжается рекурсивно, порождая дерево подзадач (рисунок 2.5). Подзадача считается полностью исследованной, если ее релаксация дает целочисленное решение либо если ее оценка не лучше уже

найденного целочисленного решения. В последнем случае соответствующая ветвь отсекается без дальнейшего исследования, поскольку не может содержать лучшего решения. Вычисления завершаются, когда все ветви исследованы или отсечены.

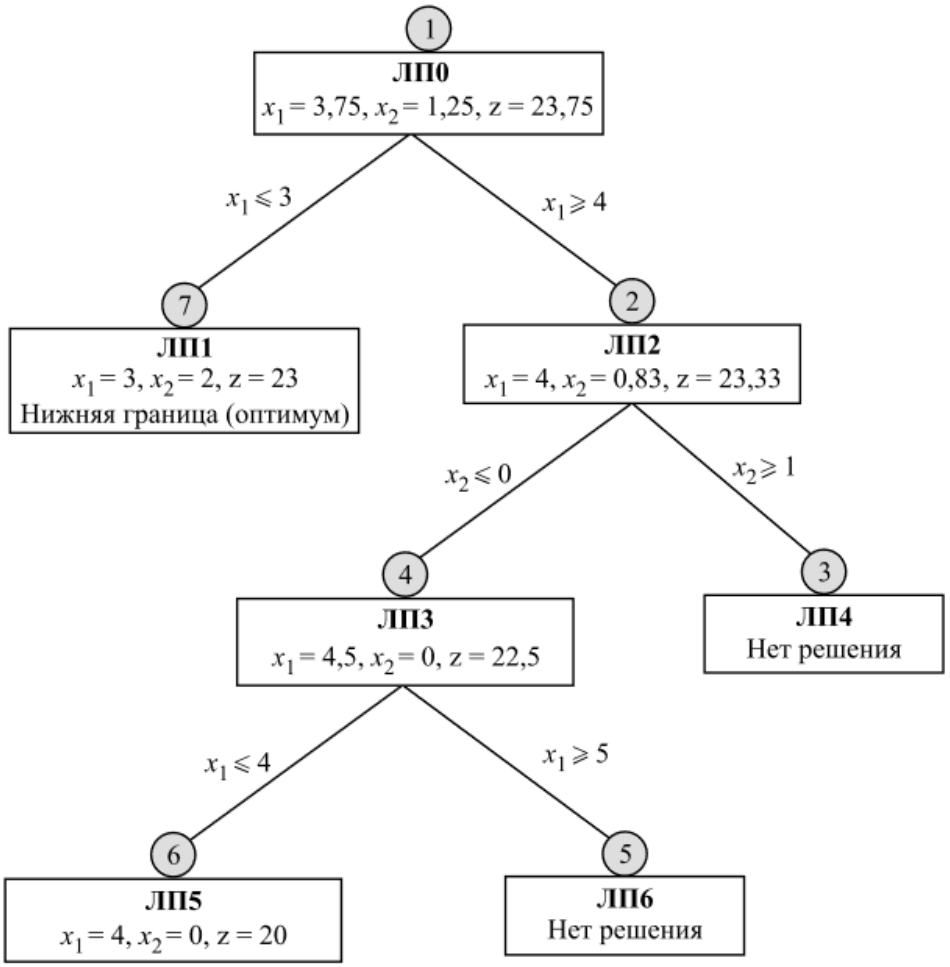


Рисунок 2.5 – Дерево ветвления подзадач метода ветвей и границ

Эффективность метода определяется правилами ветвления, то есть выбором переменной и способом разбиения, а также качеством оценок границ. Одной из простейших стратегий является ветвление по переменной с наибольшей дробной частью.. Тогда в качестве нижней оценки используется оптимум линейной релаксации подзадачи. В худшем случае метод требует полного перебора подобластей, однако на практике эффективное отсечение бесперспективных ветвей позволяет решать задачи большой размерности.

Помимо правил ветвления, на эффективность метода влияет стратегия выбора очередного узла дерева для исследования. Согласно классическому анализу [26], стратегия наилучшего первого *(best-first search)*, при которой на каждом шаге выбирается узел с наилучшей оценкой границы, гарантированно исследует не больше узлов, чем любая другая стратегия при фиксированном правиле ветвления, поскольку не тратит время на заведомо бесперспективные ветви. Ее недостатком является рост требуемой памяти, так как приходится хранить оценки всех еще не исследованных узлов. Альтернативная стратегия «поиска в глубину» *(depth-first search)* [48] обходит дерево последовательно, спускаясь по одной ветви до конца прежде чем вернуться к предыдущему уровню, обычно с помощью LIFO-списка активных узлов; она требует памяти, линейно растущей с глубиной дерева, но может исследовать больше узлов, чем стратегия наилучшего первого, поскольку позже обновляет оценку лучшего найденного решения. Выбор между стратегиями определяется соотношением между объемом доступной памяти и допустимым временем работы. Современные решатели ЦЛП, как правило, используют гибридные стратегии, сочетающие элементы обоих подходов: например, переключаются с наилучшего первого на поиск в глубину при нехватке памяти, а также применяют дополнительные эвристики выбора узла, учитывающие не только оценку границы, но и историю предыдущих ветвлений.

Качество оценок границ, используемых при ветвлении, также существенно влияет на эффективность метода. Классическими вариантами являются оценки на базе оптимумов ЛП-релаксаций [49], Лагранжевых релаксаций [50, 51, 52], а также эвристически найденные целочисленные решения [53], в том числе получаемые методами машинного обучения [54, 55]. Более мощными альтернативами служат оценки на основе суррогатных релаксаций и отсечений Гомори [56]. В современных коммерческих и открытых пакетах для решения задач ЦЛП метод ветвей и границ, как правило, используется в сочетании с другими приемами: генерацией отсечений и параллельными вычислениями [57, 58]. Такой гибридный подход позволяет существенно повысить общую

производительность алгоритмов целочисленной оптимизации за счет сочетания достоинств различных подходов.

2.2.2. Метод отсечений

Метод отсечений (метод секущих плоскостей, метод Гомори), предложенный Р. Гомори [9], позволяет решать задачу ЦЛП средствами только линейного программирования за счет итеративного добавления специальных линейных ограничений, называемых отсечениями Гомори.

На каждой итерации решается линейная релаксация задачи. Если ее оптимальное решение целочисленно, оно является решением исходной задачи ЦЛП. В противном случае строится отсечение, то есть линейное неравенство, которое исключает текущее дробное оптимальное решение, но не затрагивает ни одной целочисленной допустимой точки. Отсечение добавляется к задаче, и релаксация решается заново. Процесс повторяется, пока решение релаксации не станет целочисленным. Последовательное добавление отсечений постепенно преобразует область допустимых решений так, что ее вершина, соответствующая оптимуму, становится целочисленной. Пример решения задачи с помощью двух последовательных отсечений показан на рисунке 2.6.

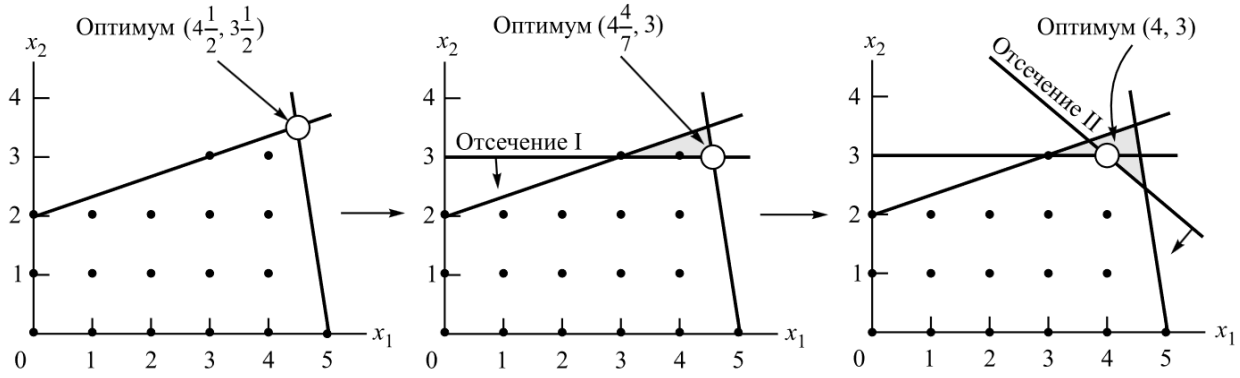


Рисунок 2.6 – Последовательность построения отсечений Гомори

Классический метод отсечений может обладать медленной сходимостью из-за «слабых» отсечений, поэтому на практике он применяется совместно с методом ветвей и границ (метод ветвей и отсечений, branch and cut), когда отсечения Гомори используются для усиления оценок границ в узлах дерева ветвления.

Существуют различные типы отсечений Гомори, наиболее известными из которых являются отсечения для общих целочисленных переменных и отсечения для бинарных переменных [59]. Одной из проблем метода является симметричность отсечений, которая может приводить к неэффективному перебору эквивалентных решений задачи. Для борьбы с ней применяются исключение симметричных решений и неравенства-запреты. Помимо классических отсечений Гомори, в современных программных средствах для решения задач ЦЛП используются и другие типы отсечений, в том числе генерируемые эвристическими методами [59]. Генерация отсечений, особенно более сложных типов, может быть вычислительно затратной операцией, поэтому необходим баланс между их количеством и временем на построение.

Точные методы гарантируют нахождение глобального оптимума, однако при большой размерности задачи время их работы может расти комбинаторно. Для таких случаев применяются приближенные методы, находящие близкое к оптимальному решение за меньшее время: эвристические алгоритмы и итерационные методы. В частности, в работах [60, 61, 62] описан итерационный метод приближенного решения задачи целочисленного линейного программирования, основанный на итеративном округлении координат нецелочисленного решения в направлении внутрь области допустимых решений по аналогии с методом покоординатного спуска. В конечном итоге выбор между точными и приближенными методами определяется размерностью конкретной задачи и требованиями к точности решения. Отдельные вопросы этого метода, такие как, например, построение кратчайшего пути до целочисленной точки, рассмотрены в работах [63, 64, 65]. В настоящей работе размерность возникающих задач целочисленного линейного программирования невелика, поэтому применяются точные методы, реализованные в программном средстве для решения задач ЦЛП с открытым исходным кодом CBC [66]. Задача линейного раскроя, рассматриваемая далее, является частным случаем задачи ЦЛП (4) со специальной структурой матрицы ограничений.

2.2.3. Программные средства для решения задачи целочисленного и смешанного целочисленного линейного программирования

Для решения задач целочисленного и смешанного целочисленного линейного программирования используются различные точные методы и эвристические алгоритмы. Точные методы, такие как метод ветвей и границ и метод Гомори, гарантируют нахождение глобального оптимума, но могут быть неприменимы для задач большой размерности из-за комбинаторного роста времени вычислений. Эвристические алгоритмы, включая жадные алгоритмы, поиск с восхождением, муравьиные алгоритмы, имитацию отжига и генетические алгоритмы, позволяют находить приближенные решения за разумное время [67]. Одной из самых известных задач, решаемых данными методами, является задача коммивояжера (travelling salesman problem, TSP) [68, 69].

Реализации перечисленных алгоритмов доступны в различных программных пакетах оптимизации [70]. Среди коммерческих решений наиболее известными являются CPLEX [71] и Gurobi [72], которые обладают широкими возможностями и высокой производительностью. В открытом доступе представлены такие пакеты, как CBC [66], GLPK [73], lp_solve [74, 75] и SCIP [76, 77]. Важным преимуществом открытых и бесплатных программных средств является возможность их свободного использования и модификации.

Также следует отметить бесплатный программный комплекс с открытым исходным кодом Google OR-Tools [78, 79], разработанный Google для решения задач линейного программирования, смешанного целочисленного программирования, программирования с ограничениями, маршрутизации транспортных средств и других задач оптимизации. Он представляет собой набор компонентов, написанных на языке программирования C++ [80], но имеющих возможность использования также с помощью Java [81] и Python [82, 83]. Он распространяется по лицензии Apache License 2.0 [84], что позволяет свободно использовать и модифицировать его код.

2.3. Постановка задачи линейного раскроя

Исторически постановка задачи раскроя как задачи линейного программирования связана с целлюлозно-бумажной промышленностью: исходная работа П. Гилмора и Р. Гомори [5] (метод генерации столбцов, предложенный в ней, рассматривается в разделе 2.6) решала задачу раскроя бумажных рулонов на более узкие полосы требуемой ширины с минимизацией отходов, поскольку неиспользуемые обрезки рулона представляли собой прямую потерю дорогостоящего сырья. Впоследствии тот же математический аппарат оказался применим к раскрою широкого круга длинномерных материалов, включая металлопрокат и, как показано в настоящей работе, арматуру для железобетонных изделий в виде стержней определенной длины.

Задача линейного раскроя *(one-dimensional cutting stock problem, 1D CSP)* [19] формулируется как задача ЦЛП следующим образом. Дан неограниченный запас прутков фиксированной длины L. В случае с арматурой – это прутки стандартной длины. Из этих прутков требуется нарезать стержни m типов длиной $l_1, \dots, l_m$ в количествах $d_1, \dots, d_m$ так, чтобы суммарный отход был минимален.

Способ нарезки одного прутка задается шаблоном раскроя. Шаблон p описывается вектором $\bar{a}_p = (a_{1p}, \dots, a_{mp})$, где a_{jp} – количество стержней типа j, вырезаемых из одного прутка по этому шаблону. Шаблон допустим, если суммарная длина вырезаемых стержней не превышает длину прутка:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j \le L, \quad a_{jp} \in \mathbb{Z}, \quad a_{jp} \ge 0 \tag{5}$$

Неиспользованный остаток прутка при раскрое по шаблону p образует отход, равный $w_p = L - \sum_{j=1}^{m} a_{jp}\, l_j$.

Обозначим как P множество всех допустимых шаблонов, а x_p – количество прутков, раскраиваемых по шаблону p. Задача оптимального раскроя состоит в

покрытии спроса минимальным количеством прутков и записывается как задача ЦЛП:

$$\begin{cases} \min\limits_{x_p} \sum\limits_{p \in P} x_p \\ \sum\limits_{p \in P} a_{jp}\, x_p \geq d_j, \quad j = 1, \dots, m \\ x_p \in \mathbb{Z}, \quad x_p \geq 0, \quad p \in P \end{cases} \tag{6}$$

Целевая функция задачи (6) минимизирует количество израсходованных прутков $Y = \sum_p x_p$. Каждое из m ограничений обеспечивает покрытие спроса на стержни соответствующего типа. Условие целочисленности отражает физическую неделимость, поскольку каждый пруток раскраивается по выбранному шаблону целое число раз. Задача (6) представляет собой частный случай задачи ЦЛП (4), в котором переменными являются количества применений шаблонов, а столбцами матрицы ограничений служат сами шаблоны $\bar{a}_p$. Суммарный отход при оптимальном раскрое выражается через количество прутков:

$$W = YL - \sum_{j=1}^{m} d_j\, l_j,$$

то есть суммарная длина всех израсходованных прутков за вычетом суммарной длины нарезанных стержней, идущих в изделия. При этом стержни, нарезанные сверх спроса d_j, полезной длины не образуют и входят в отход. Поскольку спрос d_j фиксирован, минимизация числа прутков Y и минимизация отхода W эквивалентны. Поэтому далее в работе в качестве меры отходов используется эта величина.

Выбор числа прутков в качестве целевой функции требует пояснения, поскольку возможен и другой критерий, а именно минимизация суммарного концевого обрезка прутков $\sum_p w_p\, x_p$. Концевой обрезок одного прутка – это кусок, оставшийся на конце после того, как из неё вырезали все нужные стержни по шаблону. Эти два критерия (количество отходов и количество обрезков) не равнозначны. Поскольку ограничения задачи (6) допускают перепроизводство

стержней (нарезку сверх спроса), минимизация концевого обрезка может привести к тому, что прутки «заполняются» дополнительными короткими стержнями, не востребованными спросом. В этом случае концевой обрезок обращается почти в ноль, однако израсходованный на лишние стержни материал в него не входит и остается неучтенным. Такой критерий занижает отход и перестает отражать реальный расход материала. Приведенная выше величина отхода W свободна от этого недостатка, так как учитывает перепроизведенные стержни как отход. Следовательно, ее минимизация эквивалентна минимизации числа прутков, что и принято в качестве целевой функции.

Прямое решение задачи (6) требует знания всего множества шаблонов P. Его мощность растет с ростом числа типов стержней и длины прутка, что делает предварительное перечисление всех шаблонов затруднительным. Способы работы с множеством P рассматриваются в следующих разделах.

Кроме того, задача раскроя (6) обладает свойством, важным для практического применения оценок линейной релаксации, введенных в разделе 2.2. Для подавляющего большинства встречающихся на практике исходных данных выполняется свойство целочисленного округления (integer round-up property, IRUP) [85], согласно которому оптимум задачи не превышает оптимума ее линейной релаксации, округленного вверх до ближайшего целого. Иными словами, разрыв между целочисленным решением и его непрерывной оценкой для задачи раскроя, как правило, меньше единицы, тогда как для произвольной задачи ЦЛП такой разрыв в общем случае не ограничен. Это свойство объясняет, почему решение линейной релаксации задачи (6), получаемое методом генерации столбцов (описанном в разделе 2.6), обычно служит хорошим приближением к целочисленному оптимуму.

2.4. Генерация шаблонов раскроя

Шаблон раскроя представляет собой любой допустимый набор $(a_{1p}, \dots, a_{mp})$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющий условию (5). Число таких наборов $|P|$ в общем случае растет как $O\left(\prod_{j=1}^{m} \lfloor L/l_j \rfloor\right)$, что при большом числе типов стержней и длинных прутках делает полное перечисление шаблонов практически неосуществимым.

Скорость роста $|P|$ иллюстрируется числовым примером: при прутке длиной $L = 12$ м и стержнях длиной от 1 до 3 м произведение $\prod_j \lfloor L/l_j \rfloor$ для $m = 3$ типов стержней дает величину порядка сотен, что соответствует границе применимости полного перебора. При удвоении числа типов стержней до $m = 6$ и при сохранении диапазона их длин та же оценка вырастает до величины порядка сотен тысяч, поскольку добавление каждого нового типа стержня умножает число комбинаций. Из-за этого граница применимости полного перебора определяется прежде всего числом типов стержней m, а не длиной прутка. Этим обусловлено применение двух подходов к работе с множеством шаблонов.

Первый подход заключается в полном переборе шаблонов, когда все допустимые шаблоны перечисляются заранее методом перебора допустимых комбинаций, после чего задача (6) решается на полном множестве P. Этот подход применим при небольшом числе типов стержней и умеренной длине прутка, когда мощность $|P|$ невелика. В настоящей работе он используется для задач с числом типов стержней $m \leq 3$: при таких параметрах $|P|$ не превышает нескольких сотен, и полный перебор вычислительно приемлем.

Второй подход – генерация шаблонов по требованию (метод генерации столбцов). Шаблоны не перечисляются заранее, вместо этого их поиск осуществляется итеративно в ходе решения, причем добавляются только те из них, которые потенциально улучшают текущее решение. Этот подход применяется при большой мощности $|P|$ и рассматривается в разделе 2.6.

Выбор между подходами определяется мощностью $|P|$: при малом числе типов стержней предпочтителен полный перебор как более простой в реализации; при большом числе типов стержней или большой длине прутка необходима генерация по требованию.

2.5. Задача о ранце

В данной работе задача о ранце возникает как вспомогательный инструмент при работе с шаблонами раскроя: ограничение на вместимость прутка, которому подчиняется допустимость шаблона (раздел 2.4), совпадает с ограничением задачи о ранце, а внутри метода генерации столбцов (раздел 2.6) задача о ранце решается непосредственно. Ниже приводится классическая постановка задачи и её вариант, применимый к шаблонам раскроя.

2.5.1. Классическая постановка задачи о ранце

Задача о ранце *(knapsack problem)* [23] состоит в следующем: имеется контейнер вместимостью W и n предметов, каждый из которых характеризуется весом w_i и ценностью v_i; требуется выбрать подмножество предметов с максимальной суммарной ценностью, не превышая вместимость контейнера. В двоичной постановке (0-1 knapsack) каждый предмет берется не более одного раза, то есть переменные $x_i \in \{0,1\}$:

$$max \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W, \quad x_i \in \{0,1\}.$$

Отличительной чертой задачи о ранце является наличие единственного ограничения вместимости. Задача является NP-трудной [47]: её линейная релаксация решается тривиально жадным алгоритмом, однако целочисленное решение в общем случае не может быть получено округлением и требует применения точных методов (динамического программирования или метода ветвей и границ).

Несмотря на NP-трудность, для задачи о ранце существует полностью полиномиальная аппроксимационная схема *(fully polynomial-time approximation scheme, FPTAS)* [86], то есть семейство приближенных алгоритмов, которое для любой наперед заданной точности $\varepsilon > 0$ находит решение, отличающееся от оптимального не более чем на долю ε, за время, полиномиальное как по размеру задачи, так и по $1/\varepsilon$. Существование FPTAS выделяет задачу о ранце среди NP-трудных задач, поскольку для многих других задач такой гарантии не существует.

Несмотря на это, приближенные схемы далее не рассматриваются: неограниченная задача о ранце возникает в методике только как вспомогательная задача метода генерации столбцов, а ее размерность позволяет решать её точно методом динамического программирования.

2.5.2. Неограниченная задача о ранце

В задаче генерации шаблонов раскроя каждый тип стержня может входить в шаблон произвольное число раз, что соответствует неограниченной задаче о ранце *(unbounded knapsack problem)* [87], в которой переменные n_j принимают любые целые неотрицательные значения. Роль вместимости здесь играет длина прутка L, весами являются длины стержней l_j, а ценностью выступают некоторые коэффициенты y_j:

$$max \sum_{j=1}^{m} y_j\, n_j \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{m} l_j\, n_j \le L, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad n_j \ge 0. \tag{7}$$

Неограниченная задача о ранце решается методом динамического программирования [25] за время $O(mL)$: таблица $\mathrm{dp}[l]$ хранит максимальную суммарную ценность, достижимую при остатке длины l, и заполняется последовательно от 0 до L. Ограничение задачи (7) совпадает с условием допустимости шаблона (5), поэтому полный перебор опирается на ту же комбинаторную структуру, однако саму задачу (7) решает лишь метод генерации столбцов, где коэффициенты имеют смысл теневых цен..

2.6. Метод генерации столбцов

Ранее было упомянуто, что при большой мощности множества шаблонов P их прямое перечисление становится практически неосуществимым. В этом разделе рассмотрим метод, который решает задачу (6) без предварительного перечисления всех шаблонов. Вместо этого они находятся по мере выполнения алгоритма итеративно.

2.6.1. Идея метода генерации столбцов

Метод генерации столбцов *(column generation)*, предложенный П. Гилмором и Р. Гомори [5, 6], позволяет решать задачу (6) без предварительного перечисления всех шаблонов. Метод итеративно строит рабочий набор шаблонов, добавляя на каждом шаге только тот шаблон, который способен улучшить текущее решение. Благодаря этому фактическое число шаблонов, с которыми работает алгоритм поиска решения, остается малым даже при огромной мощности полного множества P. Метод состоит из двух чередующихся задач: основной и вспомогательной.

На каждой итерации решается **основная задача**, то есть линейная релаксация задачи (6) на текущем рабочем наборе шаблонов, когда переменные x_p считаются вещественными. Решение симплекс-методом дает оптимальные значения x_p и теневые цены y_j, по одной на каждое ограничение для типа стержня j. В соответствии с интерпретацией теневой цены, данной в разделе 2.1, значение y_j показывает, насколько изменится число израсходованных заготовок при увеличении спроса d_j на единицу, то есть выражает внутреннюю стоимость одного стержня типа j в текущем решении, измеренную в долях прутка.

Полученные теневые цены передаются **вспомогательной задаче**, которая по ним ищет среди всех шаблонов, включая не перечисленные явно, кандидата на следующий шаблон с наименьшей приведенной стоимостью. Если такой шаблон способен улучшить решение, то он добавляется в рабочий набор и основная задача решается заново уже на расширенном наборе.

2.6.2. Критерий оптимальности

Для каждого допустимого шаблона p определяется приведенная стоимость:

$$r_p = 1 - \sum_{j=1}^{m} y_j \, a_{jp}. \tag{8}$$

Приведенная стоимость *(reduced cost)* сопоставляет собственную стоимость шаблона, равную одной заготовке, с суммарной ценностью вырезаемых им стержней $\sum_j y_j \, a_{jp}$, выраженной в теневых ценах. Если $r_p < 0$, то есть суммарная ценность стержней шаблона превышает стоимость одной заготовки, включение такого шаблона в решение снижает целевую функцию. Из теоремы о дополняющей нежёсткости [43] следует, что в оптимальном решении линейной релаксации для каждого используемого шаблона ($x_p > 0$) выполняется $r_p = 0$, а для всех остальных шаблонов $r_p \geq 0$. Поэтому условием оптимальности текущего набора является неотрицательность приведенной стоимости всех допустимых шаблонов: если ни одного шаблона с $r_p < 0$ не существует, текущее решение оптимально для полной задачи.

2.6.3. Вспомогательная задача и алгоритм

Проверка условия оптимальности требует нахождения шаблона с наименьшей приведенной стоимостью. Согласно (8), минимизация r_p по всем допустимым шаблонам эквивалентна максимизации суммарной ценности стержней $\sum_j y_j \, a_{jp}$ при ограничении на длину заготовки, то есть неограниченной задаче о ранце (7) с ценностями y_j. Шаблон $(n_1, \ldots, n_m)$, который решает задачу, имеет приведенную стоимость $r = 1 - \sum_j y_j \, n_j$. Если $r < 0$, то есть максимальная ценность стержней превышает единицу, этот шаблон добавляется в рабочий набор; в противном случае выгодных шаблонов не существует, и работа метода завершается. Метод генерации столбцов сводится к следующей последовательности шагов:

1. Задается начальный рабочий набор шаблонов (например, тривиальные шаблоны, содержащие стержни одного типа).
2. Решается основная задача, то есть линейная релаксация задачи (6) на текущем наборе; определяются теневые цены y_j.
3. Решается вспомогательная задача о ранце (7); определяется шаблон-кандидат и его приведенная стоимость r.
4. Если $r < 0$, шаблон-кандидат добавляется в рабочий набор, и выполняется возврат к шагу 2.
5. Если $r \geq 0$, набор шаблонов оптимален для линейной релаксации, и цикл завершается.
6. На финальном наборе шаблонов решается целочисленная задача (6) методами, изложенными в разделе 2.2.

Шаг 6 представляет собой упрощение: решение целочисленной задачи на зафиксированном наборе шаблонов не гарантирует нахождения глобального оптимума исходной задачи (6), поскольку среди отброшенных шаблонов мог остаться такой, включение которого в решение было бы выгоднее.

Точное решение задачи требует объединения генерации столбцов с ветвлением, то есть повторного решения вспомогательной задачи (7) в каждом узле дерева ветвления метода ветвей и границ. Подобный комбинированный метод называется методом ветвей и цен *(branch-and-price)* [27]. Метод генерации столбцов применяется лишь при большой мощности множества шаблонов P. Поскольку в задачах данной работы мощность P невелика, то используется полный перебор шаблонов. Метод генерации столбцов и метод ветвей и цен в расчетах главы 4 не потребовались, однако именно они определяют границу, за которой полный перебор перестает быть применимым, и потому изложены здесь как часть математического аппарата методики.

Таким образом, основная и вспомогательная задачи обмениваются данными по кругу: теневые цены являются выходом основной задачи и входом вспомогательной, а найденный шаблон является выходом вспомогательной и

входом основной на следующей итерации. Цикл продолжается до тех пор, пока вспомогательная задача не перестает находить шаблоны с отрицательной приведенной стоимостью.

На практике метод генерации столбцов позволяет решать задачи раскроя промышленного масштаба, с сотнями типов заготовок, за счет того, что число фактически порождаемых шаблонов остается в разы меньше мощности полного множества P. Известной практической проблемой метода является эффект хвостового затухания (tailing-off effect) [24], который появляется когда значение целевой функции основной задачи быстро приближается к оптимуму на первых итерациях, но затем сходимость резко замедляется, и доказательство оптимальности вблизи предельного значения может потребовать непропорционально большого числа дополнительных итераций.

Причиной такого эффекта является вырожденность двойственных решений вблизи оптимума, из-за которой теневые цены y_j колеблются между итерациями, не давая вспомогательной задаче быстро исчерпать множество шаблонов с отрицательной приведенной стоимостью. Для борьбы с этим эффектом применяются методы стабилизации, ограничивающие колебания теневых цен между итерациями, например штраф за отклонение текущих цен от некоторой опорной области [88]. В задачах данной работы, ввиду их небольшой размерности, эффект хвостового затухания не является значимым фактором, и стабилизация не применяется.

2.7. Выводы по второй главе

Во второй главе был изложен математический аппарат, который используется в основе разрабатываемой методики. Задача линейного раскроя сформулирована как задача целочисленного линейного программирования с особой структурой, в которой столбцами матрицы ограничений служат шаблоны раскроя. Для работы с множеством шаблонов рассмотрены два подхода: полный перебор, применимый при малом числе типов стержней, и метод генерации столбцов, применимый при большой мощности множества шаблонов и использующий неограниченную задачу о ранце как вспомогательную.

ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ

В настоящей работе представлена методика поиска оптимальной производственной программы выпуска изделий, которая минимизирует отходы линейного раскроя длинномерных материалов. Под методом понимается инструмент решения задачи определенного класса [89], а под алгоритмом – последовательность вычислительных шагов [90]. Методика, в отличие от них, объединяет несколько методов и алгоритмов, каждый из которых применяется на своем этапе: решение задачи целочисленного линейного программирования, перечисление шаблонов раскроя и полный перебор допустимых программ, рассмотренные в главе 2. Методика связывает их в последовательную процедуру принятия решений: формализация входных данных, построение допустимого множества производственных программ, вычисление значения функции отходов для каждой программы, полный перебор этого множества и выбор оптимальной программы по результатам сравнения.

Научная новизна методики состоит не в отдельном методе или алгоритме, а в постановке задачи. Управляемой переменной служит сама производственная программа $\bar{q}$, а не требуемое количество стержней, как это принято в классической задаче раскроя [5]. Такая постановка меняет целевую функцию. Вместо отхода при заданном фиксированном спросе минимизируется отход как функция производственной программы $W(\bar{q})$, значение которой при каждой программе вычисляется через решение вспомогательной задачи раскроя.

В настоящей главе рассматриваются свойства целевой функции задачи выбора производственной программы, определяющие выбор метода решения, общая схема методики, процедура вычисления отходов для заданной программы, алгоритм полного перебора и границы применимости методики.

3.1. Свойства целевой функции и выбор метода решения

Задача выбора производственной программы, сформулированная в разделе 1.4.2, состоит в нахождении такой программы $\bar{q}^* \in Q$, которая бы минимизировала количество отходов $W(\bar{q})$ для конкретной производственной программы. Далее эту функцию для краткости будем называть «функцией отходов». Целевой функцией этой задачи служит $W(\bar{q})$, значение которой при каждой программе $\bar{q}$ получается решением задачи линейного раскроя (6). Следует различать целевые функции этих двух задач: во вспомогательной задаче раскроя (6) минимизируется количество прутков, а в задаче выбора программы минимизируется отход $W(\bar{q})$. При фиксированной программе эти критерии эквивалентны, поскольку отход выражается через количество прутков вычитанием постоянной полезной длины, однако при переходе от одной программы к другой эквивалентность теряется, поскольку полезная длина меняется вместе с программой. Именно это и делает зависимость отхода W от программы $\bar{q}$ нетривиальной. Таким образом настоящий раздел устанавливает свойства функции $W(\bar{q})$.

3.1.1. Нелинейный характер функции количества отходов

В задаче раскроя (6) целевая функция и матрица шаблонов (a_{jp}) фиксированы, а вектор $\bar{d}$ в правой части меняется при изменении производственной программы. Обозначим через $Y(\bar{b})$ минимальное количество прутков, необходимое для покрытия произвольного спроса $\bar{b}$:

$$Y(\bar{b}) = min\left\{\sum_{p\in P} x_p \;\middle|\; \sum_{p\in P} a_{jp}\, x_p \geq b_j,\ j = 1, \dots, m,\ x_p \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad (9)$$

где $\bar{b} \in \mathbb{Z}^m$. Функция отходов $W(\bar{q})$ выражается через Y при подстановке производного спроса $d_j(\bar{q}) = \sum_i c_{ij}\, q_i$:

$$W(\bar{q}) = Y\left(\bar{d}(\bar{q})\right) L - \sum_{j=1}^{m} d_j\,(\bar{q})\, l_j. \qquad (10)$$

К. Блэр и Р. Джеросло [18] показали, что функция значения целочисленной программы $Y(\bar{b})$ принадлежит классу функций Гомори [44]: она является неубывающей ступенчатой функцией спроса, которая на целых областях сохраняет постоянное значение и скачкообразно возрастает на единицу при переходе через пороговые значения спроса, где для покрытия потребности в материале для дополнительных стержней требуется еще один пруток.

Второе слагаемое в (10), то есть полезная длина $\sum_j d_j\,(\bar{q}) l_j$, линейно зависит от программы $\bar{q}$, тогда как количество прутков Y изменяется ступенчато. Поэтому функция $W(\bar{q})$ является кусочно-линейной со скачками: на областях, где количество прутков Y постоянно, каждое дополнительное изделие добавляет «полезные» стержни, не требуя нового прутка, и отход W линейно убывает. При переходе через пороговое значение, где требуется дополнительный пруток, отход скачкообразно возрастает примерно на длину прутка L. В результате поверхность $W(\bar{q})$ содержит, как правило, множество локальных минимумов, расположенных непосредственно перед скачком в конце каждого прямого участка $Y(\bar{b})$. Стоит уточнить, что если производный спрос при любой допустимой программе делится нацело на вместимость прутка, то скачков не возникает и функция оказывается линейной. Этот случай разбирается далее в разделе 3.5.

Помимо этого, согласно гипотезе о модифицированном свойстве целочисленного округления *(modified integer round-up property, MIRUP)* [91], оптимальное значение $\mathrm{Y}(\bar{\mathrm{b}})$ отличается от значения непрерывной релаксации задачи (9), округленного вверх, не более чем на единицу. Гипотеза подтверждена вычислительными экспериментами на широком классе примеров одномерного раскроя, и ни один известный противоположный пример ее не опровергает [92]. Отсюда следует, что при росте спроса количество прутков увеличивается с шагом,

равным единице. Поэтому на пороге, где требуется дополнительный пруток, $W(\bar{q})$ возрастает примерно на одну длину прутка L.

Это можно проиллюстрировать на примере с одним типом изделия и одним типом стержня. Пусть длина прутка составляет $L = 12000$ мм, а каждое изделие требует одного стержня длиной $l = 1260$ мм. Из одного прутка нарезается не более девяти таких стержней, поскольку $9 \times 1260 = 11340$ мм, а десятый стержень уже не помещается. Тогда количество прутков равно $Y(q) = \lceil q/9 \rceil$, а отход составляет $W(q) = 12000\,Y(q) - 1260\,q$. Подстановка этих выражений при $q = 60 \ldots 67$ дает зависимости, показанные на рисунке 3.1.

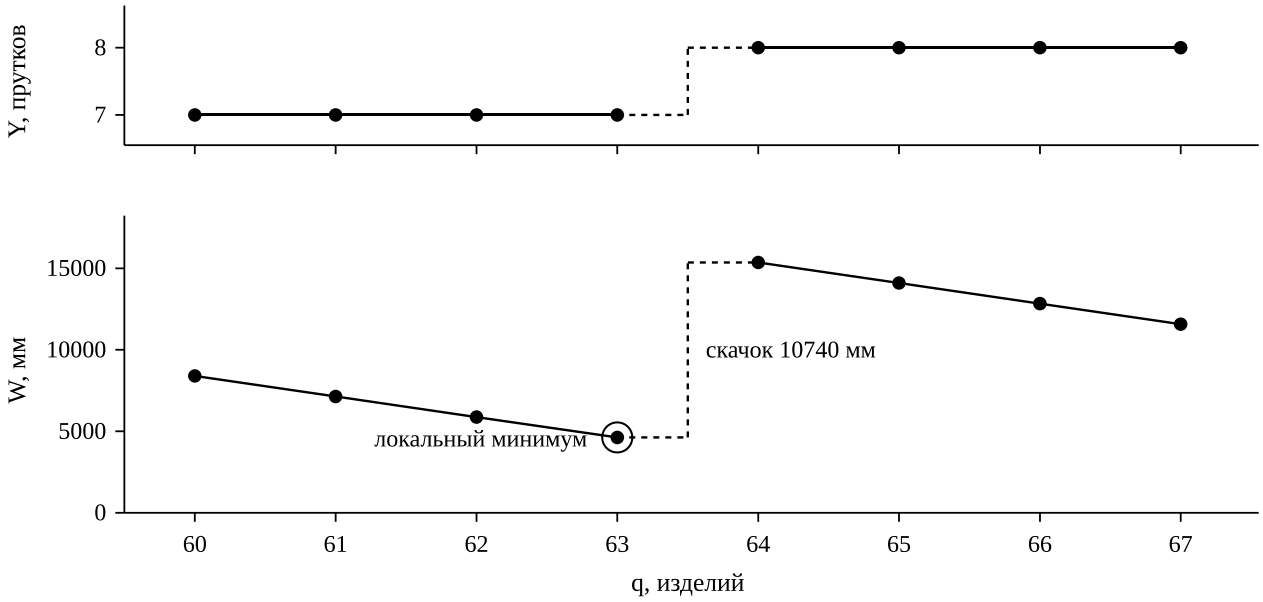


Рисунок 3.1 – Количество прутков Y и отход W
при увеличении выпуска для $L = 12000$ мм, $l = 1260$ мм

На участке, где количество прутков равно семи, каждое дополнительное изделие уменьшает отход ровно на 1260 мм, то есть на длину стержня, поскольку прокат уже закуплен, а полезная длина растет. При $q = 64$ семи прутков перестает хватать и требуется восьмой, поэтому отход возрастает на $12000 - 1260 = 10740$ мм. Программа $q = 63$ является локальным минимумом, поскольку обе соседние программы дают больший отход. Такие минимумы располагаются в конце каждого прямого участка, и именно их наличие не позволяет ограничиться проверкой номинального плана $\bar{q}'$.

3.1.2. Обоснование выбора полного перебора допустимых программ

Скачкообразный характер функции $W(\bar{q})$ определяет выбор метода решения задачи для нахождения $\bar{q}^*$. Поскольку функция $W(\bar{q})$ определена на дискретном множестве программ Q, является негладкой и не обладает ни монотонностью, ни выпуклостью, то из этого вытекают следующие следствия:

1. Градиентные методы оптимизации [45] неприменимы к задаче (2), поскольку область определения является дискретной, а сама функция негладкая и разрывная.
2. Поверхность $W(\bar{q})$ над пространством программ Q содержит, как правило, множество локальных минимумов, поэтому локальные методы поиска и покоординатный спуск [62, 93] не гарантируют нахождения глобального минимума и в общем случае останавливаются в одном из локальных.
3. Поскольку множество Q конечно и дискретно, то гарантированное нахождение глобального минимума обеспечивает метод полного перебора [48]. Процедура включает в себя вычисление $W(\bar{q})$ для каждой программы $\bar{q} \in Q$ с последующим выбором наименьшего значения. При вычислительно приемлемой мощности $|Q|$ полный перебор является наиболее надежным способом решения задачи (2). Из-за своей простоты и практической применимости именно он положен в основу разрабатываемой методики.

Альтернативой полному перебору для минимизации негладких функций на дискретных множествах служат эвристические алгоритмы [53, 67, 94, 95], то есть стратегии направленного случайного поиска, не гарантирующие оптимальности, но допускающие применение к задачам произвольной структуры. Примерами таких алгоритмов являются генетические алгоритмы, имитация отжига, поиск с запретами и их модификации [67].

Такие методы полезны, когда мощность области поиска исключает полный перебор, однако платят за это отсутствием гарантии нахождения глобального минимума. Результат нахождения решения зависит от начального приближения,

настройки параметров и случайных факторов, а качество решения обычно оценивается лишь статистически, по серии запусков.

Существует и точная альтернатива полному перебору. Поскольку целевая функция (10), записанная через переменные $\bar{x}$ и $\bar{q}$, и ограничения задачи (6) линейны, а принадлежность программы множеству Q задается целочисленными переменными $q_i = q_i' + \delta_i t_i$ с ограничениями $0 \le t_i \le |Q_i| - 1$, то вся задача (2) записывается как одна задача ЦЛП относительно пары $(\bar{x}, \bar{q})$ и решается методом ветвей и границ за один запуск, без явного перечисления множества Q.

Такой подход находит то же самое значение глобального минимума и при рассмотренных размерностях работает быстрее перебора. Полный перебор выбран в настоящей работе не потому, что это единственный возможный вариант, а из-за того, что предметом исследования служит не одна точка оптимума, а поведение функции отходов на всем допустимом множестве: расположение и число локальных минимумов, величина скачков и чувствительность отхода к выпуску каждого изделия. Эти сведения используются в следующих разделах для анализа работы методики. Монолитная постановка их не дает, поскольку возвращает лишь оптимальное решение. Сопоставление двух подходов по вычислительным затратам на задачах большей размерности составляет направление дальнейших исследований.

3.2. Общая схема методики

Методика состоит из пяти последовательных компонентов:

1. Формализации входных данных, включающей двухуровневое описание производственной структуры (количества и типов изделий и нормы расхода материала);
2. Построения допустимого множества производственных программ Q;
3. Процедуры вычисления функции отходов $W(\bar{q})$ для заданной программы;
4. Полного перебора, то есть вычисление $W(\bar{q})$ для каждой программы $\bar{q} \in Q$;
5. Анализа результатов и выбора оптимальной программы $\bar{q}^*$.

Общая схема методики приведена на рисунке 3.2.

Рисунок 3.2 – Общая схема методики

Входными данными методики являются:

- количество типов изделий n и количество типов стержней m;
- длина прутка L и длины стержней $l_1, \dots, l_m$;
- матрица норм расхода $C = (c_{ij})$, где c_{ij} – количество стержней типа j в одном изделии типа i;
- номинальный план выпуска $\bar{q}' = (q'_1, \dots, q'_n)$;
- параметры задачи оптимизации: допуск на перевыполнение плана Δ (в процентах) и шаг дискретизации δ (в процентах).

Двухуровневая структура вида «изделие – стержни» является ключевой особенностью постановки в методике. Задача раскроя формулируется на уровне стержней, а управляемым параметром служит программа на уровне изделий. Матрица норм расхода C связывает эти два уровня. Далее рассмотрим работу компонентов методики на сквозном примере.

Пример. Работа методики иллюстрируется на задаче раскроя арматурного проката для изготовления трех типов сборных железобетонных изделий ($n = 3$): изделие **И1** (перемычка 3ПБ13-37), изделие **И2** (перемычка 3ПБ27-8) и изделие **И3** (перемычка 2ПБ29-4). Все три марки взяты из типовой серии 1.038.1-1 [40]. Каждая перемычка армируется одним плоским каркасом: **И1** – каркасом КР22, **И2** – каркасом КР20, **И3** – каркасом КР12, что указано в спецификациях перемычек на листах 42, 38 и 34 типовой серии [40] соответственно (рисунки А.1-А.3 приложения А). Сборочные чертежи самих перемычек приведены на листах 43, 39 и 35 (рисунки А.6-А.8). Длины рабочих стержней этих каркасов, равные соответственно 1260, 2690 и 2820 мм, взяты из сводных таблиц сборочных чертежей каркасов (листы 73 и 70, рисунки А.5 и А.4 приложения А). Рабочий стержень во всех трех каркасах выполнен из арматуры диаметром 12 мм класса А-III, что позволяет раскраивать стержни всех трех изделий из прутков одного типоразмера. Обозначения и их значения в примере сведены в таблице:

Таблица 3.1 – Обозначения и соответствующие величины примера

Обозначение	**Смысл**	**Значение в примере**
L	длина прутка	12000 мм [38, с. 6]
n	число типов изделий	3
m	число типов стержней	3
$i = 1, \dots, n$	индекс типа изделия	$i = 1$: И1 (3ПБ13-37); $i = 2$: И2 (3ПБ27-8); $i = 3$: И3 (2ПБ29-4).
$j = 1, \dots, m$	индекс типа стержня	$j = 1$: стержень 1260 мм; $j = 2$: стержень 2690 мм; $j = 3$: стержень 2820 мм.
l_j	длина стержня типа j	$l_1 = 1260$, $l_2 = 2690$, $l_3 = 2820$ мм.

Таблица 3.1 – Обозначения и соответствующие величины примера (продолжение)

Обозначение	**Смысл**	**Значение в примере**
c_{ij}	норма расхода стержня j на изделие i	$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$, остальные = 0
$\bar{q}'$	номинальный план выпуска	$q'_1 = 60$, $q'_2 = 60$, $q'_3 = 40$
Δ	допуск на перевыполнение плана	10%
δ	шаг дискретизации	1%

Матрица норм расхода в данном примере диагональная. Каждое изделие требует ровно один стержень своей длины, $C = \mathrm{diag}(1,1,1)$. Этот пример проходит через все шаги методики в следующих разделах. В разделе 3.4.5 дополнительно показана работа методики на примере с недиагональной матрицей.

3.3. Процедура вычисления отходов для заданной программы

Для каждой программы $\bar{q} \in Q$ значение функции отходов $W(\bar{q})$ вычисляется в три шага:

Шаг 1. Вычисляется производный спрос на основе матрицы норм расхода:

$$d_j(\bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, q_i, \quad j = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Шаг 2. Формируется и решается задача раскроя. По вектору производного спроса $\bar{d}(\bar{q})$ формируется задача целочисленного линейного программирования (6) на множестве заранее перечисленных шаблонов P (при полном переборе) и решается методом ветвей и границ. Ее решением служат количества различных шаблонов x_p^* и минимальное количество прутков $Y = \sum_p x_p^*$.

Шаг 3. Расчет количества отходов:

$$W(\bar{q}) = YL - \sum_{j=1}^{m} d_j\,(\bar{q})\, l_j$$

Множество шаблонов P перечисляется однократно на этапе подготовки и используется для всех программ $\bar{q} \in Q$, поэтому вычисление $W(\bar{q})$ для одной программы сводится к решению одной задачи ЦЛП.

Пример. Для номинального плана $\bar{q}' = (60, 60, 40)$ производный спрос по формуле (11), ввиду диагональности матрицы C, совпадает с самим планом и равен $d_1 = 60$, $d_2 = 60$, $d_3 = 40$. Решение задачи раскроя (6) на множестве из $|P| = 62$ шаблонов (полный список представлен в приложении Б) использует два шаблона. Шаблон 4 состоит из четырех стержней l_3, поэтому $x_4^* = 10$ прутков дают 40 таких стержней, а шаблон 42 состоит из трех стержней l_1 и трех стержней l_2, поэтому $x_{42}^* = 20$ прутков дают по 60 стержней каждого из этих двух типов. Итоговое число израсходованных прутков есть сумма количеств по обоим шаблонам, то есть $Y = x_4^* + x_{42}^* = 10 + 20 = 30$, а итоговый отход есть сумма отходов по строкам таблицы 3.2.

Таблица 3.2 – Оптимальное решение задачи (6) при $\bar{q}' = (60, 60, 40)$

Шаблон p	a_{1p}	a_{2p}	a_{3p}	w_p, мм	x_p^*, прутков	Отход $w_p x_p^*$, мм
4	0	0	4	720	10	7200
42	3	3	0	150	20	3000
Итого					**30**	**10200**

Каждое ограничение задачи (6) должно выполняться как неравенство «больше или равно»: стержней l_1: $0 \times 10 + 3 \times 20 = 60 \geq d_1 = 60$; стержней l_2: $0 \times 10 + 3 \times 20 = 60 \geq d_2 = 60$; стержней l_3: $4 \times 10 + 0 \times 20 = 40 \geq d_3 = 40$. Все три ограничения выполняются точно как равенства, перепроизводства стержней в этом решении нет.

По формуле (10) отход равен разности между суммарной длиной израсходованных прутков и полезной длиной нарезанных из них стержней. Прутков израсходовано $Y = 30$ длиной $L = 12000$ мм каждый, что дает $30 \times 12000 = 360000$ мм. Полезная длина складывается из трех слагаемых: $d_1 l_1 = 60 \times 1260 = 75600$ мм, $d_2 l_2 = 60 \times 2690 = 161400$ мм и $d_3 l_3 = 40 \times 2820 =$

112800 мм, в сумме 349800 мм. Отход составляет $W(\bar{q}') = 360000 - 349800 = 10200$ мм, что оказалось ровно столько же, сколько получается прямым суммированием отходов по шаблонам ($7200 + 3000 = 10200$ мм). Это ожидаемо, поскольку обе формулы выражают один и тот же отход разными способами. Ключевую роль играет шаблон 42. Несмотря на диагональность матрицы норм расхода примера, он смешивает в одном прутке три стержня для **И1** и три стержня для **И2**, оставляя лишь 150 мм отхода вместо гораздо большего остатка при раздельном раскрое каждого типа стержня.

3.4. Реализация методики

Алгоритм методики состоит из четырех этапов, которые рассмотрены ранее в [96]. Они составляют перечисление шаблонов, построение множества программ Q, полный обход Q и анализ результатов в соответствии со схемой методики на рисунке 3.2.

3.4.1. Перечисление шаблонов раскроя

Все допустимые шаблоны раскроя перечисляются рекурсивно: для каждого типа стержня j перебираются значения $a_{jp} \in \{0,1, \dots, \lfloor r/l_j \rfloor\}$, где r – остаток длины прутка после размещения стержней предыдущих типов. Перебор выполняется однократно, полученное множество P используется на этапе сканирования для всех программ. В рассматриваемых задачах производства ЖБИ число типов стержней m мало (обычно $m \leq 3$), поэтому $|P|$ остается небольшим. Именно малый размер $|P|$ делает предпочтительным полное перечисление шаблонов перед решением задачи раскроя (6). Альтернативным подходом может служить метод генерации столбцов (раздел 2.6), который необходим при больших $|P|$, когда полное перечисление невозможно.

Пример. Для длин $l = (1260,2690,2820)$ и $L = 12000$ мм перечисление дает $|P| = 62$ допустимых шаблона, часть из которых приведена в таблице 3.3, а полная таблица представлена в приложении Б. Ни один из них не дает нулевого отхода, поскольку ни одна комбинация стержней не заполняет пруток полностью.

Таблица 3.3 – Часть допустимых шаблонов раскроя

№ p	**a_{1p} (1260 мм)**	**a_{2p} (2690 мм)**	**a_{3p} (2820 мм)**	**Занято, мм**	**Остаток w_p, мм**
1	0	0	1	2820	9180
2	0	0	2	5640	6360
3	0	0	3	8460	3540
4	**0**	**0**	**4**	**11280**	**720**
5	0	1	0	2690	9310
…					
39	3	1	1	9290	2710
40	3	2	0	9160	2840
41	3	2	1	11980	20
42	**3**	**3**	**0**	**11850**	**150**
43	4	0	0	5040	6960
44	4	0	1	7860	4140
…					
60	7	1	0	11510	490
61	8	0	0	10080	1920
62	9	0	0	11340	660

В таблице жирным выделены шаблоны 4 и 42, вошедшие в оптимальное решение для номинального плана примера. Шаблон 42 является смешанным, несмотря на то, что матрица норм расхода для данного примера является диагональной (изделия не имеют общих типов стержней), внутри одного прутка допустимо сочетать стержни для разных изделий. Это возможно потому, что допустимость шаблона зависит только от суммарной длины вырезаемых стержней, а не от того, для каких изделий они впоследствии пойдут. В шаблоне 42 три стержня l_1 и три стержня l_2 занимают $3 \times 1260 + 3 \times 2690 = 11850$ мм, оставляя остаток $w = 150$ мм.

3.4.2. Построение допустимого множества производственных программ

Для каждого типа изделий i формируется дискретный диапазон допустимых значений выпуска. Номинальный план q_i' задает нижнюю границу, так как недовыпуск не допускается, а верхняя граница определяется допуском Δ:

$$Q_i = \left\{ q_i',\ q_i' + \delta_i,\ q_i' + 2\delta_i,\ \dots,\ \left\lceil q_i' \left(1 + \frac{\Delta}{100}\right) \right\rceil \right\},$$

где шаг дискретизации в штуках изделий:

$$\delta_i = \max\left(1, \left\lfloor q_i' \frac{\delta}{100} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right). \tag{12}$$

Взятие по максимуму $\max(1, \dots)$ гарантирует, что шаг не меньше одного изделия даже при малых значениях q_i'. Допустимое множество производственных программ определяется как декартово произведение диапазонов по всем типам изделий:

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n, \qquad |Q| = \prod_{i=1}^{n} |Q_i|.$$

Пример. При $\bar{q}' = (60, 60, 40)$, $\Delta = 10\%$ и $\delta = 1\%$ шаг дискретизации $\delta_i = \max(1, \lfloor q_i' \, 0{,}01 + 1/2 \rfloor) = 1$ для всех трех изделий (поскольку $60 \times 0{,}01 + 0{,}5 = 1{,}1$ и $40 \times 0{,}01 + 0{,}5 = 0{,}9$ дают после округления вниз 1 и 0, а $\max(1,0) = 1$). Формирование множества допустимых программ представлено в таблице ниже:

Таблица 3.4 – Множество допустимых производственных программ

Изделие	q_i'**, шт.**	**Диапазон (**$\Delta = 10\%$**,** $\delta = 1$ **шт.)**	$\lvert Q_i \rvert$
И1 (3ПБ13-37)	60	$60, 61, \dots, 66$	7
И2 (3ПБ27-8)	60	$60, 61, \dots, 66$	7
И3 (2ПБ29-4)	40	$40, 41, \dots, 44$	5
Итого $\lvert Q \rvert = 7 \times 7 \times 5$			**245**

3.4.3. Полный перебор множества программ

Для каждой программы $\bar{q} \in Q$ выполняется процедура из раздела 3.3: вычисляется производный спрос $\bar{d}(\bar{q})$, решается задача ЦЛП (6) на множестве P и вычисляется $W(\bar{q})$. Результаты перебора образуют таблицу, в которой каждой программе поставлено в соответствие одно значение отхода W. Фрагмент такой таблицы для сквозного примера (из 245 программ) приведен ниже:

Таблица 3.5 – Варианты решений для разных производственных программ

$\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)$	$W(\bar{q})$, мм
(60,60,40)	10200
(60,60,41)	19380
(60,60,42)	16560
…	
(60,66,44)	18780
…	
(61,60,40)	20940
…	
(63,60,40)	18420
…	
(66,60,40)	14640
(66,60,41)	11820
(66,60,42)	**9000**
…	
(66,61,41)	9130

На этом этапе видно, что зависимость отхода от программы не является монотонной. Например, переход от (60,60,40) к (60,60,41) увеличивает отход почти вдвое, поскольку требует дополнительного прутка, а дальнейшее увеличение выпуска до (60,60,42) его, наоборот, уменьшает, так как новый пруток начинает заполняться полезными стержнями. Это и есть тот скачкообразный характер функции $W(\bar{q})$, о котором говорилось ранее. Программа, выделенная жирным, является глобальным минимумом во всем множестве производственных программ Q.

Из-за того, что множество шаблонов P строится один раз, а одно решение задачи ЦЛП при $|P| = 62$ и $m \leq 3$ занимает единицы миллисекунд, полный перебор $|Q| \leq 10^3$ программ выполняется за секунды. Поскольку вычисление $W(\bar{q})$ для одной программы $\bar{q} \in Q$ не зависит от результатов для остальных программ, задача сканирования относится к классу тривиально распараллеливаемых [97]. Программы из Q можно распределить между независимыми вычислительными потоками без обмена данными между ними в процессе счета, что при большей мощности $|Q|$ сокращает время сканирования пропорционально числу доступных вычислительных ядер.

3.4.4. Анализ результатов и выбор оптимума

После того, как была получена таблица значений $W(\bar{q})$ для каждой производственной программы, **находится глобальный минимум**. Определяются оптимальная программа и достигаемая экономия отходов относительно номинального плана:

$$\bar{q}^* = \operatorname{argmin}_{\bar{q} \in Q} W(\bar{q}), \quad \Delta W = W(\bar{q}') - W(\bar{q}^*).$$

Кроме того, помимо глобального минимума, также можно **наблюдать и локальные**. Программа $\bar{q}$ считается локальным минимумом, если ее отходы строго меньше, чем у всех соседних программ, отличающихся на один шаг δ_i по одному типу изделий. Наличие нескольких локальных минимумов подтверждает скачкообразный характер $W(\bar{q})$.

Наконец, если размерность задачи небольшая, то можно построить тепловую карту $W(q_1, q_2)$ для визуализации поверхности функции W. При $n = 2$ такая карта представляет собой матрицу значений отходов с осями по допустимым значениям q_1 и q_2. При $n = 3$ строятся ее срезы при фиксированном значении q_3. Тепловая карта наглядно показывает структуру поверхности $W(\bar{q})$: расположение областей убывания, скачков и локальных минимумов (рисунок 3.3).

Пример. Полный перебор всех 245 программ находит единственную оптимальную программу $\bar{q}^* = (66,60,42)$ с отходом $W^* = 9000$ мм. Экономия составляет $\Delta W = 10200 - 9000 = 1200$ мм (**11,8%** относительно номинального плана) за счет увеличения выпуска **И1** (перемычка 3ПБ13-37) на 6 штук (+10%) и **И3** (перемычка 2ПБ29-4) на 2 штуки (+5%) при неизменном выпуске **И2**. Оба отклонения находятся в пределах допуска $\Delta = 10\%$. В долях израсходованного металла отходы снижаются с 2,83% до 2,42%. Показательна зависимость отхода от выпуска **И3** при фиксированных $q_1 = 66$, $q_2 = 60$: значение W убывает до минимума, а затем скачкообразно возрастает, когда для покрытия спроса требуется дополнительный пруток (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Изменение отходов W при изменении количества изделия И3

q_3	40	41	**42**	43	44
Y, прутков	31	31	**31**	32	32
W, мм	14640	11820	**9000**	18180	15360

Это происходит, поскольку каждое дополнительное изделие **И3** добавляет полезный стержень l_3. Когда он укладывается в уже используемые прутки, отход убывает, а когда требуется дополнительный пруток, скачкообразно возрастает. По всему множеству Q функция $W(\bar{q})$ содержит 26 локальных минимумов (в смысле определения выше). Существенно, что сам номинальный план (60,60,40) с отходом 10200 мм также является локальным минимумом. Все три соседние программы дают больший отход. Поэтому локальный поиск, начатый из номинального плана, не делает ни одного шага и останавливается сразу же, не находя оптимума с отходом 9000 мм. Это наглядно подтверждает необходимость полного перебора: улучшение достигается только одновременным изменением выпуска двух изделий, а любое изменение по одному изделию отход лишь увеличивает. Структура поверхности $W(\bar{q})$ при $n = 3$ показана на рисунке 3.3 двумя срезами по значениям q_3. Приведены именно эти два среза, поскольку номинальный план и глобальный минимум лежат на разных срезах: номинал при $q_3 = 40$, а оптимум при $q_3 = 42$.

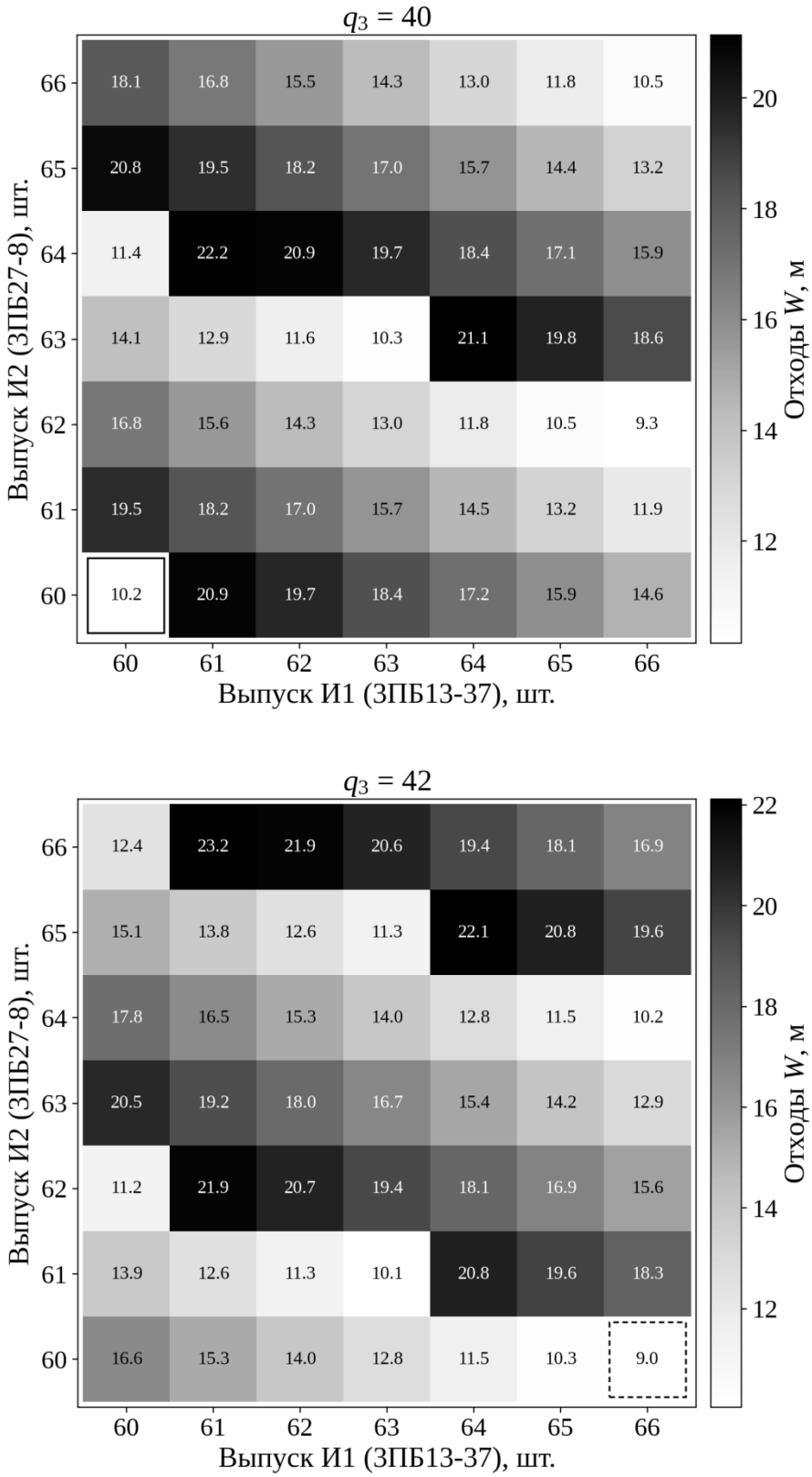


Рисунок 3.3 – Срезы поверхности функции отходов $W(q_1, q_2)$ при фиксированных значениях выпуска изделия **И3** $q_3 \in \{40, 42\}$. Значение отхода в метрах подписано в каждой клетке. Сплошная обводка – номинальный план, пунктирная обводка – точка глобального минимума $\bar{q}^* = (66, 60, 42)$

Тепловая карта и ее срезы (рисунок 3.3) показывают поверхность $W(\bar{q})$ целиком, но не позволяют увидеть ее поведение за пределами нормативного допуска Δ. Для этого можно построить графики чувствительности, которые показывают зависимость W от выпуска одного типа изделий при фиксированных на номинале остальных, в расширенном диапазоне (рисунок 3.4).

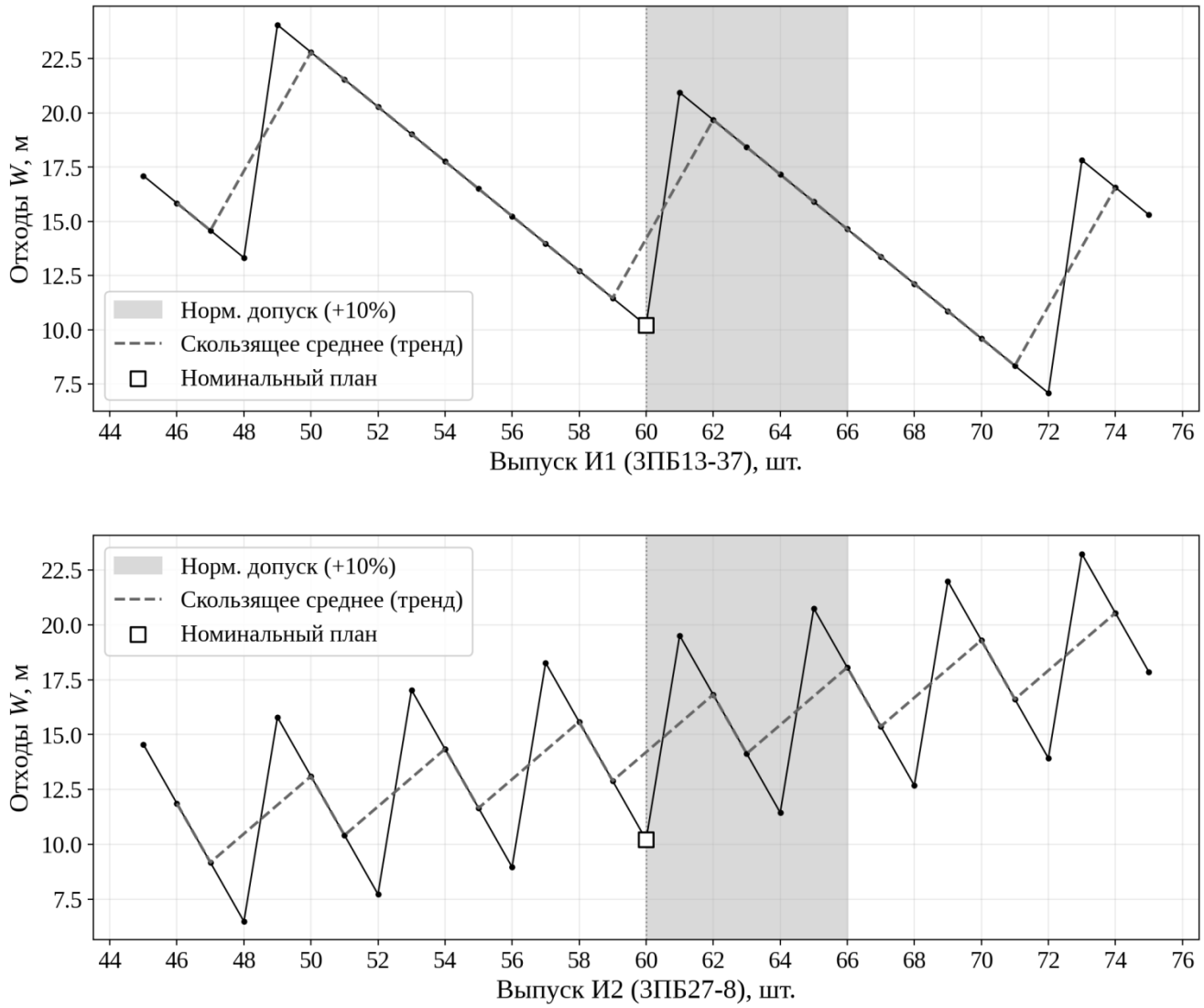


Рисунок 3.4 – График зависимости отходов W от выпуска изделий **И1** и **И2** (ЗПБ13-37 и ЗПБ27-8 соответственно) в расширенном диапазоне

По изделиям **И1** и **И2**, у которых длины стержней 1260 мм и 2690 мм соответственно, скачкообразные колебания W накладываются на выраженный монотонный тренд: для **И1** тренд убывающий, для **И2** возрастающий, то есть за пределами нормативного допуска увеличение выпуска этих изделий продолжает

систематически менять суммарные отходы, а не только колебать их в узком коридоре. Такой характер сохраняется и по изделию **И3** (длина стержня 2820 мм), у которого тренд также возрастающий, хотя и не такой сильный (рисунок 3.5).

При этом ни у одного из трех изделий колебания за пределами допуска не затухают, а сохраняют периодический характер, поскольку резкие всплески отхода видны на всем показанном диапазоне. Это отличает данный пример от случая с изделиями сильно различающейся длины, где зависимость отходов W сводится к почти горизонтальному тренду, так как короткие стержни укладываются в пруток много раз почти независимо от точного значения спроса, поэтому раскрой коротких стержней малочувствителен к производственной программе.

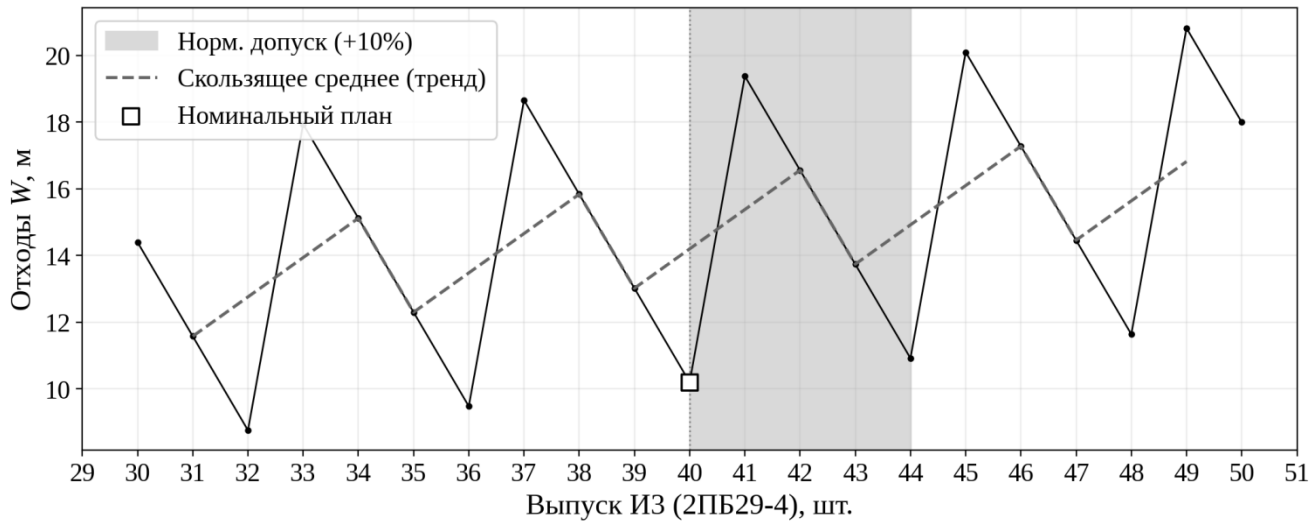


Рисунок 3.5 – График зависимости отходов W от выпуска изделия **И3** (2ПБ29-4)

3.4.5. Пример с прямоугольной матрицей норм расхода

Разобранный выше пример использует диагональную матрицу C. Чтобы показать, что методика не опирается на это свойство, а применима к произвольной структуре C, рассмотрим второй пример, в котором разные изделия требуют стержень одного и того же типоразмера.

В той же серии [40] перемычка 2ПБ30-4 (обозначим как **П1**) армируется каркасом КР13 [40 л. 34] (приложение А, рисунок А.1), а перемычка 3ПБ30-8

(обозначим как **П2**) – каркасом КР21 [40 л. 38] (приложение А, рисунок А.2), причем рабочим стержнем обоих каркасов служит одна и та же деталь 1.038.1-1.1 020115, стержень диаметром 12 мм класса А-III длиной 2950 мм. Длины каркасов в таблицах сборочных чертежей представлены на листах 70 и 73 серии [40] (приложение А, рисунки А.4-А.5). Добавим к ним уже знакомое изделие **И1** (перемычка 3ПБ13-37) со стержнем 1260 мм. Обозначим выпуски этих трех изделий через q_1, q_2 и q_3 соответственно. Тогда трем типам изделий отвечают всего два типа стержней, то есть $n = 3$, но $m = 2$, и матрица норм расхода становится прямоугольной:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{d}(\bar{q}) = (q_3,\ q_1 + q_2),$$

где столбцы отвечают стержням 1260 и 2950 мм. Методика применяется без каких-либо изменений. Введенные ранее формулы и шаги алгоритма не зависят от структуры C, меняется только способ построения производного спроса на шаге 1.

Отличие от случая с диагональной матрицей C видно из формулы выше. Производный спрос, а значит и отход, зависит не от выпуска изделий **П1** и **П2** по отдельности, а только от их суммы $q_1 + q_2$. Поэтому функция $W(\bar{q})$ является постоянной вдоль направлений, сохраняющих эту сумму, и ее минимум достигается не в одной точке, а на группе допустимых программ.

При номинальном плане $\bar{q}' = (50{,}40{,}60)$ и допуске $\Delta = 10\%$ множество допустимых программ содержит $|Q| = 6 \times 5 \times 7 = 210$ вариантов, отход при номинале составляет $W(\bar{q}') = 6900$ мм, а минимальный отход $W^* = 6270$ мм достигается сразу в четырех программах: $(50, 43, 63)$, $(51, 42, 63)$, $(52, 41, 63)$ и $(53, 40, 63)$. Все они имеют одну и ту же сумму $q_1 + q_2 = 93$ и один и тот же выпуск $q_3 = 63$. Экономия составляет $\Delta W = 630$ мм, или 9,1%. На практике это означает, что методика фиксирует суммарный выпуск двух изделий, оставляя распределение между ними на усмотрение планировщика. Структура поверхности функции отходов W представлена на рисунке 3.6.

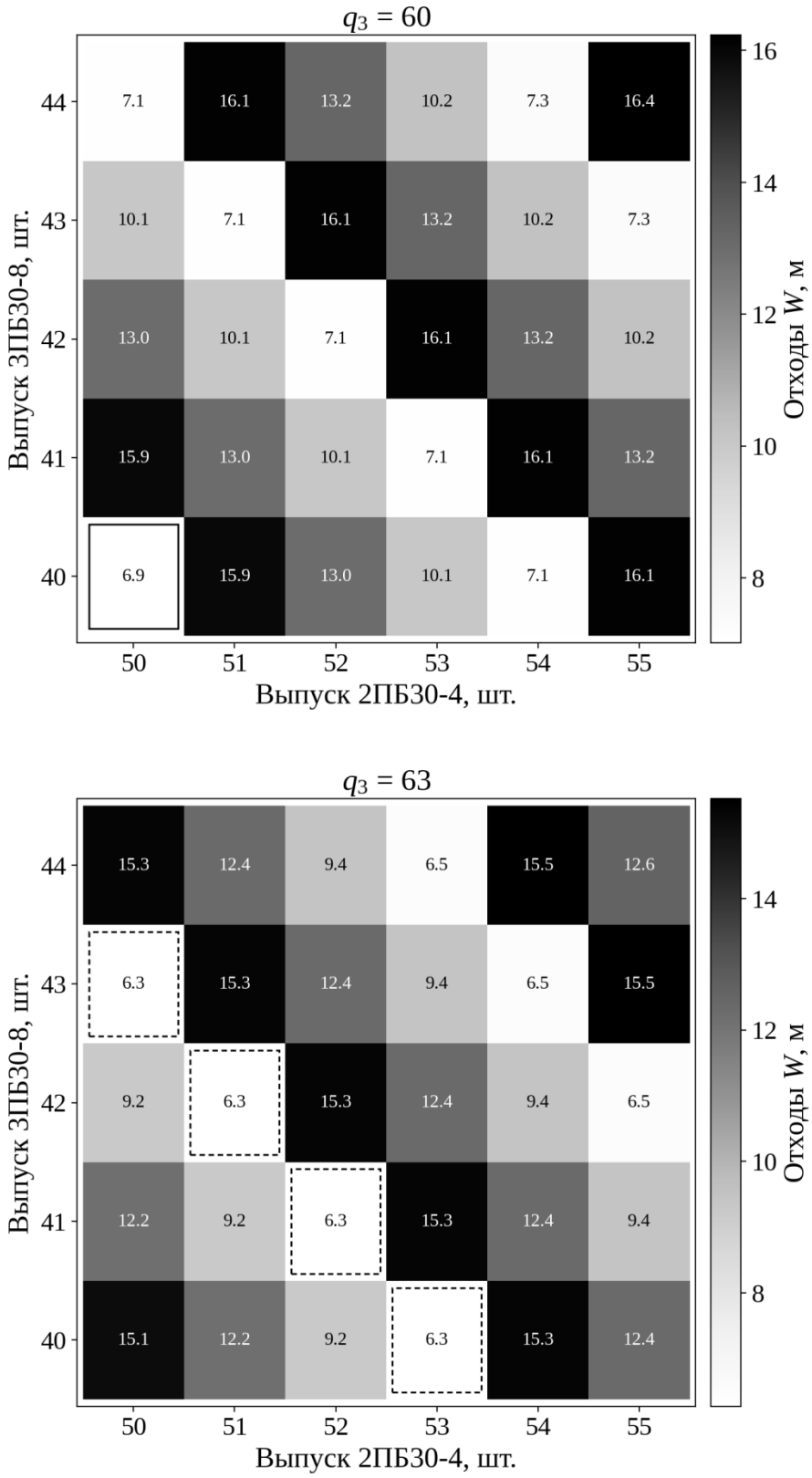


Рисунок 3.6 – Тепловая карта функции отходов W для примера с прямоугольной матрицей C. Видно, что при $q_3 = 63$ существует 4 оптимальных решения

Оба примера вместе показывают, что методика применима независимо от структуры матрицы C. Она влияет только на построение производного спроса $d(\bar{q})$, а все дальнейшие шаги от неё не зависят. Отличие проявляется лишь в характере решения: когда несколько изделий расходуют стержень одного типоразмера, отход зависит от их суммарного выпуска, и оптимальное решение является не отдельной точкой, а набором из нескольких равнозначных решений.

3.5. Границы применимости методики

Методика основана на полном переборе множества Q, поэтому границы ее применимости определяются мощностью $|Q|$. Эта мощность зависит от числа типов изделий n, номинальных объемов выпуска q_i', допуска Δ и шага дискретизации δ. Множество производственных программ Q строится как декартово произведение диапазонов Q_i, поэтому каждый новый тип изделия умножает $|Q|$ на $|Q_i|$, а не увеличивает на эту величину. При $\Delta = 10\%$ и $\delta = 1\%$ отдельный диапазон содержит от пяти до пятнадцати значений в зависимости от $q_i' \geq 40$, а в разобранных примерах от пяти до десяти. Такой рост называется «проклятием размерности» *(curse of dimensionality)* [25] и обозначает экспоненциальный рост вычислительной сложности задачи.

При $n \leq 3$ и указанных параметрах мощность $|Q|$ не превышает нескольких тысяч программ, и полный перебор выполняется за секунды, что подтверждается оценкой времени решения одной задачи в разделе 4.2. Время одного решения задачи (6) при переборе практически не меняется, поскольку множество шаблонов P строится однократно, а от программы зависит только вектор правых частей, поэтому суммарное время растет почти линейно в зависимости от роста $|Q|$. На практике решение задач допускает распараллеливание с практически линейным ускорением из-за того, что отдельные задачи являются независимыми.

Стоит отметить, что рост мощности $|Q|$ не устраняется методом генерации столбцов. Столбцами в задаче раскроя служат шаблоны и генерация столбцов противодействует росту их числа при увеличении количества типов стержней m, а

также длины прутка L. Однако, мощность множества Q не зависит от спроса и определяется параметрами производственной программы, тогда как генерация столбцов оперирует именно фиксированным спросом. Поэтому при вычислении отходов для каждой отдельной программы этот метод остается применимым, но заменить внешний перебор им нельзя.

Если при любой допустимой программе спрос делится на вместимость прутка нацело, то округление вверх не срабатывает и отход линейно растет вместе с выпуском. В этом случае он оказывается наименьшим при номинальном плане, то есть снизить отход в такой задаче невозможно. Это демонстрируется в главе 4.

За пределами указанных границ существует возможность сократить перебор, не отказываясь от точности: функция $Y(\bar{b})$ является неубывающей, поэтому целые области Q можно отсечь снизу без решения задачи. Разработка подобных методов отсечения выходит за рамки настоящей работы и составляет направление дальнейших исследований. Для класса задач, рассматриваемых в работе, полный перебор обеспечивает гарантированное нахождение глобального оптимума за приемлемое время.

3.6. Выводы по третьей главе

В данной главе представлена схема и описаны конкретные шаги методики поиска производственной программы, минимизирующей отходы линейного раскроя в пределах допуска Δ на перевыполнение плана. Целевая функция количества отходов $W(\bar{q})$ строится через количество прутков $Y(\bar{d})$, которое согласно [18] является ступенчатой функцией спроса, поэтому $W(\bar{q})$ кусочно-линейна со скачками и имеет множество локальных минимумов. Отсюда следует, что градиентные и локальные методы поиска непригодны, а гарантированное нахождение глобального оптимума на конечном множестве Q обеспечивает полный перебор. На этой основе разработана методика оптимизации производственной программы, применимая, пока мощность множества Q остается вычислительно приемлемой.

ГЛАВА 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Настоящая глава содержит более подробную демонстрацию методики, изложенной в главе 3, на задачах линейного раскроя арматуры для типовых железобетонных изделий. В первом разделе данной главы описывается методология проведения эксперимента: набор задач и порядок проведения вычислений. Во втором приводится программная реализация методики. В третьем методика применяется к двум задачам, различающимся структурой норм расхода и характером поверхности функции отходов $W(\bar{q})$. Далее полученные результаты выносятся на обсуждение и оценивается экономическая эффективность методики.

4.1. Методология проведения эксперимента

Методика проверяется на двух задачах, построенных на изделиях типовых серий 1.423.1-3/88 и 1.038.1-1 (таблица 4.1). Задачи различаются структурой матрицы норм расхода и характером поверхности функции отходов, что позволяет показать два противоположных исхода применения методики: в первой функция отходов не имеет скачков и снизить отход невозможно, а во второй поверхность отходов имеет скачкообразную форму и снижение достигается.

В одну задачу попадают изделия, рабочие стержни которых выполнены из одного и того же проката. Первая задача рассматривает производство колонн и использует арматуру диаметром 18 мм класса А-III, вторая – перемычки и использует арматуру диаметром 12 мм того же класса.

Марки изделий, марки их арматурных каркасов и длины рабочих стержней взяты из указанных серий используя последовательность, описанную в разделе 1.3. Конкретные листы указаны при описании соответствующей задачи, а копии этих листов приведены в приложении А.

Предполагается, что арматурный прокат поставляется прутками мерной длины 12000 мм согласно пункту 5.1.5 ГОСТ 34028-2016 «Прокат арматурный для железобетонных конструкций» [38]. Стандарт допускает и поставку мотками для диаметров до 22 мм включительно (пункт 5.1.8 ГОСТа), однако при такой

форме поставки прокат правится и режется в размер непрерывно, и задача раскроя в рассматриваемой постановке не возникает. Поэтому далее рассматривается только арматура в прутках. Колонка «Экономия, %» в таблице 4.1 дана для сопоставления задач, мерой результата служит доля отходов.

Таблица 4.1 – Список задач для вычислительного эксперимента

№	Изделия	Арматура	n	m	$\|P\|$	$\|Q\|$	База, мм	Экономия, %
1	Колонны 2К42-2М2, 2К42-4М2, 2К42-4М3-С	⌀ 18 А-III	3	3	19	125	499200	0
2	Перемычки 3ПБ13-37, 2ПБ30-4	⌀ 12 А-III	2	2	26	100	8050	7,8

В таблице: n – число типов изделий, m – число типов стержней, $|P|$ – число допустимых шаблонов раскроя, $|Q|$ – мощность множества допустимых производственных программ, «База, мм» – суммарные отходы $W(\bar{q}')$ при номинальном плане, «Экономия» – относительное сокращение отходов, равное $\big(W(\bar{q}') - W(\bar{q}^*)\big)/W(\bar{q}')$.

Для каждой задачи из таблицы 4.1 вычисления проводятся по схеме методики из раздела 3.2. Формируется набор допустимых программ Q при допуске на перевыполнение плана $\Delta = 10\%$ и шаге дискретизации $\delta = 1\%$, что после округления по формуле (12) дает при рассматриваемых объемах выпуска шаг в одно изделие, после чего для каждой программы $\bar{q} \in Q$ вычисляется производный спрос $\bar{d}(\bar{q})$ и решается задача раскроя. Таким образом получается значение $W(\bar{q})$. Далее по всему набору находятся локальные минимумы и глобальный минимум $\bar{q}^*$. Для задач с $n = 2$ результат представлен тепловой картой $W(q_1, q_2)$, для задач с $n = 3$ в виде срезов поверхности при фиксированном значении q_3. Кроме этого, для детального изучения поведения W по каждому типу изделия отдельно строится график зависимости величины отходов от плана производства конкретного типа изделий (при фиксированных остальных типах).

4.2. Программная реализация

Проведение вычислительного эксперимента требует разработки программного средства, выполняющего последовательно четыре действия: перечисление шаблонов раскроя, построение множества допустимых производственных программ Q, решение задачи целочисленного линейного программирования (6) для каждой программы в этом множестве и анализ результатов с построением тепловых карт, срезов и графиков чувствительности.

Поэтому выбор языка программирования обуславливается не столько соображениями производительности (на примерах в экспериментах размерность не слишком велика), а удобством применения и наличием готовых библиотечных модулей не только для математического моделирования, но и визуализации.

4.2.1. Выбор языка программирования

Для реализации методики рассматриваются три языка, применяемых для задач математической оптимизации: Python [82, 83], Julia [98, 99] и MATLAB [100]. Для настоящей работы определяющим является не производительность языка как такового, а размерность решаемой задачи: полный перебор шаблонов и множества Q при $|P|$ до 62 и $|Q| \leq 10^3$ требует решения не более нескольких тысяч задач ЦЛП небольшой размерности, каждая из которых занимает единицы миллисекунд. Полный вычислительный эксперимент выполняется за секунды или минуты независимо от выбора языка.

Поэтому преимущество, например, JIT-компиляции [101] Julia не дает измеримого выигрыша, а более широкая экосистема библиотек Python для работы с методами математического программирования наоборот представляет более удобный инструментарий. Это отражено в строке «Библиотеки» таблицы 4.2.

Таблица 4.2 – Сравнение языков программирования для задач математической оптимизации

Критерий	**Python**	**Julia**	**MATLAB**
Производительность	Умеренная (интерпретируемый язык)	Высокая (JIT-компиляция)	Высокая (оптимизированные встроенные функции)
Стоимость	Бесплатный	Бесплатный	Платный
Библиотеки для линейного и целочисленного программирования	несколько независимых библиотек (см. таблицу 4.3 ниже)	JuMP	Optimization Toolbox
Порог вхождения при интеграции в ИТ-системы предприятия	Низкий	Средний	Средний (лицензия ограничивает доступ)

По результатам этого сравнения для настоящей работы выбран Python 3.11. Определяющими для выбора стали открытость и широкая экосистема научных библиотек, включающая несколько независимых средств моделирования задач линейного и целочисленного программирования. Еще одним доводом в пользу Python служит его широкое использование для анализа данных в информационных системах технологической подготовки производства, что снижает порог интеграции методики на предприятии.

4.2.2. Выбор программного средства для решения задачи целочисленного программирования и визуализации результатов

Задача ЦЛП (6) на каждом шаге перебора формулируется средствами библиотеки PuLP [102]. Она была выбрана среди средств моделирования, доступных на Python (PuLP, Pyomo [103]), по двум причинам: она реализована целиком на Python, то есть не требует установки отдельного языка моделирования (в отличие от AMPL [104] или GAMS [105]) и позволяет описывать ограничения задачи ЦЛП в виде, близком к ее математической записи. Кроме того, PuLP отделяет описание модели от программы поиска решения, поэтому один и тот же код без изменений может быть направлен на любую из поддерживаемых

реализаций, что делает её выбор независимым техническим решением, а не архитектурным ограничением.

В качестве программного средства для поиска решения в данной работе используется открытый пакет CBC (COIN-OR Branch and Cut) [66], реализующий метод ветвей и границ в сочетании с методом отсечений. В таблице 4.3 представлено сравнение CBC с другими доступными средствами.

Таблица 4.3 – Сравнение программных средств для решения ЦЛП, поддерживаемых PuLP

Критерий	**CBC** [66]	**GLPK** [73]	**CPLEX** [71]	**Gurobi** [72]
Лицензия	Открытая (EPL), без ограничений	Открытая (GPL)	Коммерческая	Коммерческая
Стоимость	Бесплатно	Бесплатно	Требует лицензии	Требует лицензии
Производитель-ность на малых задачах	Единицы миллисекунд	Десятки миллисекунд	Единицы миллисекунд	Единицы миллисекунд
Ограничения учебной версии	Нет	Нет	По размеру / сроку	По размеру / сроку

CBC выбран из этого набора по совокупности двух свойств: он распространяется по полностью открытой лицензии (Eclipse Public License) без ограничений на размерность задачи и без необходимости регистрации учебной лицензии, в отличие от бесплатных академических версий CPLEX и Gurobi, ограниченных масштабом задачи или сроком действия. При этом для задач исследуемого масштаба (до 62 шаблонов, не более трех типов стержней) решение одной задачи раскроя занимает единицы миллисекунд, то есть практически не отличается от коммерческих решений на задачах такого размера. Иными словами, там, где коммерческие решатели дают измеримое преимущество (задачи с десятками тысяч переменных и ограничений), это преимущество не реализуется на задачах настоящей работы, поэтому более простой в применении CBC оказывается предпочтительным без потери в качестве результата.

Разработанный для данной работы программный комплекс формирует и решает задачу раскроя для каждой программы множества Q средствами PuLP и CBC, находит по результатам глобальный и локальные минимумы, а найденную поверхность отходов визуализирует тепловой картой и графиками проекции функции W по каждому измерению средствами библиотеки Matplotlib [106]. Логическая схема взаимодействия элементов комплекса приведена на рисунке 4.1.

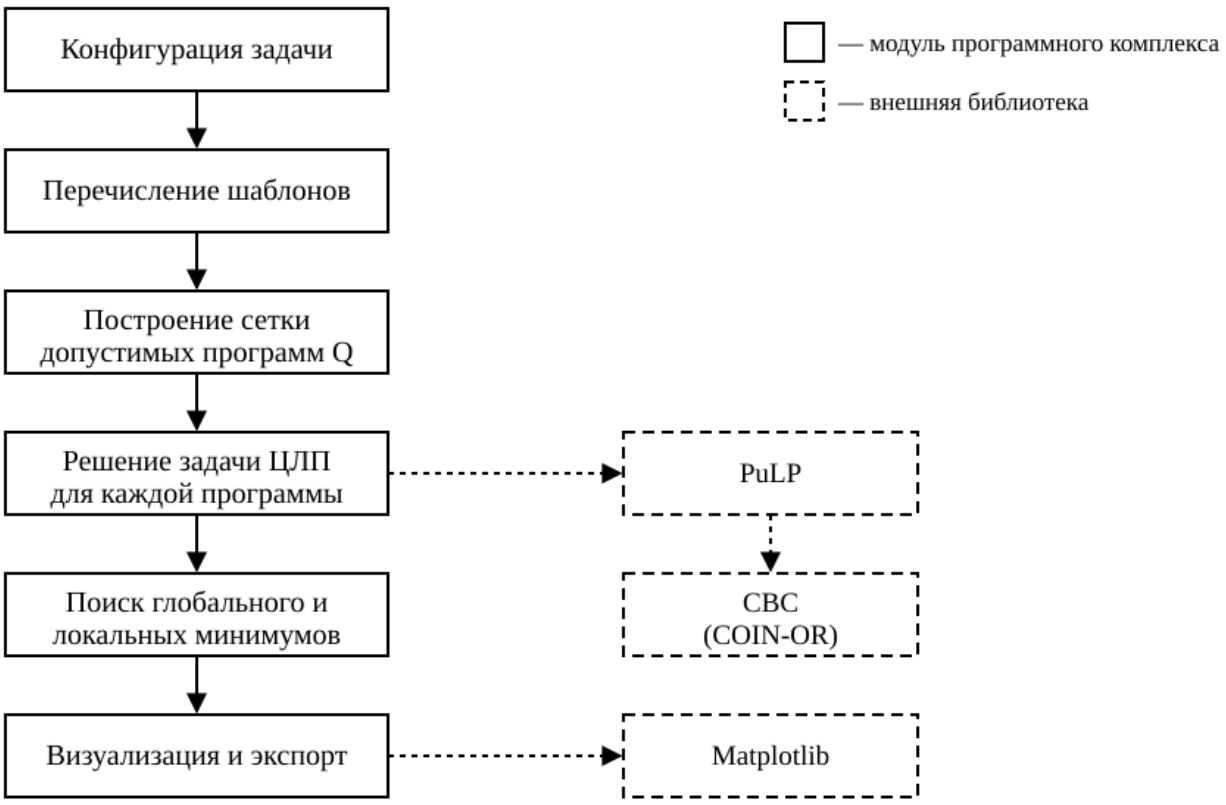


Рисунок 4.1 – Логическая схема взаимодействия элементов программного комплекса

Ниже в листинге 4.1 приведена программа, которая формирует и решает задачу раскроя для одной производственной программы. В ней переменные x_p – это количество прутков, раскраиваемых по шаблону p, целевая функция минимизирует их суммарное число, а ограничения обеспечивают покрытие производного спроса по каждому типу стержня.

Листинг 4.1 – Фрагмент программы на Python с применением пакета PuLP

```
problem = pulp.LpProblem("cutting_stock", pulp.LpMinimize)
x = [pulp.LpVariable(f"x_{p}", lowBound=0, cat="Integer")
     for p in range(len(patterns))]

problem += pulp.lpSum(x)  # минимизировать суммарное количество прутков Y

for j in range(m):  # для каждого типа стержня j
    problem += pulp.lpSum(patterns[p][j] * x[p]
                          for p in range(len(patterns))) >= rod_demand[j]
```

Для разработанного программного комплекса было получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2026615676 «Программа для планирования оптимального линейного раскроя металлопроката» [107] (приложение В).

4.3. Применение методики к задачам линейного раскроя

Далее рассматриваются две задачи, показывающие работу методики в разных условиях: при разном числе типов изделий и при разном соотношении длин стержней, от которого зависит форма поверхности $W(\bar{q})$. Вместе они показывают обе стороны применения методики. Она не только находит оптимум, но и обоснованно определяет случаи, когда оптимизировать нечего.

Задача 1. Колонны 2К42-2М2, 2К42-4М2 и 2К42-4М3-С. Первая задача построена на колоннах квадратного сечения 300×300 мм длиной 5000 мм по типовой серии [39, с. 15]. Связь изделия со стержнями здесь трехступенчатая: колонна армируется одним пространственным каркасом КП, тот собирается из плоских каркасов КР, и уже плоский каркас состоит из рабочих стержней. Состав изделий по этой цепочке приведен в таблице 4.4, каждый ее столбец взят с отдельного листа серии (приложение А, рисунки А.9-А.11).

Таблица 4.4 – Состав арматуры колонн 2К42- по листам серии 1.423.1-3/88

Колонна	**Каркас КП**	**Плоские каркасы КР**	**Рабочие стержни ⌀ 18 А-III**
2К42-2М2	КП6-2	2 × КР3-2	4 × 4960
2К42-4М2	КП6-4	2 × КР3-2, 2 × КР3-4	4 × 4960, 4 × 2900
2К42-4М3-С	КП6-7	2 × КР3-6, 2 × КР3-7	4 × 4960, 4 × 3100
Лист серии	1-6	2-6	2-187

Каждый плоский каркас содержит по два продольных стержня из арматуры класса А-III (ГОСТ 5781-82 [108]): КР3-2 и КР3-6 – длиной 4960 мм, КР3-4 – 2900 мм, КР3-7 – 3100 мм. Поскольку в пространственный каркас входит по два плоских, все нормы расхода оказываются кратными четырем. Помимо продольных рабочих стержней каждый каркас содержит поперечные стержни длиной 280 мм, однако они в задачу раскроя не входят, так как выполнены из проволоки класса Вр-I (ГОСТ 6727-80 [41]), которая поставляется мотками и раскроя не требует. По той же причине в задачу не входят и сварные сетки С9, входящие в состав пространственных каркасов.

Каждая колонна требует четыре стержня длиной 4960 мм, а колонны 2К42-4М2 и 2К42-4М3-С дополнительно по четыре стержня длиной 2900 и 3100 мм соответственно. Матрица норм расхода принимает вид:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

где столбцы отвечают стержням 2900, 3100 и 4960 мм, а строки – трем маркам колонн в порядке перечисления. В отличие от примеров из главы 3, элементы матрицы здесь не равны единице и два изделия требуют стержни сразу двух типоразмеров. Номинальный план предусматривает по 40 колонн каждой марки, что соответствует $\bar{q}' = (40, 40, 40)$, допуск $\Delta = 10\%$, число шаблонов $|\mathrm{P}| = 19$. Соответственно мощность множества производственных программ $|\mathrm{Q}| = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Полный перебор всех 125 допустимых программ не находит ни одной программы, дающей отход меньше номинального плана, поэтому экономия в данном примере равна нулю. Причина видна из состава оптимального раскроя: из 19 перечисленных шаблонов оптимальное решение использует три (приведены в

таблице 4.5). x_1, x_2 и x_3 обозначены количества прутков, раскраиваемых по каждому из шаблонов p.

Таблица 4.5 – Шаблоны оптимального раскроя

Шаблон	**Состав**	**Занято, мм**	**Остаток, мм**	**Число прутков**
p_1	4 × 2900	11600	400	x_1
p_2	2 × 3100 и 1 × 4960	11160	840	x_2
p_3	2 × 4960	9920	2080	x_3

В расчете участвуют три различные величины. Выпуск изделий $\mathrm{q_i}$ измеряется в штуках и является управляемой переменной задачи. Производный спрос $\mathrm{d_j}$ измеряется в стержнях и показывает сколько стержней каждой длины требуется нарезать. Количество прутков $\mathrm{x_p}$ измеряется в штуках прутков длиной 12000 мм и показывает, сколько прутков режется по каждому шаблону p. Расчет идет в порядке от выпуска к спросу и от спроса к пруткам.

Для расчета спроса на основании выпуска используется матрица норм расхода C. Производный спрос d_j вычисляется по ней согласно формуле (11). Стержней 2900 мм требуется $\mathrm{d_1 = 4q_2}$ штук, стержней 3100 мм $\mathrm{d_2 = 4q_3}$ штук, стержней 4960 мм $\mathrm{d_3 = 4q_1 + 4q_2 + 4q_3}$ штук.

Количество прутков $\mathrm{x_1}$, $\mathrm{x_2}$ и $\mathrm{x_3}$ находится из условия покрытия этого спроса. Стержень 2900 мм дает только шаблон $\mathrm{p_1}$ по четыре штуки на пруток. Стержень 3100 мм дает только шаблон $\mathrm{p_2}$ по две штуки. Стержень 4960 мм дают шаблоны $\mathrm{p_2}$ и $\mathrm{p_3}$ по одной и по две штуки соответственно. Это можно выразить в виде системы:

$$\begin{cases} d_1 = 4q_2 & = 4x_1, \\ d_2 = 4q_3 & = 2x_2, \\ d_3 = 4q_1 + 4q_2 + 4q_3 & = x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Её решение имеет вид $\mathrm{x_1 = q_2}$, $\mathrm{x_2 = 2q_3}$ и $\mathrm{x_3 = 2q_1 + 2q_2 + q_3}$. Все три величины целые при любых целых объемах выпуска. Общее количество прутков равно сумме x_p: $Y = 2q_1 + 3q_2 + 3q_3$.

Это выражение выполняется во всех 125 программах множества Q. Зная производный спрос и общее количество прутков, можно определить функцию количества отходов (10): $W(\bar{q}) = 4160\,q_1 + 4560\,q_2 + 3760\,q_3$ мм. Здесь коэффициенты перед q_i равны отходу, приходящемуся на одно изделие соответствующей марки. Отход складывается из длины прутков, закупаемых ради этого изделия, за вычетом полезной длины его стержней (таблица 4.6).

Таблица 4.6 – Расход проката на одно изделие каждой марки

Изделие	**Стержни**	**Полезная длина**	**Прутков**	**Закуплено**	**Отход**
2К42-2М2	4 × 4960	19840 мм	2	24000 мм	4160 мм
2К42-4М2	4 × 4960 4 × 2900	31440 мм	3	36000 мм	4560 мм
2К42-4М3-С	4 × 4960 4 × 3100	32240 мм	3	36000 мм	3760 мм

Ниже в таблице 4.7 приведен расчет спроса каждого типа стержней, общего количества прутков и расхода материала для номинального плана $\bar{q}'$.

Таблица 4.7 – Расчет отходов при номинальном плане

Величина	**Выражение**	**Значение**
Спрос на стержни 2900 мм, шт.	$d_1 = 4q_2$	160
Спрос на стержни 3100 мм, шт.	$d_2 = 4q_3$	160
Спрос на стержни 4960 мм, шт.	$d_3 = 4q_1 + 4q_2 + 4q_3$	480
Количество прутков, шт.	$Y = 2q_1 + 3q_2 + 3q_3$	320
Расход материала, мм	YL	3840000
Полезная длина, мм	$\sum_j d_j\, l_j$	3340800
Отход, мм	$W = YL - \sum_j d_j\, l_j$	499200
Доля отходов в прокате	$W/(YL)$	13,00%

Поскольку ни одно изделие не заполняет пруток стержнями для раскроя без остатка, то отход растет с выпуском каждого из них. Функция количества отходов W линейна и возрастает по каждому изделию. Множество Q не допускает недовыпуска, а номинальный план $\bar{q}' = (40, 40, 40)$ является его угловой точкой, и наименьший отход достигается именно в нем. Доля отходов материала равна 13% из-за того, что стержень 4960 мм занимает почти половину длины прутка, и два таких стержня оставляют 2080 мм, куда не помещается ни 2900, ни 3100 мм.

Линейный характер функции отходов виден на рисунке 4.2. Значение отхода в метрах подписано в каждой клетке среза, сплошным квадратом отмечен номинальный план. Поверхность отходов W не имеет скачков, а наименьшее значение отхода при выпуске 44 изделий равно 514,2 м против 499,2 м при 40 изделиях. То есть с ростом выпуска третьей марки минимум не смещается вглубь.

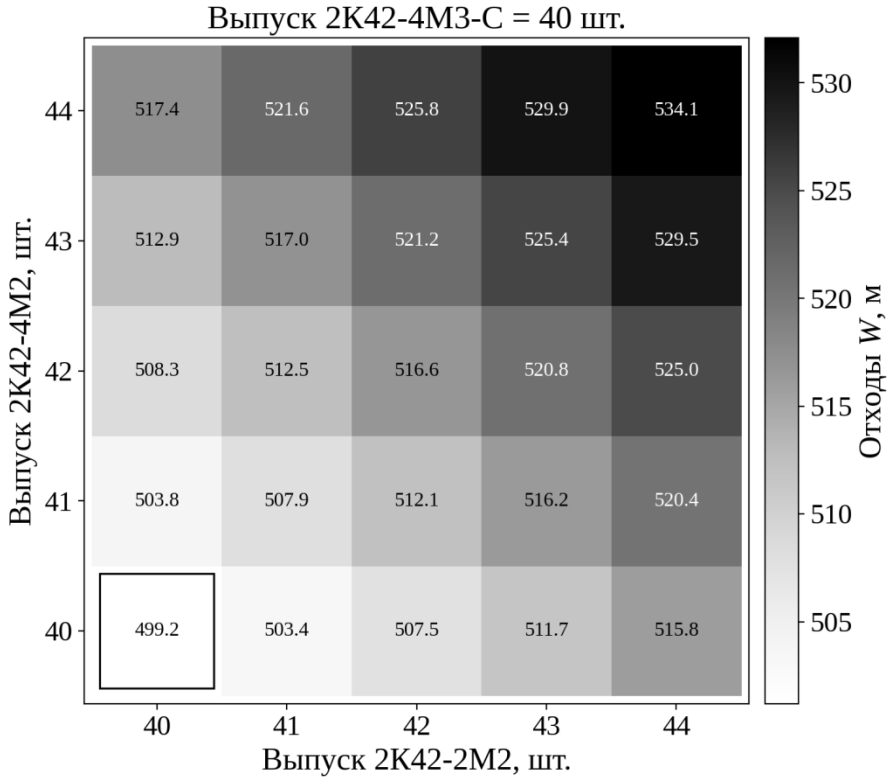


Рисунок 4.2 – Срез поверхности отходов W при выпуске изделия 3 (2К42-4М3-С) $q_3 = 40$

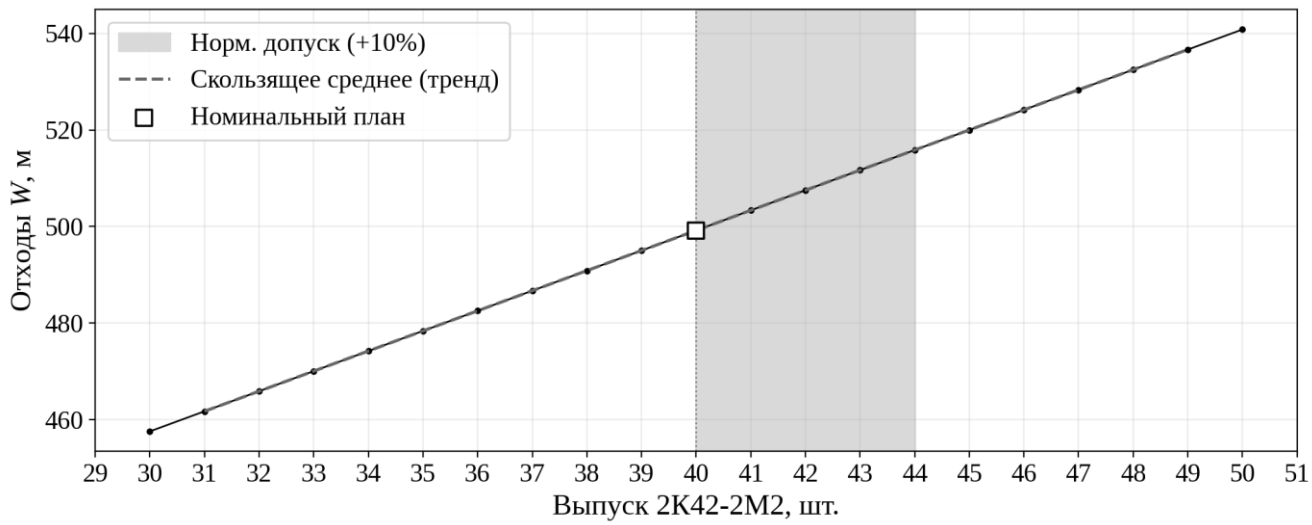


Рисунок 4.3 – График зависимости количества отходов
от выпуска изделия 1 (2К42-2М2)

Графики зависимости количества отходов от выпуска каждой марки в отдельности представляют собой прямые без скачков, на рисунке 4.3 показана зависимость для изделия 1. Для остальных изделий графики имеют тот же вид, отличаясь наклоном. Результат решения задачи 1 показывает, что применение методики может дать нулевой результат, и такой результат тоже является содержательным. Невозможность снижения здесь не следствие неполноты перебора, а свойство исходных данных. Нормы расхода C кратны вместимостям используемых шаблонов, поэтому количество прутков растет пропорционально выпуску. Из-за этого изменение производственной программы в пределах допуска не снижает количество отходов. Снижение возможно только за счет изменения самих исходных данных, то есть мерной длины поставляемого проката, либо конструкции арматурного каркаса.

Длина прутка является параметром исходных данных. Пункт 5.1.5 ГОСТ 34028-2016 [38] допускает мерные длины 6,0; 9,0; 11,7; 11,9; 12,0 и 18,0 м, из которых в поставках наиболее частыми являются 6,0; 11,7 и 12,0 м. Можно пересчитать отходы по методике для каждой из этих длин (таблица 4.8).

Таблица 4.8 – Отходы задачи 1 при различных мерных длинах проката

Длина прутка L, мм	**Прутков Y, шт.**	**Закуплено, мм**	**Отход W, мм**	**Доля отходов**
6000	640	3840000	499200	13,00%
11700	**320**	**3744000**	**403200**	**10,77%**
12000	320	3840000	499200	13,00%

Наименьшая доля отходов достигается при длине прутка 11700 мм. При каждой из трех длин наименьший отход отвечает номинальному плану $\bar{q}'$, поэтому дополнительной экономии при смене программы нет ни в одном случае. При замене прутка 12000 мм на 11700 мм доля отходов уменьшается с 13,00 до 10,77%, то есть на 2,23 процентных пункта. Пересчитаем полезную длину и остаток для новой длины прутка:

Таблица 4.9 – Остаток прутка в шаблонах раскроя при двух мерных длинах

Шаблон	**Стержни**	**Полезная длина, мм**	**Остаток при $L = 12000$, мм**	**Остаток при $L = 11700$, мм**
p_1	4 × 2900	11600	400	100
p_2	2 × 3100 1 × 4960	11160	840	540
p_3	2 × 4960	9920	2080	1780

Состав шаблонов и количество прутков сохраняются и равны $Y = 320$. Уменьшается только неиспользуемый остаток, на 300 мм в каждом прутке. Поэтому экономия составляет $320 \times 300 = 96000$ мм, или 2,5% закупаемого материала. При длине прутка 6000 мм экономии нет по причине того, что стержни 2900 и 3100 мм укладываются в такой пруток вдвоем без остатка, однако стержень 4960 мм занимает пруток целиком и оставляет 1040 мм. Шаблона, который использовал бы пруток 6000 мм полнее не существует.

При длине прутка 11700 мм отход на одно изделие составляет 3560, 3660 и 2860 мм вместо 4160, 4560 и 3760 мм. Производственная программа в обоих случаях остается номинальной, поэтому дополнительных затрат на производство изделий, таких как бетон, формы и складские площади, не требуется.

Задача 2. Перемычки 3ПБ13-37 и 2ПБ30-4. Вторая задача построена на железобетонных брусковых перемычках по типовой серии [40, с. 35, 43] (приложение А, рисунки А.6, А.8). Связь изделия со стержнями здесь образуется следующим образом: перемычка армируется одним плоским каркасом КР, а каркас состоит из стержней. Состав изделий приведен в таблице 4.10 на основании листов из приложения А, рисунки А.1, А.3, А.4 и А.5.

Таблица 4.10 – Состав арматуры перемычек по листам серии 1.038.1-1

Перемычка	**Длина изделия, мм**	**Каркас**	**Стержни ⌀12 А-III**	**Листы серии**
3ПБ13-37	1290	КР22	1 × 1260	42 и 73
2ПБ30-4	2980	КР13	1 × 2950	34 и 70

Каждый каркас содержит один продольный стержень из арматуры класса А-III: для КР22 – это стержень длиной 1260 мм, для КР13 – 2950 мм (приложение А, рисунки А.4–А.5). Оба стержня выполнены из проката одного класса и диаметра, поэтому нарезаются из прутков одного типоразмера, что и позволяет объединить обе марки в общую задачу раскроя. Поперечные стержни каркасов из проволоки класса Вр-I не входят в задачу, поскольку они поставляются в мотках, а не прутками. Каждая перемычка требует ровно один стержень своей длины, поэтому матрица норм расхода диагональная:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где столбцы отвечают стержням 1260 и 2950 мм, а строки – двум маркам перемычек в порядке перечисления. При допуске $\Delta = 10\%$ мощность множества производственных программ $|Q| = 10 \times 10 = 100$. Номинальный план предусматривает по 95 изделий каждой марки, что соответствует $\bar{q}' = (95, 95)$, число шаблонов $|P| = 26$. Полный перебор всех 100 допустимых программ находит программу $\bar{q}^* = (98, 98)$, дающую отход меньше номинального плана. Далее разберем причину. Из 26 перечисленных шаблонов оптимальное решение использует два (приведены в таблице 4.11). Количество прутков, раскраиваемых по каждому из шаблонов p_1 и p_2 обозначено как x_1 и x_2.

Таблица 4.11 – Шаблоны оптимального раскроя

Шаблон	**Состав**	**Занято, мм**	**Остаток, мм**	**Количество прутков**
p_1	4 × 2950	11800	200	x_1
p_2	7 × 1260 1 × 2950	11770	230	x_2

Числа 7 и 4 обусловлены вместимостью прутка. Восьмой короткий стержень в шаблон p_2 не помещается, поскольку $8 \times 1260 + 2950 = 13030$ мм превышает 12000 мм. Пятый длинный стержень не помещается в шаблон p_1, поскольку $5 \times 2950 = 14750$ мм также превышает 12000 мм. Оба шаблона заполняют пруток предельно плотно, оставляя 200 и 230 мм, поэтому оптимальное решение опирается именно на них.

Из-за того, что матрица норм расхода C диагональная, то производный спрос совпадает с производственной программой: стержней 1260 мм требуется $\mathrm{d}_1 = \mathrm{q}_1$ штук, стержней 2950 мм требуется $\mathrm{d}_2 = \mathrm{q}_2$ штук. Количество прутков x_1 и x_2 находится из условия покрытия этого спроса. Стержень 1260 мм дает только шаблон p_2 по семь штук на пруток. Стержень 2950 мм дают оба шаблона: p_1 по четыре штуки, p_2 по одной. Это можно выразить в виде системы:

$$\begin{cases} d_1 = q_1 & = 7x_2 \\ d_2 = q_2 & = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

Её решение имеет вид $x_2 = \frac{q_1}{7}$ и $x_1 = \left(q_2 - \frac{q_1}{7}\right)/4$. В отличие от задачи 1, эти величины целые не для любой производственной программы. Общее количество прутков равно сумме x_p и после приведения подобных членов составляет $\frac{3q_1}{28} + \frac{q_2}{4}$. При произвольной программе это выражение дробное, тогда как количество прутков целое, поэтому результат округляется вверх:

$$Y = \left\lceil \frac{3q_1}{28} + \frac{q_2}{4} \right\rceil.$$

Это выражение выполняется во всех 100 программах множества производственных программ Q. Подстановка оптимальной программы дает $x_2 = 14$ и $x_1 = 21$, всего 35 прутков. Такой раскрой покрывает спрос точно, без единого лишнего стержня (таблица 4.12).

Таблица 4.12 – Покрытие спроса оптимальным раскроем при $\bar{q}^* = (98, 98)$

Шаблон	**Прутков**	**Стержней 1260 мм**	**Стержней 2950 мм**	**Отход, мм**
p_1	21	0	84	4200
p_2	14	98	14	3220
Итого	35	98	98	7420
Требуется по спросу	–	98	98	–

Ниже в таблице 4.13 приведен расчет спроса каждого типа стержней, общего количества прутков и расхода материала для номинального плана $\bar{q}'$ и для оптимальной программы $\bar{q}^*$.

Таблица 4.13 – Расчет отходов при номинальном плане и в оптимуме

Величина	**Выражение**	**Номинал**	**Оптимум**
Программа выпуска	$\bar{q}$	(95, 95)	(98, 98)
Спрос на стержни 1260 мм, шт.	$d_1 = q_1$	95	98
Спрос на стержни 2950 мм, шт.	$d_2 = q_2$	95	98
Значение до округления	$\frac{3q_1}{28} + \frac{q_2}{4}$	33,93	35,00
Количество прутков, шт.	Y	34	35
Расход материала, мм	YL	408000	420000
Полезная длина, мм	$\sum_j d_j\, l_j$	399950	412580
Отход, мм	$W = YL - \sum_j d_j\, l_j$	8050	7420
Доля отходов в прокате	$W/(YL)$	1,97%	1,77%

Экономия равна $\Delta W = 630$ мм, или 7,8% отходов номинального плана. Она достигается увеличением выпуска обеих марок на три изделия, то есть примерно на 3% от номинала, что остается в пределах допуска. Решающей является строка

значения до округления. В номинале оно дробное, поэтому последний пруток остается недорезанным. В точке оптимального решения оно целое, что означает что весь материал реализуется.

Именно округление отличает эту задачу от задачи 1 и показывает полноценную работу методики. Если в предыдущей задаче количество прутков росло пропорционально выпуску, то здесь оно является постоянным на целых участках множества производственных программ Q и возрастает скачками при переходе выражения через очередное целое значение. Действие округления показано в таблице 4.14 на срезе при постоянном выпуске перемычки 2ПБ30-4.

Таблица 4.14 – Действие округления при $q_2 = 98$

q_1	95	96	97	**98**	99	100
Значение до округления	34,68	34,79	34,89	**35,00**	35,11	35,21
Y, прутков	35	35	35	**35**	36	36
W, мм	11200	9940	8680	**7420**	18160	16900

Пока значение до округления не превышает 35, каждое дополнительное изделие нарезается из уже закупленного проката, и отход убывает ровно на 1260 мм, то есть на длину короткого стержня. При $\mathrm{q}_1 = 98$ значение равно в точности 35. В этой точке округление ничего не добавляет и достигается наименьшее количество отходов. При $\mathrm{q}_1 = 99$ значение превышает 35, требуется 36-й пруток, и отход скачком возрастает на 10740 мм, то есть на длину прутка за вычетом длины требуемого нового стержня.

На рисунках 4.4–4.6 можно видеть скачкообразный характер функции количества отходов. Поскольку в задаче два типа изделий, то поверхность $\mathrm{W}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)$ изображается целиком на одном графике. На тепловой карте (рисунок 4.4) значение отхода в метрах подписано в каждой клетке, чем светлее клетка, тем меньше отход.

Сплошным квадратом отмечен номинальный план, пунктирным – точка с наименьшим количеством отходов. Чередование светлых и темных диагональных полос отвечает переходам значения до округления через целые числа. Всего функция имеет на сетке 13 локальных минимумов, одним из которых является сам номинальный план. Обе соседние программы дают больший отход, поэтому локальный спуск из номинала не делает ни одного шага. Графики зависимости отхода от выпуска каждой марки в отдельности (рисунки 4.5 и 4.6) показывают, что скачкообразная структура сохраняется и за пределами допуска.

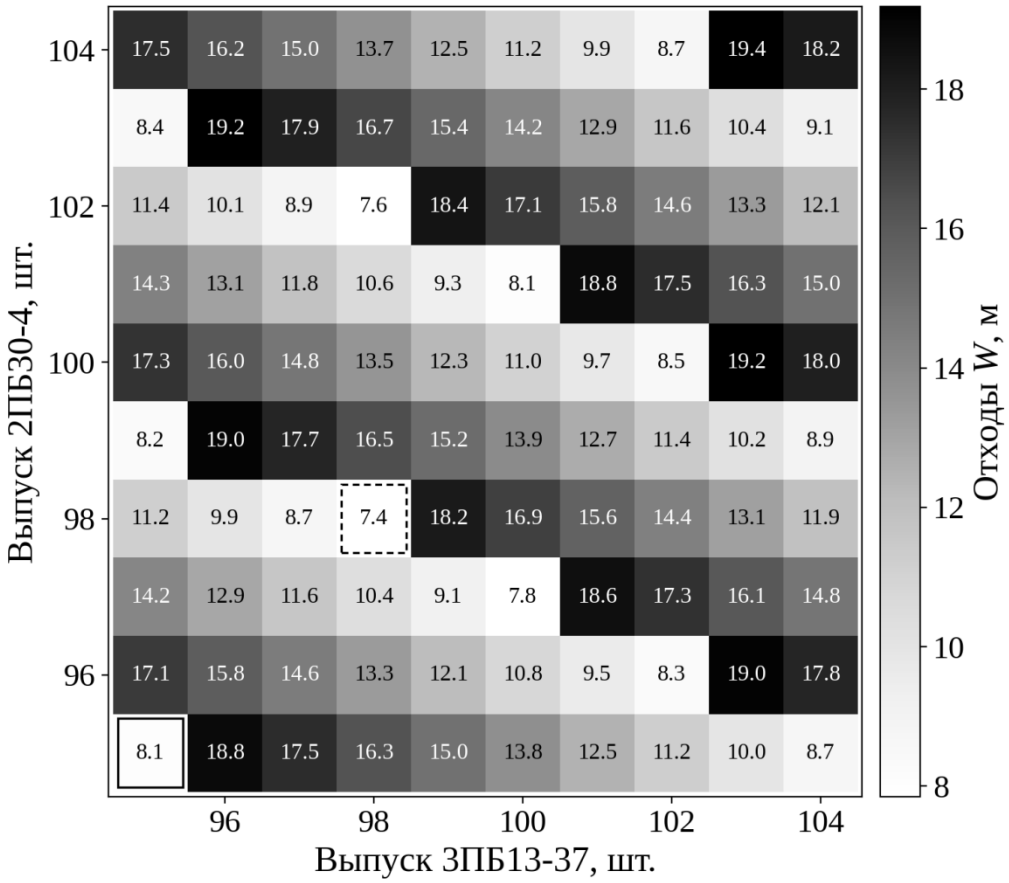


Рисунок 4.4 – Поверхность отходов W для множества всех производственных программ Q. Клетка со сплошной обводкой – номинальный план $\bar{q}' = (95, 95)$, клетка с пунктирной обводкой – оптимальный план $\bar{q}^* = (98, 98)$

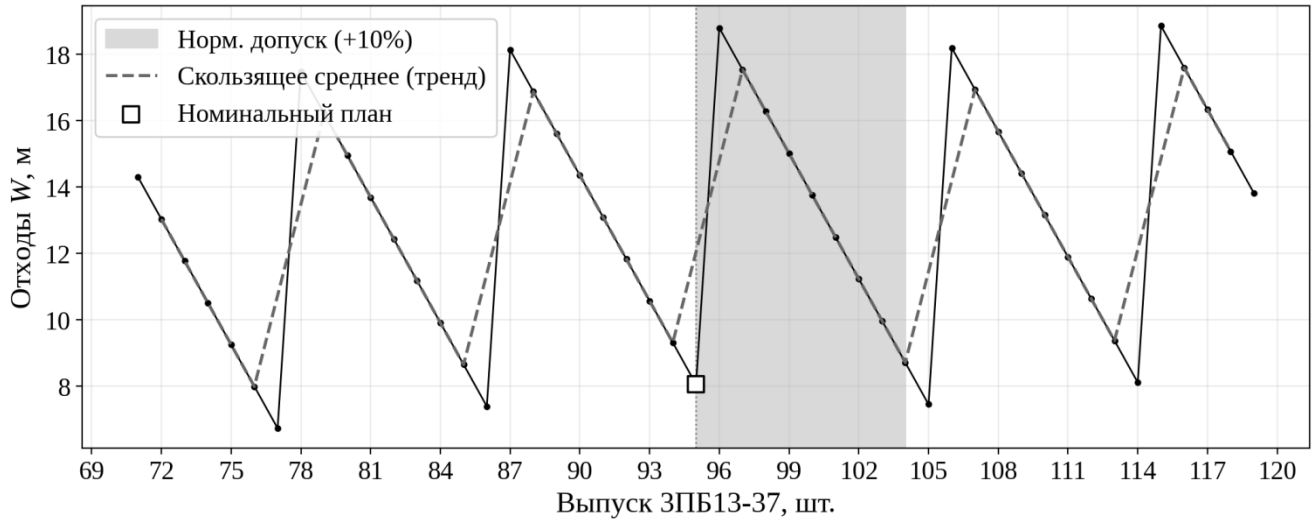


Рисунок 4.5 – График зависимости количества отходов
от выпуска изделия 1 (3ПБ13-37)

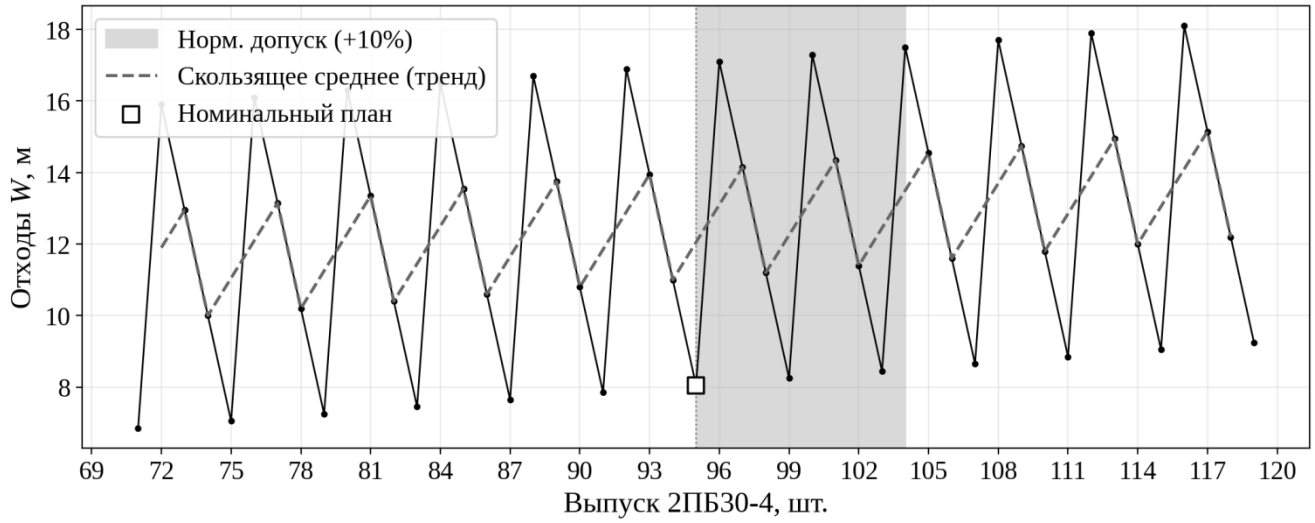


Рисунок 4.6 – График зависимости количества отходов
от выпуска изделия 2 (2ПБ30-4)

Результат решения задачи 2 показывает работу методики на задаче, где снижение отхода достижимо. Результирующая экономия составляет 7,8%, а доля отходов в израсходованном прокате снижается с 1,97 до 1,77%. Добиться этого изменением выпуска одной марки невозможно. Номинальный план сам является локальным минимумом, и улучшение дает лишь одновременное изменение выпуска обеих марок. Именно поэтому методика опирается на полный перебор допустимого множества, а не на локальное улучшение исходной программы.

Отходы по мерным длинам можно также пересчитать на основании ГОСТ 34028-2016 [38], чтобы исследовать то, как меняется доля отходов при смене длины прутка (таблица 4.15). Поскольку в данной задаче снижение отхода достижимо, то для каждой длины прутка будет своя оптимальная программа $\bar{q}^*$:

Таблица 4.15 – Отходы при разных мерных длинах проката

Длина прутка L, мм	**Оптимальная программа $\bar{q}^*$**	**Прутков Y, шт.**	**Отход W, мм**	**Доля отходов**
6000	(96, 96)	72	27840	6,44%
11700	(100, 96)	36	12000	2,85%
12000	**(98, 98)**	**35**	**7420**	**1,77%**

Наименьшая доля отходов достигается при длине прутка 12000 мм, то есть при той длине, которая была принята в задаче изначально. Замена ее на 11700 мм повышает долю отходов с 1,77 до 2,85%. Стержень 2950 мм входит в пруток 12000 мм четыре раза с остатком 200 мм, а в пруток 11700 мм только три раза, поэтому укорочение прутка отрезает здесь не только остаток, но и целый стержень. Такая постановка задачи показывает, что методика позволяет формально оценить не только выбор оптимальной производственной программы, но и выбор мерной длины материала, который даст наименьший отход при производстве.

4.4. Обсуждение результатов и оценка экономического эффекта

Две задачи дали противоположные результаты. В задаче 1 изменение производственной программы не снижает отходы ни на одной из 125 допустимых программ, в задаче 2 перебор наоборот находит программу с экономией 7,8% относительно исходной производственной программы и снижает долю отходов с 1,97 до 1,77%. Нулевой результат получен при этом на более сложной задаче, где три типа изделий против двух. Различие объясняется составом допустимых шаблонов раскроя, а не размерностью. В задаче 1 спрос делится на вместимости шаблонов нацело при любой программе, тогда как в задаче 2 деление нацело происходит лишь для некоторых программ, которые и дают экономию. Помимо

производственных программ, в обеих задачах был рассмотрен второй управляемый параметр – мерная длина прутка:

Таблица 4.16 – Доля отходов при изменении каждого из управляемых параметров

Задача	**Номинальный план (пруток 12 м)**	**После изменения программы**	**После изменения длины прутка (11,7 м)**
1 (колонны 2К42-)	13,00%	13,00%	**10,77%**
2 (перемычки)	1,97%	**1,77%**	2,85%

В каждой клетке таблицы 4.16 приведена наименьшая доля отходов, достижимая при изменении соответствующего параметра. Ни один из двух параметров не дает эффекта в обеих задачах одновременно: в задаче 1 эффект дает изменение длины прутка, в задаче 2 только нахождение производственной программы, а изменение длины там наоборот ухудшает результат. Заранее по исходным данным этого не видно, что обуславливает использование методики.

Для измерения результата используется доля отходов в израсходованном прокате $\eta(\bar{q}) = \frac{W(\bar{q})}{Y(\bar{d}(\bar{q}))\,L}$, а не относительная экономия $E = \frac{W(\bar{q}') - W(\bar{q}^*)}{W(\bar{q}')}$,, поскольку последняя зависит от выбранного номинального плана (таблица 4.17) и не показывает достоверную картинку.

Таблица 4.17 – Влияние номинального плана на результат в задаче 2

Исходная программа $\bar{q}'$	**Доля отходов для $\bar{q}'$**	**Оптимальная программа $\bar{q}^*$**	**Доля отходов для $\bar{q}^*$**	**Относительная экономия**
(95, 95)	1,97%	(98, 98)	**1,77%**	7,8%
(120, 120)	2,09%	(126, 122)	**1,77%**	13,5%
(150, 150)	2,55%	(154, 150)	**1,77%**	30,5%

Доля отходов в точке оптимального решения одинаковая во всех трех случаях, однако, относительная экономия меняется значительно от программы к программе. Это связано с тем, что доля отходов зависит от плотности компоновки стержней в шаблоне. Для данной задачи наиболее плотные шаблоны имеют остатки 200 и 230 мм, поэтому когда спрос закрывается только ими и округление

вверх не срабатывает, то отход равен сумме этих остатков и от масштаба выпуска не зависит. Из-за этого при пропорциональном изменении исходного плана производства доля отходов для оптимальной программы сохраняется. В то же время относительная экономия показывает лишь удаленность исходного плана от этого состояния и значение 7,8% на другие задачи не переносится.

Оценка экономического эффекта. Два управляемых параметра (производственная программа и мерная длина прутка) дают разные виды экономии. Изменение производственной программы сокращает отход, но не закупку: прутков требуется не меньше, чем при номинале, а в задаче 2 даже на один больше. Из практически того же объема материала выходит на шесть изделий больше, и они оплачиваются только переменными затратами (см. допущение в разделе 1.4.2). Изменение мерной длины прутка, наоборот, сокращает саму закупку: в задаче 1 замена 12000 мм на 11700 мм снижает ее на 2,5% при неизменном выпуске, то есть экономия 25 т металла на каждую 1000 т.

Неиспользуемые остатки сдаются как лом, поэтому экономия равна разности между ценой проката и ценой приема лома. При цене арматуры 62000 руб./т [109, 110] и цене лома 24000 руб./т [111] разность составляет 38000 руб./т, что дает около 950 тыс. руб. на каждую 1000 т раскраиваемого проката (цены на май 2026 года). Данный расчет предполагает одинаковую цену за тонну для обеих длин прутка (12 м и 11,7 м), поскольку обе входят в номенклатуру поставщиков и надбавка за длину в прайс-листах не указана. Сокращение отходов имеет также ресурсосберегающее значение, поскольку переплав обрезков не создает новой продукции и требует ресурсов в виде электроэнергии.

Результат применения методики. И хотя методика не гарантирует экономию для каждой задачи, она позволяет сделать обоснованное заключение о том, что снижение недостижимо, с указанием причины. В таком случае методика служит инструментом для оценки лицом, принимающим решение, возможно ли снижение расхода материала в пределах нормативного допуска в принципе, какова его величина и каким параметром оно создается. В комплексе это служит

ценным инструментом для системы поддержки и принятия решения, поскольку исключает интуитивное предположение и позволяет оценить производственную программу объективно.

4.5. Выводы по четвертой главе

Методика проверена на двух задачах раскроя арматуры по типовым сериям 1.423.1-3/88 [39] и 1.038.1-1 [40]. Для расчетов был разработан и зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ (свидетельство № 2026615676, приложение В) программный комплекс на языке программирования Python. Было показано решение двух задач с разными железобетонными изделиями: колоннами и перемычками. В задаче с перемычками найдена программа, снижающая долю отходов с 1,97 до 1,77% при увеличении выпуска на 3% от номинала, тогда как в задаче с колоннами снижения нет ни на одной из 125 программ, поскольку спрос делится нацело на вместимости используемых шаблонов раскроя.

Важным научным результатом является то, что даже когда производственную программу нельзя изменить так, чтобы уменьшить отход, методика позволяет оценить использование альтернативных мерных длин материала. Для арматурных прутков существует несколько мерных длин по ГОСТ 34028-2016 [38] и для производства ЖБИ можно использовать прутки разной длины из числа доступных. Поэтому методика позволяет сравнить не только несколько производственных программ, но и раскрой при разных мерных длинах прутка и количественно оценить отходы для каждого варианта. Так, для колонн переход на длину 11700 мм снижает долю отходов с 13,00 до 10,77%.

Таким образом, экономия не гарантируется для каждой задачи, но обоснованное заключение методика дает всегда, что и делает ее инструментом поддержки принятия решений. Специфика арматуры и бетона при этом не используется, поэтому проверка методики на задачах раскроя мерного проката в других отраслях составляет направление дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена научная задача выбора производственной программы выпуска изделий по критерию минимума отходов линейного раскроя длинномерных материалов. На этой основе разработана методика поиска такой программы в пределах допуска на перевыполнение плана. На основании результатов работы можно сделать следующие выводы:

1. Проведен анализ существующих подходов к минимизации отходов линейного раскроя. Во всех рассмотренных подходах производственная программа задается извне или оптимизируется вместе с планом раскроя по стоимости, а зависимость отходов от самой программы не исследуется;
2. Установлена связь между конструкторской документацией и формальной постановкой задачи. Её задает матрица норм расхода, которая ставит производственной программе в соответствие потребность в отрезках каждой длины;
3. Поставлена задача выбора производственной программы по критерию минимума отходов линейного раскроя. Программа выбирается на конечном множестве производственных программ, которое обусловлено допуском на перевыполнение плана;
4. Разработана методика поиска оптимальной производственной программы. Она реализована в виде программного комплекса, который зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ;
5. Методика проверена на двух задачах раскроя арматуры для ЖБИ на основе типовых серий. В задаче с перемычками найдена программа, которая снижает долю отходов с 1,97 до 1,77% при увеличении выпуска на 3% от номинального плана. В задаче с колоннами снизить отход не удается ни для одной допустимой программы, и методика обоснованно показывает это;
6. Показано, что если производственная программа отход не снижает, то методика позволяет сравнить варианты мерной длины проката. Для колонн переход с 12000 на 11700 мм снижает долю отходов с 13,00 до 10,77%;

7. Дана оценка экономического эффекта. Остатки сдаются как лом, поэтому экономия равна разности между ценой проката и ценой приема лома. При цене арматуры 62000 руб./т и цене лома 24000 руб./т разность составляет 38000 руб./т. Переход с прутка 12000 мм на 11700 мм сокращает закупку на 2,5%, то есть на 25 т с каждой 1000 т, что дает около 950 тыс. руб.

Практическая ценность работы подтверждена актами о внедрении. Методика позволяет снизить отход раскроя без изменения технологии производства за счет выбора альтернативной производственной программы в пределах действующего допуска на перевыполнение плана или выбора мерной длины проката. Методика непосредственно не зависит от специфики производства железобетонных изделий, поэтому она применима и к раскрою длинномерных материалов в других отраслях. Проверка на таких задачах, а также сокращение перебора при большом числе типов изделий составляют направление дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рынок строительной арматуры в России в 2022–2025 гг.: спрос, цены, регулирование. – URL: https://www.megaresearch.ru/new_reality/kak-menyaetsya-rynok-stroitelnoy-armatury-v-rossii-analiz-situacii-v-2022-2025-gg (дата обращения: 31.05.2026). – Текст : электронный.

2. РДС 82-202-96. Правила разработки и применения нормативов трудноустранимых потерь и отходов материалов в строительстве. – 1997.

3. Kwon, K. Cutting Waste Minimization of Rebar for Sustainable Structural Work: A Systematic Literature Review / K. Kwon, D. Kim, S. Kim // Sustainability. – 2021. – Т. 13. – № 11. – С. 5929.

4. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – Москва : Мир, 1974. – 513 с.

5. Gilmore, P. C. A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem / P. C. Gilmore, R. E. Gomory // Operations Research. – 1961. – Т. 9. – № 6. – С. 849-859.

6. Gilmore, P. C. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem—Part II / P. C. Gilmore, R. E. Gomory // Operations Research. – 1963. – Т. 11. – № 6. – С. 863-888.

7. Канторович, Л. В. Математические методы организации и планирования производства / Л. В. Канторович. – Санкт-Петербург : Издательский дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. – 96 с.

8. Данциг, Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Б. Данциг. – Москва : Прогресс, 1966. – 600 с.

9. Gomory, R. E. Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs / R. E. Gomory // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1958. – Т. 64. – № 5. – С. 275-278.

10. Land, A. H. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems / A. H. Land, A. G. Doig // Econometrica. – 1960. – Т. 28. – № 3. – С. 497-520.

11. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Т. 1 / Г. Вагнер. – Москва : Мир, 1972. – 336 с.

12. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – 7-е издание. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2007. – 912 с.

13. Degraeve, Z. Optimal integer solutions to industrial cutting stock problems / Z. Degraeve, L. Schrage // INFORMS Journal on Computing. – 1999. – Т. 11. – № 4. – С. 406-419.

14. Khamis, N. Minimizing Waste and Costs in Multi-Level Manufacturing: A Novel Integrated Lot Sizing and Cutting Stock Model Using Multiple Machines / N. Khamis, N. Harraz, H. Fors // Modelling. – 2025. – Т. 6. – № 3. – С. 56.

15. Alem, D. J. On the cutting stock problem under stochastic demand / D. J. Alem, P. A. Munari, M. N. Arenales, P. A. V. Ferreira // Annals of Operations Research. – 2010. – Т. 179. – № 1. – С. 169-186.

16. Benjaoran, V. Effect of demand variations on steel bars cutting loss / V. Benjaoran, N. Sooksil, M. Metham // International Journal of Construction Management. – 2019. – Т. 19. – № 2. – С. 137-148.

17. Luo, Y. L. Packing by Scheduling: Using Constraint Programming to Solve a Complex 2D Cutting Stock Problem / Y. L. Luo, J. C. Beck. – Текст : электронный // Integration of Constraint Programming, Artificial Intelligence, and Operations Research : Lecture Notes in Computer Science / ред. P. Schaus. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – Т. 13292. – С. 249-265.

18. Blair, C. E. The value function of an integer program / C. E. Blair, R. G. Jeroslow // Mathematical Programming. – 1982. – Т. 23. – № 1. – С. 237-273.

19. Wäscher, G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wäscher, H. Haußner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 2007. – Т. 183. – № 3. – С. 1109-1130.

20. Dyckhoff, H. A typology of cutting and packing problems / H. Dyckhoff // European Journal of Operational Research. – 1990. – Т. 44. – № 2. – С. 145-159.

21. Delorme, M. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms / M. Delorme, M. Iori, S. Martello // European Journal of Operational Research. – 2016. – Т. 255. – № 1. – С. 1-20.

22. Martello, S. Knapsack problems: algorithms and computer implementations / S. Martello, P. Toth. – Chichester : John Wiley & Sons, Inc., 1990. – 296 с.

23. Kellerer, H. Knapsack Problems / H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2004.

24. Lübbecke, M. E. Selected Topics in Column Generation / M. E. Lübbecke, J. Desrosiers // Operations Research. – 2005. – Т. 53. – № 6. – С. 1007-1023.

25. Bellman, R. Dynamic Programming / R. Bellman. – Princeton : Princeton University Press, 1957.

26. Wolsey, L. A. Integer and Combinatorial Optimization / L. A. Wolsey, G. L. Nemhauser. – New York : John Wiley & Sons, Inc., 1999. – 784 с.

27. Barnhart, C. Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs / C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser и др. // Operations Research. – 1998. – Т. 46. – № 3. – С. 316-329.

28. Nadoushani, Z. S. Minimizing Cutting Wastes of Reinforcing Steel Bars Through Optimizing Lap Splicing within Reinforced Concrete Elements / Z. S. Nadoushani, A. Hammad, J. Xiao, A. Akbarnezhad // Construction and Building Materials. – 2018. – Т. 185. – С. 600-608.

29. Zheng, C. Integrated optimization of rebar detailing design and installation planning for waste reduction and productivity improvement / C. Zheng, C. Yi, M. Lu // Automation in Construction. – 2019. – Т. 101. – С. 32-47.

30. Xiao, H. A method for demand-accurate one-dimensional cutting problems with pattern reduction / H. Xiao, Q. Liang, D. Zhang и др. // Mathematical Biosciences and Engineering. – 2023. – Т. 20. – № 4. – С. 7453-7486.

31. Jariyavajee, C. Efficient cutting stock optimization strategies for the steel industry / C. Jariyavajee, S. Fairee, C. Khompatraporn и др. // PLOS ONE. – 2025. – Т. 20. – № 3. – С. e0319644.

32. Stadtler, H. A one-dimensional cutting stock problem in the aluminium industry and its solution / H. Stadtler // European Journal of Operational Research. – 1990. – Т. 44. – № 2. – С. 209-223.

33. Валиахметова, Ю. И. Применение систем автоматизированного проектирования карт раскроя в судостроении / Ю. И. Валиахметова, С. В. Телицкий // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2012. – Т. 8. – № 6. – С. 38-43.

34. Trkman, P. One-dimensional cutting stock optimization in consecutive time periods / P. Trkman, M. Gradisar // European Journal of Operational Research. – 2007. – Т. 179. – № 2. – С. 291-301.

35. Cherri, A. C. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover – A heuristic approach / A. C. Cherri, M. N. Arenales, H. H. Yanasse // European Journal of Operational Research. – 2009. – Т. 196. – № 3. – С. 897-908.

36. Umetani, S. One-dimensional cutting stock problem to minimize the number of different patterns / S. Umetani, M. Yagiura, T. Ibaraki // European Journal of Operational Research. – 2003. – Т. 146. – № 2. – С. 388-402.

37. Белецкий, Б. Ф. Технология и механизация строительного производства / Б. Ф. Белецкий. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2004. – 751 с.

38. ГОСТ 34028-2016. Прокат арматурный для железобетонных конструкций. Технические условия. – 2016.

39. ГПИ Промстройпроект. Серия 1.423.1-3/88. Колонны железобетонные прямоугольного сечения для одноэтажных производственных зданий высотой до 9,6 м без мостовых опорных кранов / ГПИ Промстройпроект, НИИЖБ. – Москва : ЦИТП Госстроя СССР, 1989.

40. НИИЖБ Госстроя СССР. Серия 1.038.1-1. Перемычки железобетонные для зданий с кирпичными стенами. Выпуск 1. Перемычки брусковые для жилых и общественных зданий. Рабочие чертежи / НИИЖБ Госстроя СССР, ЦНИИЭП жилища. – Москва : ЦИТП Госстроя СССР, 1985.

41. ГОСТ 6727-80. Проволока из низкоуглеродистой стали холоднотянутая для армирования железобетонных конструкций. Технические условия. – 1980.

42. Brezina, I. Optimization of Cutting Large Amounts of Dense Material / I. Brezina, J. Kultan, J. Pekár // TEM Journal. – 2024. – Т. 13. – № 1. – С. 26-35.

43. Bertsimas, D. Introduction to Linear Optimization / D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis. – Belmont, MA : Athena Scientific, 1997. – 608 с.

44. Gomory, R. E. Some polyhedra related to combinatorial problems / R. E. Gomory // Linear Algebra and its Applications. – 1969. – Т. 2. – № 4. – С. 451-558.

45. Nocedal, J. Numerical Optimization : Springer Series in Operations Research and Financial Engineering / J. Nocedal, S. J. Wright. – New York : Springer, 2006. – 664 с.

46. Иванов, А. В. Оптимизация производственной программы для снижения отходов при линейном раскрое / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2026. – № 6. – С. 146-149.

47. Garey, M. R. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson. – San Francisco : W. H. Freeman, 1979. – 338 с.

48. Левитин, А. В. Алгоритмы. Введение в разработку и анализ / А. В. Левитин. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 576 с.

49. Сивакова, Т. В. Исследование методов решения задач смешанного целочисленного линейного программирования / Т. В. Сивакова, В. А. Судаков, В. С. Шимко // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2024. – № 24. – С. 1-18.

50. Fisher, M. L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems / M. L. Fisher // Management Science. – 1981. – Т. 27. – № 1. – С. 1-18.

51. Баркетов, М. С. Нижние границы целевой функции в задаче назначения поездов на временные интервалы / М. С. Баркетов, Х. Копфер, Е. Пеш // Информатика. – 2016. – № 2. – С. 22-29.

52. Hooker, J. N. Integer Programming: Lagrangian Relaxation / J. N. Hooker. – Текст : электронный // Encyclopedia of Optimization / ред. C. A. Floudas, P. M. Pardalos. – Boston, MA : Springer, 2009. – С. 1667-1673.

53. Afraimovich, L. G. A heuristic method for solving integer-valued decompositional multiindex problems / L. G. Afraimovich // Automation and Remote Control. – 2014. – Т. 75. – № 8. – С. 1357-1368.

54. Tang, Y. Reinforcement Learning for Integer Programming: Learning to Cut / Y. Tang, S. Agrawal, Y. Faenza // Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning. – PMLR, 2020. – С. 9367-9376.

55. Bengio, Y. Machine learning for combinatorial optimization: A methodological tour d'horizon / Y. Bengio, A. Lodi, A. Prouvost // European Journal of Operational Research. – 2021. – Т. 290. – № 2. – С. 405-421.

56. Трушков, А. С. Метод отсекающих плоскостей Гомори / А. С. Трушков // Актуальные вопросы современной информатики : материалы VII всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. – Коломна : Государственный социально-гуманитарный университет, 2017. – С. 101-107.

57. Фомин, А. Л. Программная модель параллельной реализации метода ветвей и границ / А. Л. Фомин // International Journal of Open Information Technologies. – 2015. – Т. 3. – № 11. – С. 10-15.

58. Gendron, B. Parallel Branch-and-Bound Algorithms: Survey and Synthesis / B. Gendron, T. G. Crainic // Operations Research. – 1994. – Т. 42. – № 6. – С. 1042-1066.

59. Marchand, H. Cutting planes in integer and mixed integer programming / H. Marchand, A. Martin, R. Weismantel, L. A. Wolsey // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – Т. 123. – № 1-3. – С. 397-446.

60. Иванов, А. В. Алгоритм решения задач целочисленного программирования с применением итеративного округления координат / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – № 7. – С. 149-152.

61. Иванов, А. В. Поиск решения задачи целочисленного программирования с помощью итеративного округления координат / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Программные продукты и системы. – 2023. – Т. 36. – № 4. – С. 539-550.

62. Иванов, А. В. Использование метода покоординатного спуска для поиска решения задачи целочисленного программирования / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2023. – № 1(17). – С. 53-62.

63. Иванов, А. В. Поиск кратчайшего пути до целочисленной точки внутри области допустимых решений / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Образование в XXI

веке: проблемы и перспективы: сборник статей XV Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2023. – С. 56-60.

64. Иванов, А. В. Определение направления движения при поиске целочисленного решения методом итеративного округления / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании: сборник статей XIV Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2024. – С. 60-64.

65. Матвеев, Ю. Н. Программа для поиска целочисленного решения двухмерной задачи оптимизации с применением итеративного округления координат : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023682978 / Ю. Н. Матвеев, А. В. Иванов. – 2023.

66. Forrest, J. CBC User Guide / J. Forrest, R. Lougee-Heimer // Emerging Theory, Methods, and Applications. – Catonsville, MD : INFORMS, 2005. – С. 257-277.

67. Blum, C. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison / C. Blum, A. Roli // ACM Computing Surveys. – 2003. – Т. 35. – № 3. – С. 268-308.

68. Applegate, D. L. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study / D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, W. J. Cook. – Princeton, NJ : Princeton University Press, 2006.

69. Dorigo, M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem / M. Dorigo, L. M. Gambardella // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 1997. – Т. 1. – № 1. – С. 53-66.

70. Иванов, А. В. Современные программные средства решения задач целочисленного линейного программирования / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Информационные ресурсы и системы в экономике, науке и образовании: сборник статей XI Международной научно-практической конференции. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2021. – С. 59-63.

71. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio. – URL: https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio (дата обращения: 15.05.2026). – Текст : электронный.

72. Gurobi Optimizer. – URL: https://www.gurobi.com/solutions/gurobi-optimizer/ (дата обращения: 15.05.2026). – Текст : электронный.

73. Makhorin, A. GNU Linear Programming Kit (GLPK) / A. Makhorin. – 2020.

74. lp_solve reference guide. – URL: http://web.mit.edu/lpsolve/doc/ (дата обращения: 15.05.2026). – Текст : электронный.

75. Musunuru, K. Understanding Systems of Linear Equations and Programming through lpSolve and R Language / K. Musunuru. – ResearchGate, 2014.

76. Achterberg, T. SCIP: solving constraint integer programs / T. Achterberg // Mathematical Programming Computation. – 2009. – Т. 1. – № 1. – С. 1-41.

77. Bestuzheva, K. Enabling Research through the SCIP Optimization Suite 8.0 / K. Bestuzheva, M. Besançon, W.-K. Chen и др. // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2023. – Т. 49. – № 2. – С. 1-21.

78. Perron, L. Google OR-Tools / L. Perron, V. Furnon. – Google, 2024.

79. OR-Tools. – URL: https://developers.google.com/optimization (дата обращения: 15.05.2026). – Текст : электронный.

80. Stroustrup, B. The C++ Programming Language / B. Stroustrup. – 4th. – Upper Saddle River, NJ : Addison-Wesley, 2013.

81. Gosling, J. The Java Language Specification / J. Gosling, B. Joy, G. Steele, и др. – SE 8. – Upper Saddle River, NJ : Addison-Wesley, 2015.

82. Van Rossum, G. Python 3 Reference Manual / G. Van Rossum, F. L. Drake. – Scotts Valley, CA : CreateSpace, 2009.

83. Федоров, Д. Ю. Программирование на Python : учебное пособие для среднего профессионального образования / Д. Ю. Федоров. – 6-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2024. – 187 с.

84. The Apache Software Foundation. Apache License, Version 2.0. – URL: https://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0.html (дата обращения: 15.05.2026). – Текст : электронный.

85. Marcotte, O. The cutting stock problem and integer rounding / O. Marcotte // Mathematical Programming. – 1985. – Т. 33. – С. 82-92.

86. Ibarra, O. H. Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subset Problems / O. H. Ibarra, C. E. Kim // Journal of the ACM. – 1975. – Т. 22. – № 4. – С. 463-468.

87. Andonov, R. Unbounded knapsack problem: Dynamic programming revisited / R. Andonov, V. Poirriez, S. Rajopadhye // European Journal of Operational Research. – 2000. – Т. 123. – № 2. – С. 394-407.

88. Merle, O. du. Stabilized column generation / O. du Merle, D. Villeneuve, J. Desrosiers, P. Hansen // Discrete Mathematics. – 1999. – Т. 194. – № 1-3. – С. 229-237.

89. Новиков, А. М. Методология / А. М. Новиков, Д. А. Новиков. – Москва : СИНТЕГ, 2007. – 668 с.

90. ГОСТ 19781-90. Обеспечение систем обработки информации программное. Термины и определения. – 1990.

91. Scheithauer, G. The modified integer round-up property of the one-dimensional cutting stock problem / G. Scheithauer, J. Terno // European Journal of Operational Research. – 1995. – Т. 84. – № 3. – С. 562-571.

92. Scheithauer, G. Numerical Experiments to the Modified Integer Round-Up Property of the One-dimensional Cutting Stock Problem / G. Scheithauer, J. Terno // Operations Research ’93. – Heidelberg : Physica-Verlag, 1994. – С. 449-451.

93. Wright, S. J. Coordinate descent algorithms / S. J. Wright // Mathematical Programming. – 2015. – Т. 151. – № 1. – С. 3-34.

94. Золотарев, А. А. Оптимизация распределительных процессов на основе аналитических методов и эвристических алгоритмов / А. А. Золотарев, Н. Н. Венцов, О. И. Агибалов, А. С. Деева // Вестник науки и образования Северо-Запада России. – 2016. – Т. 2. – № 1. – С. 74-82.

95. Чугунов, Е. С. Эвристический метод решения многопродуктовой задачи управления запасами / Е. С. Чугунов, В. В. Захаров // Информационно-управляющие системы. – 2015. – № 6 (79). – С. 105-111.

96. Иванов, А. В. Планирование и оптимизация линейного раскроя металлопроката методами целочисленного программирования / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2026. – № 3(31). – С. 102-110.

97. Foster, I. Designing and Building Parallel Programs / I. Foster. – Reading, MA : Addison-Wesley, 1995.

98. Bezanson, J. Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing / J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, V. B. Shah // SIAM Review. – 2017. – Т. 59. – № 1. – С. 65-98.

99. The Julia Programming Language. – URL: https://julialang.org/ (дата обращения: 13.05.2026). – Текст : электронный.

100. The MathWorks Inc. MATLAB, version R2024b / The MathWorks Inc. – Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2024.

101. Aycock, J. A brief history of just-in-time / J. Aycock // ACM Computing Surveys. – 2003. – Т. 35. – № 2. – С. 97-113.

102. Mitchell, S. PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python / S. Mitchell, M. O'Sullivan, I. Dunning. – Auckland : The University of Auckland, 2011.

103. Hart, W. E. Pyomo – Optimization Modeling in Python / W. E. Hart, C. Laird, J.-P. Watson, D. L. Woodruff. – New York : Springer US, 2012.

104. Fourer, R. AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming / R. Fourer, D. M. Gay, B. W. Kernighan. – 2nd. – Pacific Grove, CA : Duxbury Press, 2003.

105. GAMS Development Corporation. GAMS – General Algebraic Modeling System / GAMS Development Corporation. – Washington, DC : GAMS Development Corporation, 2024.

106. Hunter, J. D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment / J. D. Hunter // Computing in Science & Engineering. – 2007. – Т. 9. – № 3. – С. 90-95.

107. Иванов, А. В. Программа для планирования оптимального линейного раскроя металлопроката : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2026615676 / А. В. Иванов, Ю. Н. Матвеев. – 2026.

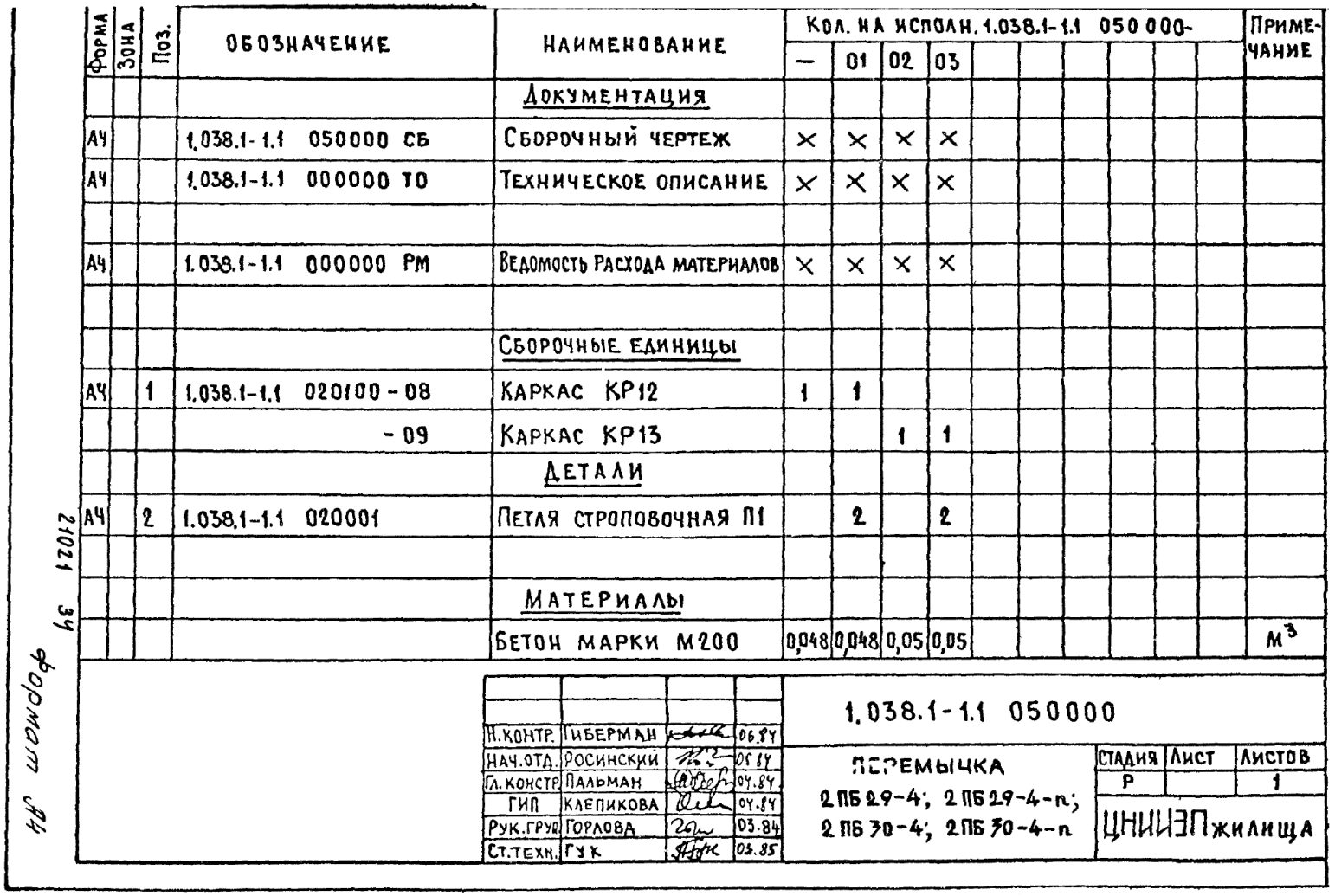
108. ГОСТ 5781-82. Сталь горячекатаная для армирования железобетонных конструкций. Технические условия. – 1982.

109. Динамика цен на арматуру А500С за последние полгода. – URL: https://www.mcena.ru/metalloprokat/armatura/a500s-gost-r-52544_dinamica (дата обращения: 05.05.2026). – Текст : электронный.

110. Арматура рифленая А500С диаметром 18 мм, длина 11,7 м: цена за тонну. – URL: https://cstg.ru/catalog/armaturny_prokat/armatura_katanka/armatura_riflenaya_a3/92860/ (дата обращения: 27.05.2026). – Текст : электронный.

111. Цены на лом черных металлов по типам, руб./т. – URL: https://www.metaltorg.ru/cources/scrap/ (дата обращения: 28.05.2026). – Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Копии листов типовых серий



Форма	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол. на испол. 1.038.1-1.1 050 000- —	01	02	03	Примечание
				Документация					
А4			1.038.1-1.1 050000 СБ	Сборочный чертеж	×	×	×	×	
А4			1.038.1-1.1 000000 ТО	Техническое описание	×	×	×	×	
А4			1.038.1-1.1 000000 РМ	Ведомость расхода материалов	×	×	×	×	
				Сборочные единицы					
А4		1	1.038.1-1.1 020100-08	Каркас КР12	1	1			
			-09	Каркас КР13			1	1	
				Детали					
А4		2	1.038.1-1.1 020001	Петля строповочная П1		2		2	
				Материалы					
				Бетон марки М200	0,048	0,048	0,05	0,05	м³

Н.контр.	Гиберман		06.84
Нач.отд.	Росинский		06.84
Гл.констр.	Пальман		04.84
ГИП	Клепикова		04.84
Рук.груп.	Горлова		03.84
Ст.техн.	Гук		03.85

1.038.1-1.1 050000

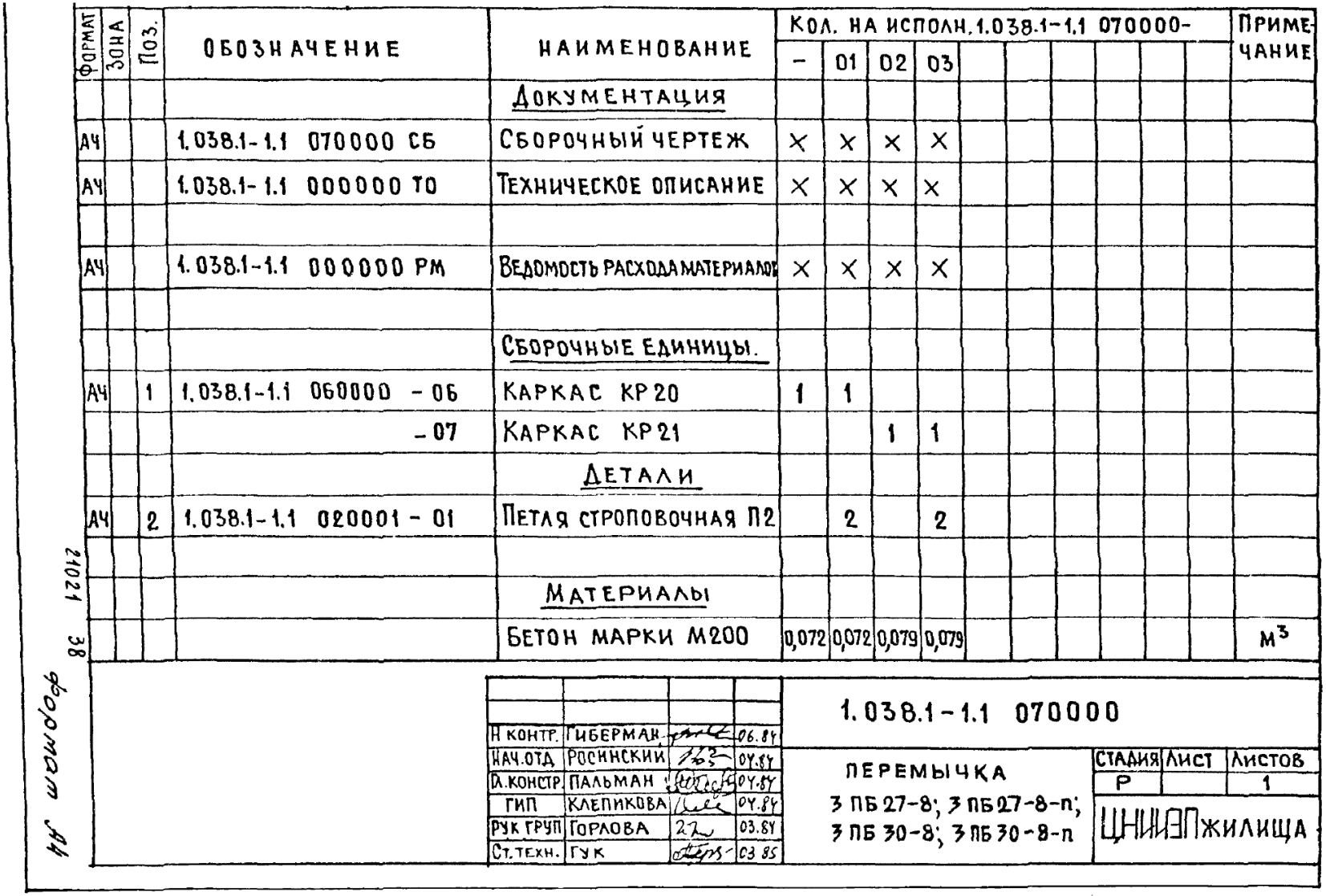
Перемычка 2ПБ29-4; 2ПБ29-4-п; 2ПБ30-4; 2ПБ30-4-п

Стадия	Лист	Листов
Р		1

ЦНИИЭПжилища

Формат А4 21021 34

Рисунок А.1 – Лист 34 серии 1.038.1-1. Спецификация перемычек 2ПБ29-4 и 2ПБ30-4 с указанием марок каркасов КР12 и КР13



Формат	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол. на исполн. 1.038.1-1.1 070000-										Примечание
					–	01	02	03							
				Документация											
А4			1.038.1-1.1 070000 СБ	Сборочный чертеж	×	×	×	×							
А4			1.038.1-1.1 000000 ТО	Техническое описание	×	×	×	×							
А4			1.038.1-1.1 000000 РМ	Ведомость расхода материалов	×	×	×	×							
				Сборочные единицы.											
А4		1	1.038.1-1.1 060000 – 06	Каркас КР20	1	1									
			– 07	Каркас КР21			1	1							
				Детали											
А4		2	1.038.1-1.1 020001 – 01	Петля строповочная П2		2		2							
				Материалы											
				Бетон марки М200	0,072	0,072	0,079	0,079							м³

Инв. № подл. | 21021 38

Н. контр.	Гиберман		06.84
Нач. отд.	Росинский		04.84
Гл. констр.	Пальман		04.84
ГИП	Клепикова		04.84
Рук. груп.	Горлова		03.84
Ст. техн.	Гук		03.85

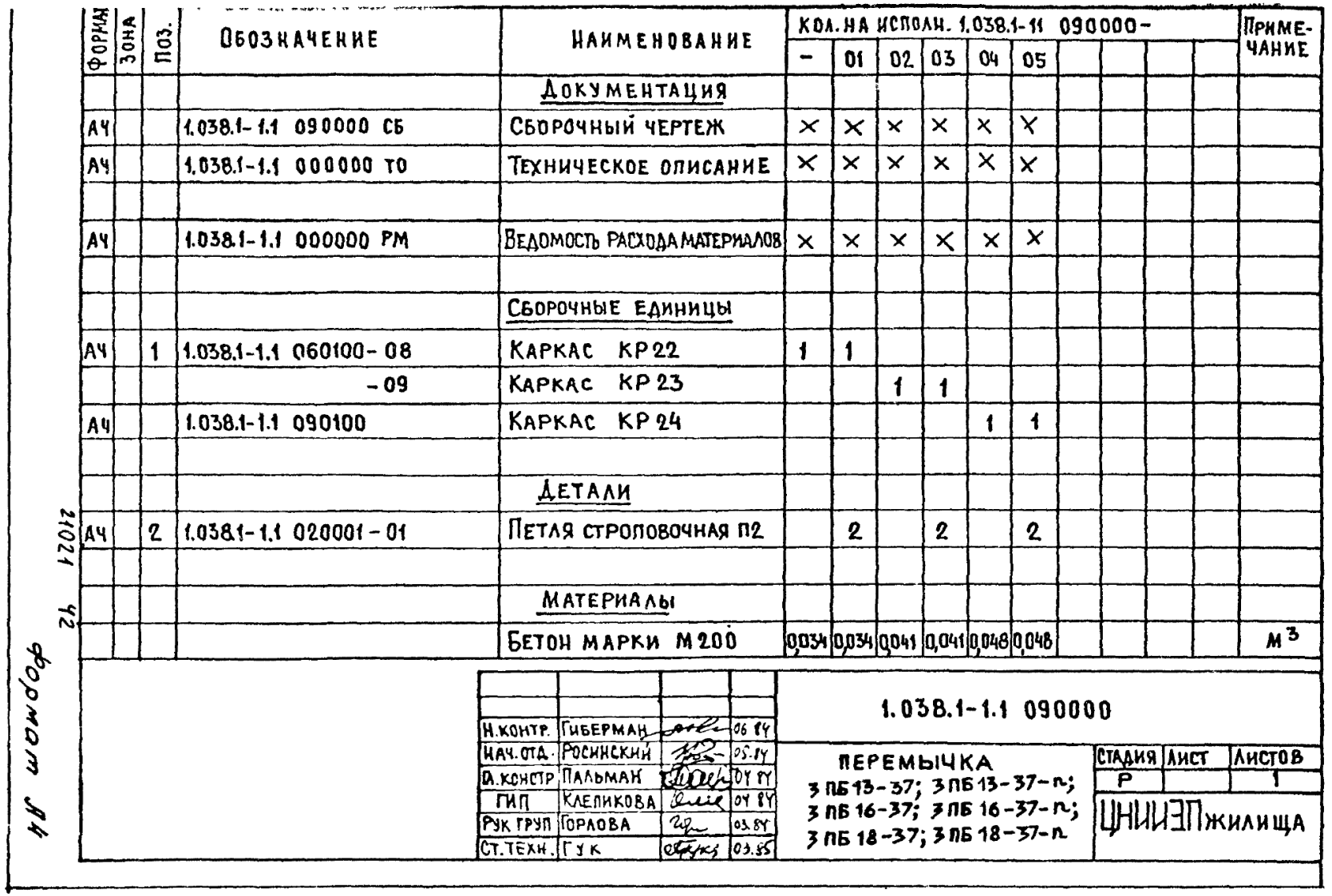
1.038.1-1.1 070000

Перемычка
3ПБ27-8; 3ПБ27-8-п;
3ПБ30-8; 3ПБ30-8-п

Стадия	Лист	Листов
Р		1

ЦНИИЭПжилища

Рисунок А.2 – Лист 38 серии 1.038.1-1. Спецификация перемычек 3ПБ27-8 и 3ПБ30-8 с указанием марок каркасов КР20 и КР21



Формат	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол. на испол. 1.038.1-11 090000-										Примечание
					–	01	02	03	04	05					
				Документация											
А4			1.038.1-1.1 090000 СБ	Сборочный чертеж	×	×	×	×	×	×					
А4			1.038.1-1.1 000000 ТО	Техническое описание	×	×	×	×	×	×					
А4			1.038.1-1.1 000000 РМ	Ведомость расхода материалов	×	×	×	×	×	×					
				Сборочные единицы											
А4		1	1.038.1-1.1 060100-08	Каркас КР22	1	1									
			-09	Каркас КР23			1	1							
А4			1.038.1-1.1 090100	Каркас КР24					1	1					
				Детали											
А4		2	1.038.1-1.1 020001-01	Петля строповочная П2		2		2		2					
				Материалы											
				Бетон марки М200	0,034	0,034	0,041	0,041	0,048	0,048					м³

Н.контр.	Гиберман		06.84
Нач.отд.	Росинский		05.84
Гл.констр	Пальман		04.84
ГИП	Клепикова		04.84
Рук.груп	Горлова		03.84
Ст.техн.	Гук		03.85

1.038.1-1.1 090000

Перемычка
3ПБ13-37; 3ПБ13-37-п;
3ПБ16-37; 3ПБ16-37-п;
3ПБ18-37; 3ПБ18-37-п

Стадия	Лист	Листов
Р		1

ЦНИИЭПжилища

Инв.№ подл. | Подпись и дата | Взам.инв.№ 21021 42

Рисунок А.3 – Лист 42 серии 1.038.1-1. Спецификация перемычек 3ПБ13, 3ПБ16, 3ПБ18 с указанием марки каркасов КР22…КР24

Рис.1

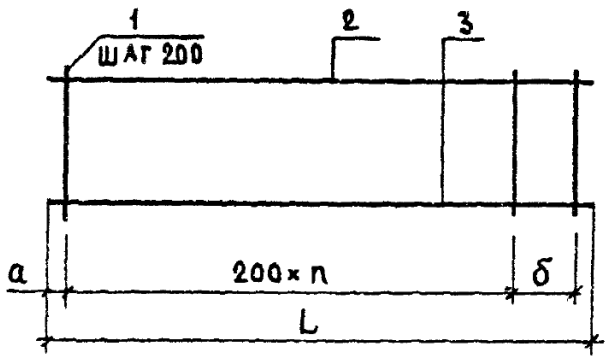
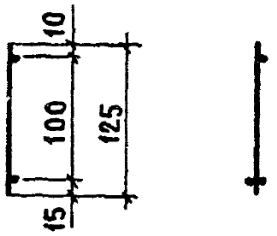


Рис.2
ОСТАЛЬНОЕ - СМ. РИС.1



ОБОЗНАЧЕНИЕ	МАРКА	Рис.	L, мм	a, мм	б, мм	n	МАССА, кг
1.038.1-1.1 020100	КР 4	1	1000	25	150	4	0,24
-01	КР 5	1	1260	30	0	6	0,31
-02	КР 6	1	1520	20	80	7	0,53
-03	КР 7	1	1650	25	0	8	0,57
-04	КР 8	2	1910	20	70	9	0,85
-05	КР 9	1	2170	35	100	10	1,18
-06	КР10	1	2430	15	0	12	1,85
-07	КР11	2	2560	30	100	12	2,4
-08	КР12	1	2820	20	180	13	3,06
-09	КР13	1	2950	25	100	14	3,19

Н КОНТР	ГИБЕРМАН		01.87
НАЧ ОТД	РОСИНСКИЙ		01.87
ГА КОНСТР	ПАЛЬМАН		04.87
ГИП	КЛЕЛИКОВА		01.87
РУК.ГРУП.	ГОРЛОВА		04.87

1.0381-1.1 020100 СБ

КАРКАС
КР4 КР13
СБОРОЧНЫЙ ЧЕРТЕЖ

СТАДИЯ	МАССА	МАСШТАБ
Р	СМ. ТАБЛ.	—
ЛИСТ	ЛИСТОВ 1	

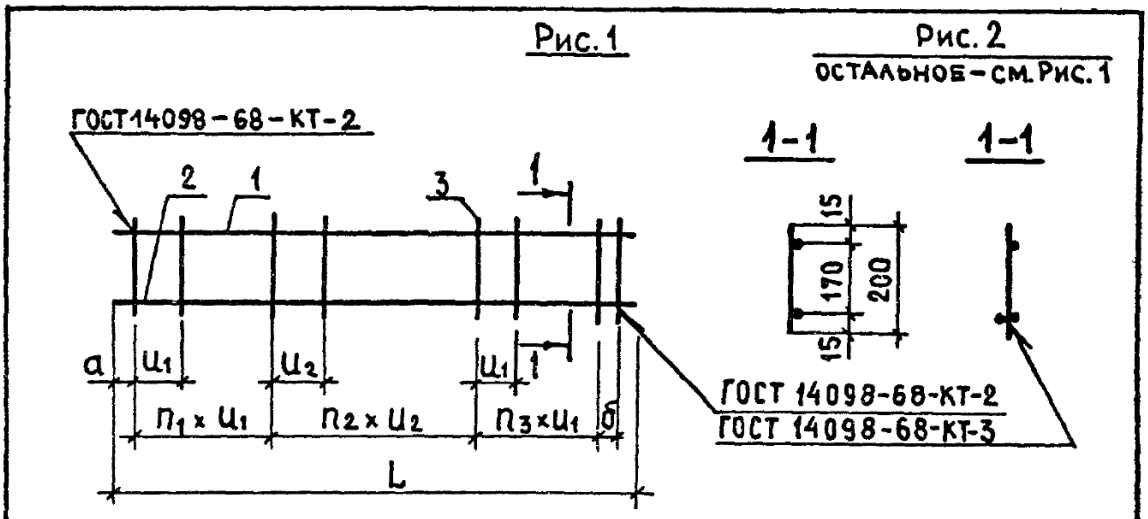
ЦНИИЭП жилища

21021 70.

Формат А4

Рисунок А.4 – Лист 70 серии 1.038.1-1.

Сборочный чертеж каркасов КР4…КР13 с таблицей размеров



Обозначение	Марка	Рис.	L, мм	a, мм	δ, мм	U1, мм	U2, мм	n1	n2	n3	Масса, кг
1.038.1-1.1 060100	КР14	1	3340	20	100	200	0	16	0	0	2,73
-01	КР15	1	3600	25	150	200	0	17	0	0	4,10
-02	КР16	1	3860	30	0	100	200	10	9	10	10,13
-03	КР17	1	1780	15	50	100	200	6	3	5	1,18
-04	КР18	2	2040	20	0	100	200	5	5	5	1,41
-05	КР19	1	2430	15	0	100	200	6	6	6	2,10
-06	КР20	1	2690	20	50	100	200	7	6	7	3,22
-07	КР21	1	2950	25	0	100	150	7	10	7	3,54
-08	КР22	1	1260	30	0	100	200	4	2	4	1,74
-09	КР23	1	1520	40	0	60	120	6	6	6	2,94

Взам. инв. № | Подпись и дата | Инв. № подл.

1.038.1-1.1 060100 СБ

Каркас
КР14...КР23
Сборочный чертеж

Стадия	Масса	Масштаб
Р	См. табл.	—
Лист	Листов 1	

ЦНИИЭП жилища

Н. контр.	Гиберман		05.84
Нач. отд.	Росинский		05.84
Гл. констр.	Пальман		05.84
Гип	Клепикова		05.84
Рук. груп.	Горлова		03.84

21021 73

Формат А4

Рисунок А.5 – Лист 73 серии 1.038.1-1.

Сборочный чертеж каркасов КР14…КР23 с таблицей размеров

Рис.1

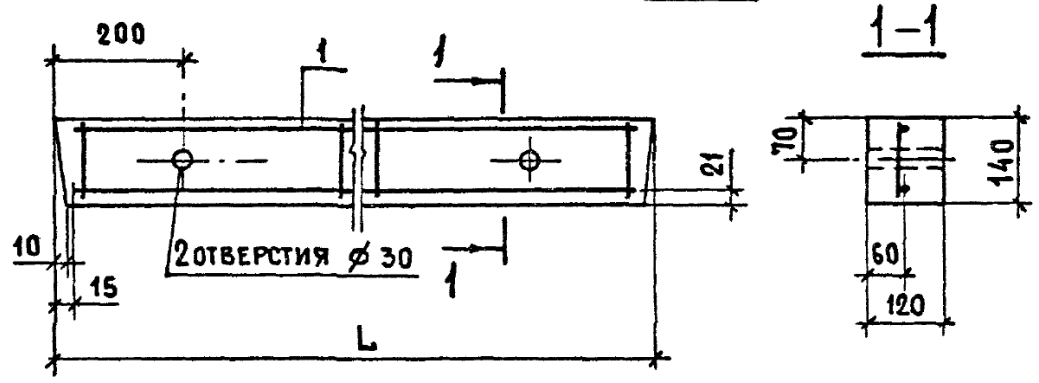
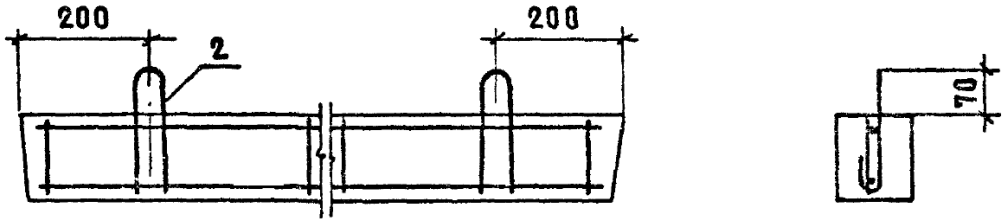


Рис.2

ОСТАЛЬНОЕ - СМ. РИС. 1



ОБОЗНАЧЕНИЕ	МАРКА	Рис.	L, мм	МАССА, кг
1.038.1-1.1 050000	2ПБ 29-4	1	2850	120
-01	2ПБ 29-4-п	2	2850	120
-02	2ПБ 30-4	1	2980	125
-03	2ПБ 30-4-п	2	2980	125

Взам. инв. № | Подпись и дата | Инв. № подл.

Н. контр.	Гиберман		05.84
Нач. отд.	Росинский		05.84
Гл. конст.	Пальман		04.84
ГИП	Клепикова		04.84
Рук. груп.	Горлова		03.84
Ст. техн.	Гук		03.85

1.038.1-1.1 050000 СБ

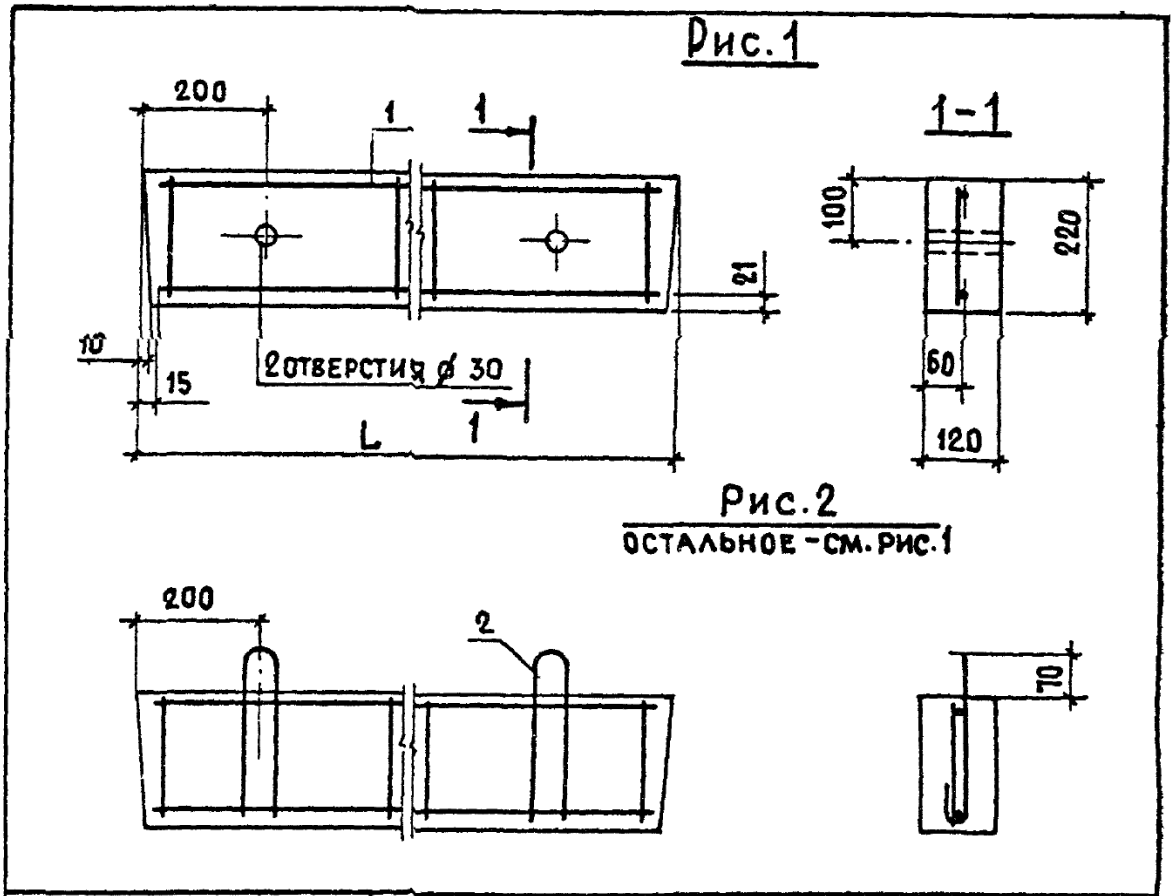
ПЕРЕМЫЧКА
2ПБ 29-4; 2ПБ 29-4-п.;
2ПБ 30-4; 2ПБ 30-4-п
Сборочный чертеж

Стадия	Масса	Масштаб
Р	см. табл.	1:10
Лист	Листов 1	

ЦНИИЭПжилища

21021 35 Формат А4

Рисунок А.6 – Лист 35 серии 1.038.1-1. Сборочный чертеж перемычек 2ПБ29-4, 2ПБ30-4



Обозначение	Марка	Рис.	L, мм	Масса, кг
1.038.1-1.1 070000	3 ПБ 27-8	1	2720	180
-01	3 ПБ 27-8-п	2	2720	180
-02	3 ПБ 30-8	1	2980	197
-03	3 ПБ 30-8-п	2	2980	197

Взам. инв. № | Подпись и дата | Инв. № подл.

Н. контр.	Гиберман		06.84
Нач. отд.	Росинский		05.84
Гл. констр.	Пальман		07.84
ГИП	Клепикова		07.84
Рук. груп.	Горлова		03.84
Ст. техн.	Гук		05.84

1.038.1-1.1 070000 СБ

ПЕРЕМЫЧКА
3ПБ 27-8; 3ПБ 27-8-п;
3ПБ 30-8; 3ПБ 30-8-п
СБОРОЧНЫЙ ЧЕРТЕЖ

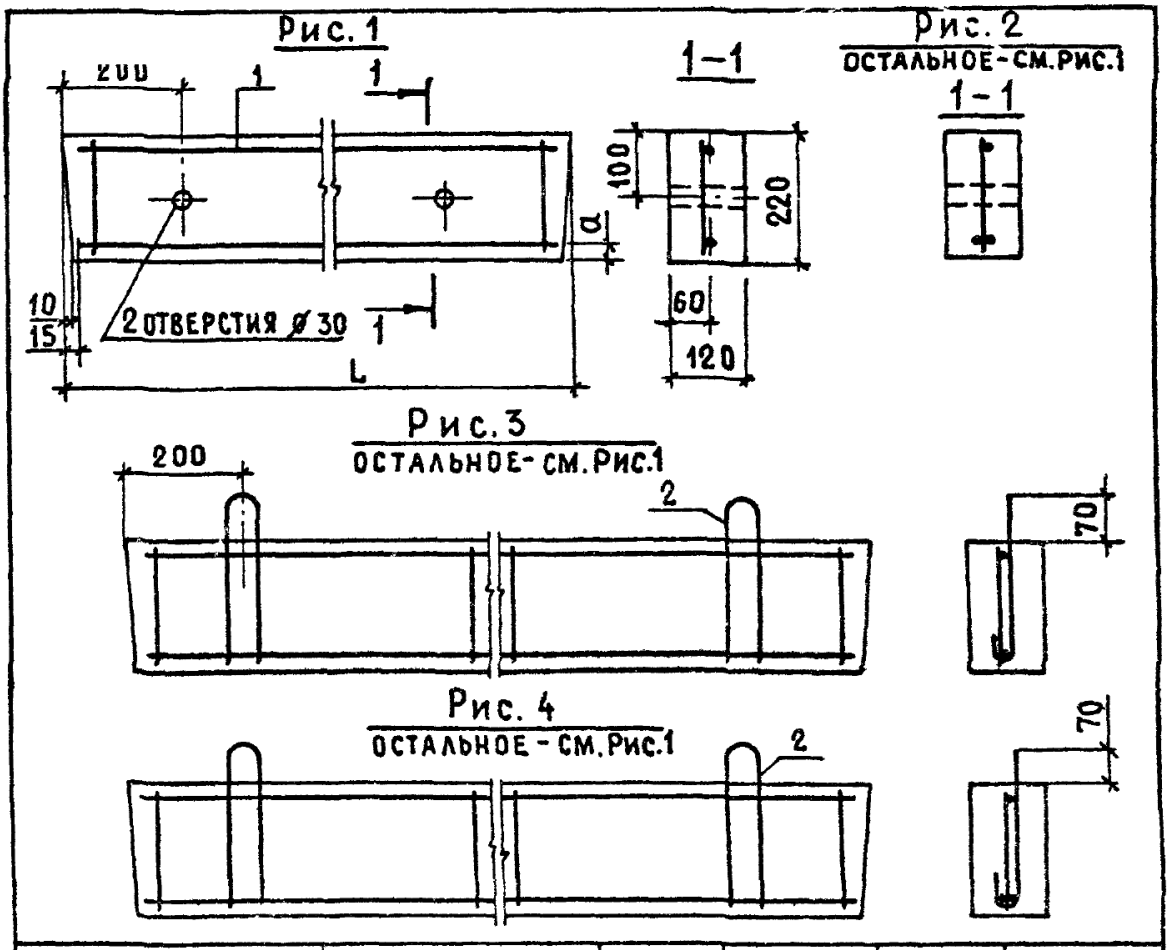
Стадия	Масса	Масштаб
Р	См. табл.	1:10
Лист	Листов 1	

ЦНИИЭП жилища

21021 39

Формат А4

Рисунок А.7 – Лист 39 серии 1.038.1-1. Сборочный чертеж перемычек 3ПБ27-8, 3ПБ30-8



ОБОЗНАЧЕНИЕ	МАРКА	Рис.	L, мм	a, мм	МАССА, кг
1.038.1-1.1 090000	3ПБ13-37	1	1290	21	85
-01	3ПБ13-37-п	3			
-02	3ПБ16-37	1	1550	22	102
-03	3ПБ16-37-п	3			
-04	3ПБ18-37	2	1810	21	119
-05	3ПБ18-37-п	4			

Н. КОНТР.	ГИБЕРМАН		06.84
НАЧ. ОТД.	РОСИНСКИЙ		06.84
ГЛ. КОНСТ	ПАЛЬМАН		04.84
ГИП	КЛЕПИКОВА		04.84
РУК. ГРУП.	ГОРЛОВА		03.84
СТ. ТЕХН.	ГУК		03.84

1.038.1-1.1 090000 СБ

ПЕРЕМЫЧКА
3ПБ13-37; 3ПБ13-37-п;
3ПБ16-37; 3ПБ16-37-п;
3ПБ18-37; 3ПБ18-37-п
СБОРОЧНЫЙ ЧЕРТЕЖ

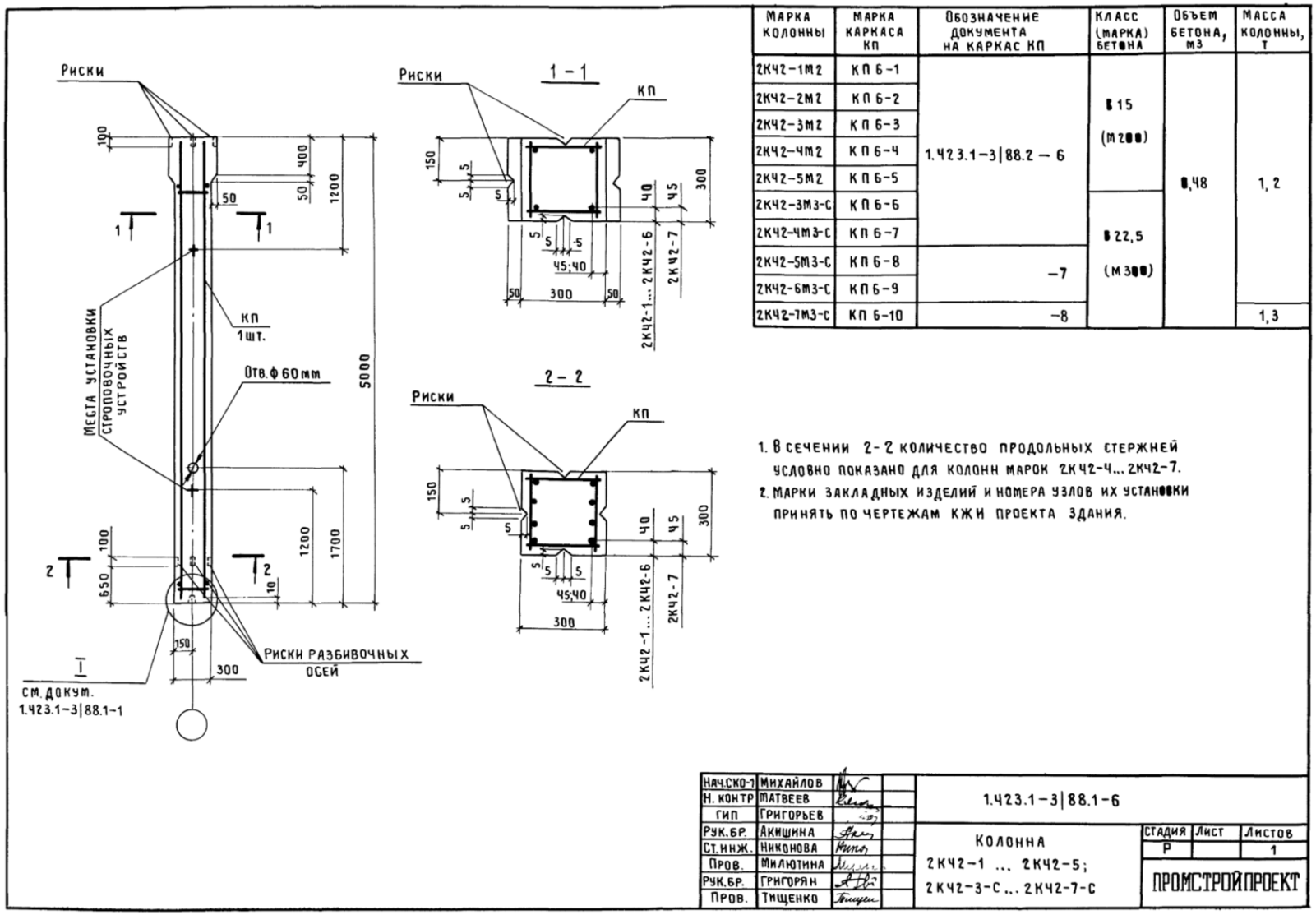
СТАДИЯ	МАССА	МАСШТАБ
Р	СМ. ТАБЛ.	1:10
ЛИСТ	ЛИСТОВ 1	

ЦНИИЭП ЖИЛИЩА

ВЗАМ. ИНВ. № | ПОДПИСЬ И ДАТА | ИНВ. № ПОДЛ.

21021 43 формат А4

Рисунок А.8 – Лист 43 серии 1.038.1-1. Сборочный чертеж перемычек 3ПБ13-37, 3ПБ16-37, 3ПБ18-37

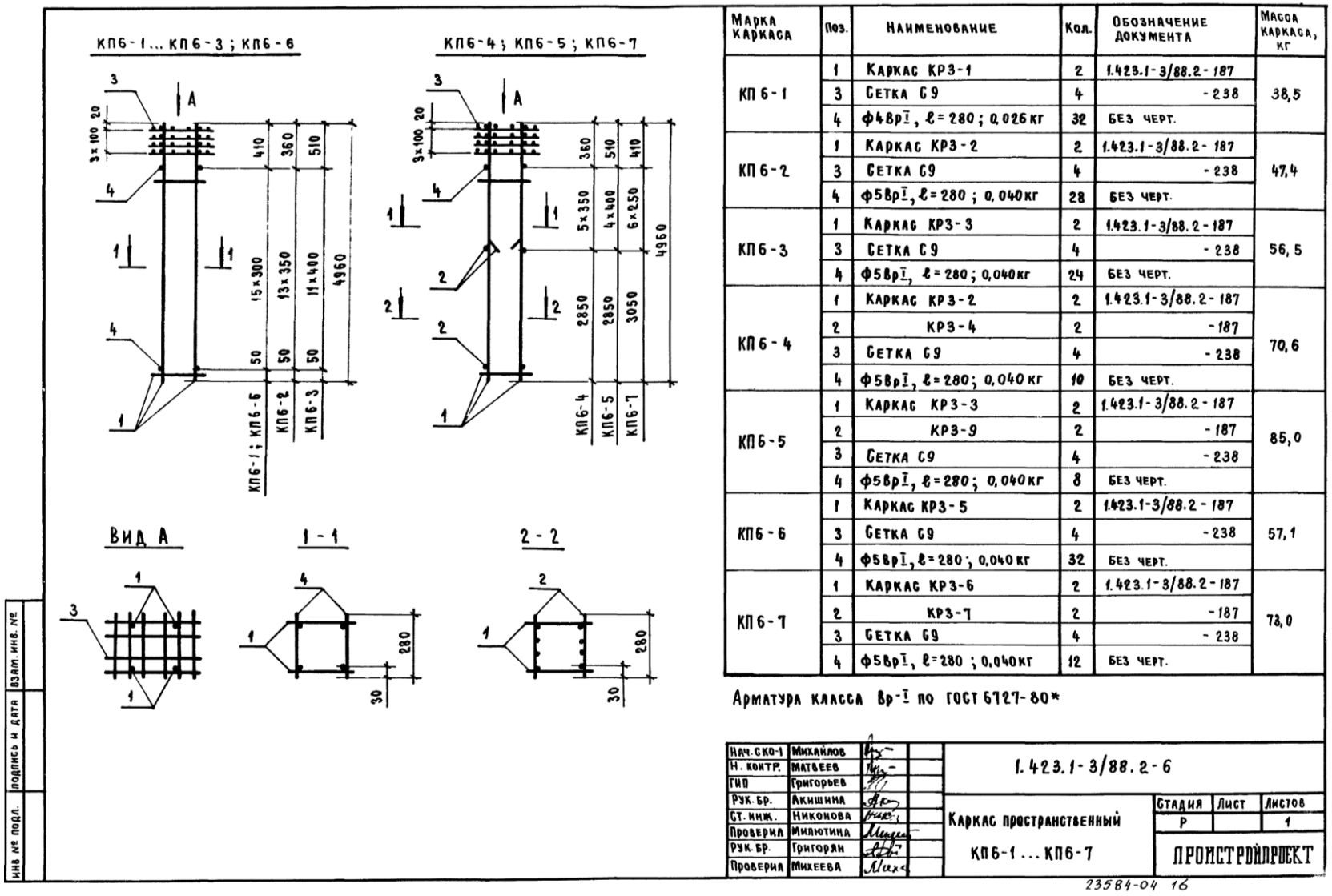


Марка колонны	Марка каркаса КП	Обозначение документа на каркас КП	Класс (марка) бетона	Объем бетона, м3	Масса колонны, т
2КЧ2-1М2	КП 6-1	1.423.1-3|88.2 — 6	В15 (М200)	0,48	1,2
2КЧ2-2М2	КП 6-2				
2КЧ2-3М2	КП 6-3				
2КЧ2-4М2	КП 6-4				
2КЧ2-5М2	КП 6-5				
2КЧ2-3М3-С	КП 6-6		В22,5 (М300)		
2КЧ2-4М3-С	КП 6-7				
2КЧ2-5М3-С	КП 6-8	—7			
2КЧ2-6М3-С	КП 6-9				
2КЧ2-7М3-С	КП 6-10	—8			1,3

1. В сечении 2-2 количество продольных стержней условно показано для колонн марок 2КЧ2-4... 2КЧ2-7.
2. Марки закладных изделий и номера узлов их установки принять по чертежам КЖИ проекта здания.

Нач.СКО-1	Михайлов	1.423.1-3|88.1-6	
Н. контр	Матвеев		
ГИП	Григорьев		
Рук.бр.	Акишина	Колонна 2КЧ2-1 ... 2КЧ2-5; 2КЧ2-3-С ... 2КЧ2-7-С	Стадия Р; Лист; Листов 1
Ст.инж.	Никонова		
Пров.	Милютина		
Рук.бр.	Григорян		ПРОМСТРОЙПРОЕКТ
Пров.	Тищенко		

Рисунок А.9 – Лист 1-6 серии 1.423.1-3/88. Марки колонн 2К42-1…2К42-7 и марки пространственных каркасов КП6-1…КП6-10



Марка каркаса	Поз.	Наименование	Кол.	Обозначение документа	Масса каркаса, кг
КП6-1	1	Каркас КР3-1	2	1.423.1-3/88.2-187	38,5
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф4Вр I, ℓ=280; 0,026 кг	32	Без черт.	
КП6-2	1	Каркас КР3-2	2	1.423.1-3/88.2-187	47,4
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	28	Без черт.	
КП6-3	1	Каркас КР3-3	2	1.423.1-3/88.2-187	56,5
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	24	Без черт.	
КП6-4	1	Каркас КР3-2	2	1.423.1-3/88.2-187	70,6
	2	КР3-4	2	-187	
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	10	Без черт.	
КП6-5	1	Каркас КР3-3	2	1.423.1-3/88.2-187	85,0
	2	КР3-9	2	-187	
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	8	Без черт.	
КП6-6	1	Каркас КР3-5	2	1.423.1-3/88.2-187	57,1
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	32	Без черт.	
КП6-7	1	Каркас КР3-6	2	1.423.1-3/88.2-187	73,0
	2	КР3-7	2	-187	
	3	Сетка С9	4	-238	
	4	ф5Вр I, ℓ=280; 0,040 кг	12	Без черт.	

Арматура класса Вр-I по ГОСТ 6727-80*

Нач. СКО-1	Михайлов	
Н. контр.	Матвеев	
ГИП	Григорьев	
Рук. бр.	Акишина	
Ст. инж.	Никонова	
Проверил	Милютина	
Рук. бр.	Григорян	
Проверил	Михеева	

1.423.1-3/88.2-6

Каркас пространственный КП6-1 ... КП6-7

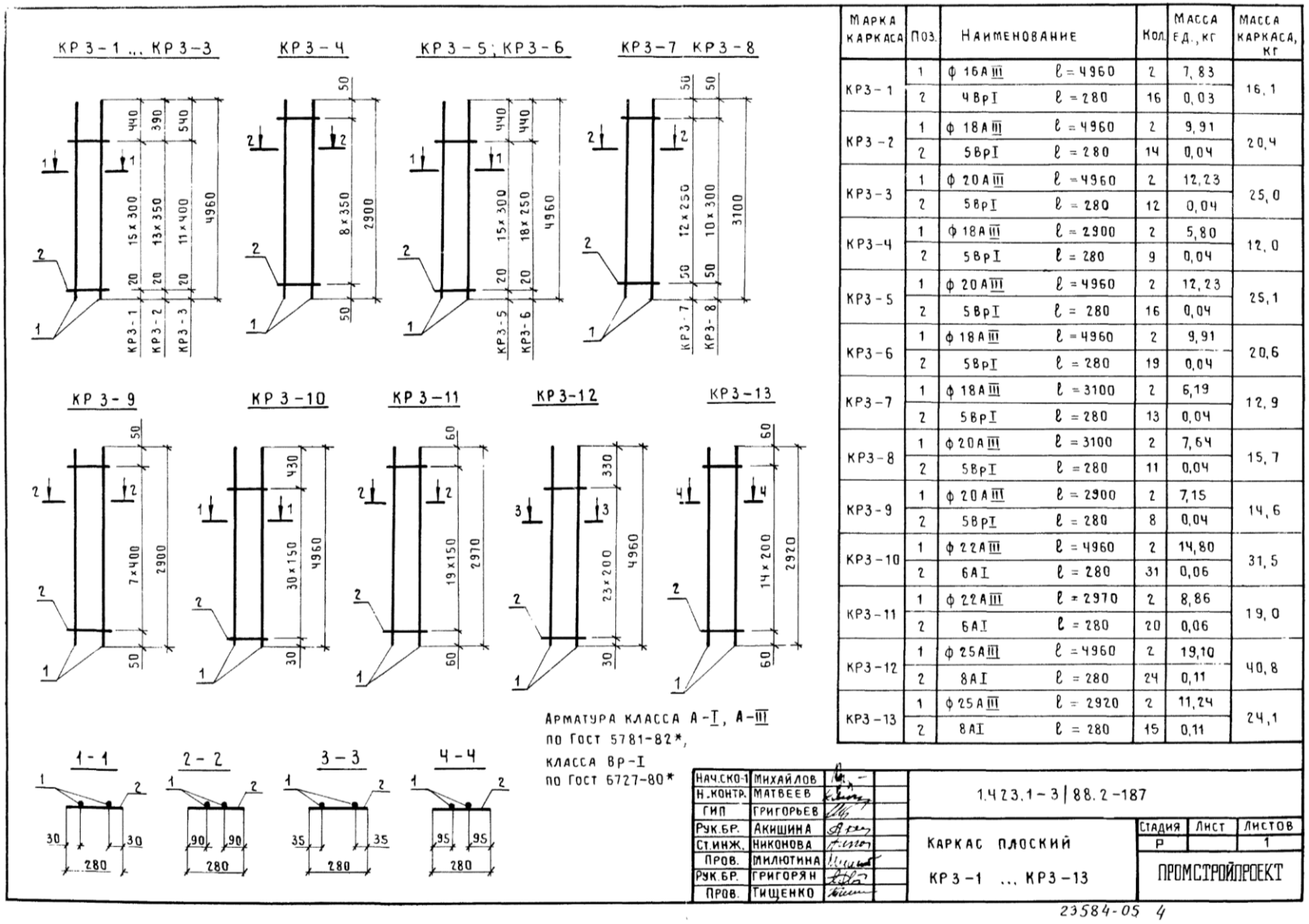
Стадия	Лист	Листов
Р		1

ПРОМСТРОЙПРОЕКТ

23584-04 16

Взам. инв. № | Подпись и дата | Инв. № подл.

Рисунок А.10 – Лист 2-6 серии 1.423.1-3/88. Пространственные каркасы КП6-1…КП6-7: состав из плоских каркасов КР3-1…КР3-7



Марка каркаса	Поз.	Наименование		Кол.	Масса ед., кг	Масса каркаса, кг
КР3-1	1	ф 16 А III	ℓ = 4960	2	7,83	16,1
	2	4 Вр I	ℓ = 280	16	0,03	
КР3-2	1	ф 18 А III	ℓ = 4960	2	9,91	20,4
	2	5 Вр I	ℓ = 280	14	0,04	
КР3-3	1	ф 20 А III	ℓ = 4960	2	12,23	25,0
	2	5 Вр I	ℓ = 280	12	0,04	
КР3-4	1	ф 18 А III	ℓ = 2900	2	5,80	12,0
	2	5 Вр I	ℓ = 280	9	0,04	
КР3-5	1	ф 20 А III	ℓ = 4960	2	12,23	25,1
	2	5 Вр I	ℓ = 280	16	0,04	
КР3-6	1	ф 18 А III	ℓ = 4960	2	9,91	20,6
	2	5 Вр I	ℓ = 280	19	0,04	
КР3-7	1	ф 18 А III	ℓ = 3100	2	6,19	12,9
	2	5 Вр I	ℓ = 280	13	0,04	
КР3-8	1	ф 20 А III	ℓ = 3100	2	7,64	15,7
	2	5 Вр I	ℓ = 280	11	0,04	
КР3-9	1	ф 20 А III	ℓ = 2900	2	7,15	14,6
	2	5 Вр I	ℓ = 280	8	0,04	
КР3-10	1	ф 22 А III	ℓ = 4960	2	14,80	31,5
	2	6 А I	ℓ = 280	31	0,06	
КР3-11	1	ф 22 А III	ℓ = 2970	2	8,86	19,0
	2	6 А I	ℓ = 280	20	0,06	
КР3-12	1	ф 25 А III	ℓ = 4960	2	19,10	40,8
	2	8 А I	ℓ = 280	24	0,11	
КР3-13	1	ф 25 А III	ℓ = 2920	2	11,24	24,1
	2	8 А I	ℓ = 280	15	0,11	

Нач.СКО-1	Михайлов	
Н.контр.	Матвеев	
ГИП	Григорьев	
Рук.бр.	Акишина	
Ст.инж.	Никонова	
Пров.	Милютина	
Рук.бр.	Григорян	
Пров.	Тищенко	

1.423.1-3/88.2-187

Каркас плоский КР3-1 ... КР3-13

Стадия	Лист	Листов
Р		1

ПРОМСТРОЙПРОЕКТ

23584-05 4

Рисунок А.11 – Лист 2-187 серии 1.423.1-3/88. Плоские каркасы КР3-1…КР3-13 с таблицей стержней и их длин

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Полная таблица допустимых шаблонов раскроя

№ p	a_{1p} (1260 мм)	a_{2p} (2690 мм)	a_{3p} (2820 мм)	Занято, мм	Остаток w_p, мм
1	0	0	1	2820	9180
2	0	0	2	5640	6360
3	0	0	3	8460	3540
4	**0**	**0**	**4**	**11280**	**720**
5	0	1	0	2690	9310
6	0	1	1	5510	6490
7	0	1	2	8330	3670
8	0	1	3	11150	850
9	0	2	0	5380	6620
10	0	2	1	8200	3800
11	0	2	2	11020	980
12	0	3	0	8070	3930
13	0	3	1	10890	1110
14	0	4	0	10760	1240
15	1	0	0	1260	10740
16	1	0	1	4080	7920
17	1	0	2	6900	5100
18	1	0	3	9720	2280
19	1	1	0	3950	8050
20	1	1	1	6770	5230
21	1	1	2	9590	2410
22	1	2	0	6640	5360
23	1	2	1	9460	2540
24	1	3	0	9330	2670
25	2	0	0	2520	9480
26	2	0	1	5340	6660
27	2	0	2	8160	3840
28	2	0	3	10980	1020
29	2	1	0	5210	6790
30	2	1	1	8030	3970
31	2	1	2	10850	1150
32	2	2	0	7900	4100
33	2	2	1	10720	1280
34	2	3	0	10590	1410
35	3	0	0	3780	8220
36	3	0	1	6600	5400
37	3	0	2	9420	2580
38	3	1	0	6470	5530
39	3	1	1	9290	2710

№ p	**a_{1p} (1260 мм)**	**a_{2p} (2690 мм)**	**a_{3p} (2820 мм)**	**Занято, мм**	**Остаток w_p, мм**
40	3	2	0	9160	2840
41	3	2	1	11980	20
42	**3**	**3**	**0**	**11850**	**150**
43	4	0	0	5040	6960
44	4	0	1	7860	4140
45	4	0	2	10680	1320
46	4	1	0	7730	4270
47	4	1	1	10550	1450
48	4	2	0	10420	1580
49	5	0	0	6300	5700
50	5	0	1	9120	2880
51	5	0	2	11940	60
52	5	1	0	8990	3010
53	5	1	1	11810	190
54	5	2	0	11680	320
55	6	0	0	7560	4440
56	6	0	1	10380	1620
57	6	1	0	10250	1750
58	7	0	0	8820	3180
59	7	0	1	11640	360
60	7	1	0	11510	490
61	8	0	0	10080	1920
62	9	0	0	11340	660

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026615676

«Программа для планирования оптимального линейного раскроя металлопроката»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Иванов Алексей Викторович (RU), Матвеев Юрий Николаевич (RU)***

Заявка № **2026614464**
Дата поступления **19 февраля 2026 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***27 февраля 2026 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023682978

«Программа для поиска целочисленного решения двухмерной задачи оптимизации с применением итеративного округления координат»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный технический университет» (ТвГТУ) (RU)***

Авторы: ***Матвеев Юрий Николаевич (RU), Иванов Алексей Викторович (RU)***

Заявка № **2023682053**

Дата поступления **23 октября 2023 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***01 ноября 2023 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Акты о внедрении результатов работы

Акционерное общество «ТЖБИ - 4» (АО «ТЖБИ-4»)

Адрес:
170017, г. Тверь,
ул. Коняевская, д.1

Телефон: (4822) 79-00-69, (4822) 655-644

E-mail: info@tzhbi4.ru , sales@tzhbi4.ru

УТВЕРЖДАЮ

Директор АО «ТЖБИ- 4»

А.А. Рыбакова

«30» 07 2026 г.

АКТ ИСПЫТАНИЙ

Методики поиска оптимального решения задачи линейного раскроя для изделий промышленности строительных материалов, предложенной в диссертационной работе Иванова А.В., и представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук.

Комиссия в составе:

Председателя: зам. директора по инженерной службе - Сакадынского Кирилла Владимирович.

Члены комиссии: технический директор - Кудрявцев Алексей Евгеньевич, главный технолог - Павлова Ольга Алексеевна.

Составила настоящий акт в том, что методика, представленная в диссертационной работе Иванова А.В., была рассмотрена специалистами АО «ТЖБИ-4» и рекомендована к использованию при решении задач планировании производственных программ для предприятий строительной отрасли.

Комиссия отмечает, что предложенная методика представляет собой процедуру выбора варианта производственной программы выпуска типовых изделий, при реализации которой суммарные отходы линейного раскроя длинномерных материалов становятся минимальными. В отличие от существующих подходов, согласно которым производственная программа принимается фиксированной входным параметром задачи раскроя, предложенная методика рассматривает её как управляемый параметр, т.е. в пределах нормативно допустимого диапазона превышения выпуска изделий анализируются варианты производственных программ и для каждой из них определяется объём отходов при оптимальном раскрое. Программа с минимальными отходами принимается в качестве рекомендуемой для реализации в производстве.

Наиболее значимым научным результатом работы является постановка и решение задачи выбора производственной программы по критерию минимума отходов раскроя в допустимой области, которая в большинстве существующих работ не рассматривается ввиду принятия производственной программы фиксированной.

Практическая значимость методики состоит в том, что допущение небольшого превышения выпуска по отдельным типам изделий позволяет найти такую комбинацию объёмов производства, при которой отходы раскроя сокращаются. Для предприятий, выпускающих типовые изделия, допускающие хранение и последующую реализацию, это означает получение большего количества готовой продукции при меньших потерях материалов, что является экономически более эффективным по сравнению с точным выполнением номинального плана.

Председатель: _____ (Сакадынский К.В.)

Члены комиссии: _____ (Кудрявцев А.Е.)

_____ (Павлова О.А.)

СПКБ СУ

Акционерное общество
«Специальное
проектно-конструкторское
бюро средств управления»
(АО «СПКБ СУ»)

Вагжановский пер., 9, офис 315
г. Тверь, 170100
Тел./факс: (4822) 35-96-76
E-mail: mail@spkbsu.ru
www.spkbsu.ru

ОГРН 1086952019164
ИНН/КПП 6950087667/695001001

24.10.2024 № 647-1

На _____ от _____

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
АО «СПКБ СУ»
_____ В.И. Иванов
«24» октября 2024 г.

АО "СПКБ СУ"

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы

Иванова Алексея Викторовича

Комиссия в составе: председатель технический директор А.С. Снятков, члены комиссии руководитель группы А.А. Храмичев составили настоящий акт о том, что научные результаты диссертационной работы Иванова А.В., в которой разработан оригинальный поисковый метод нахождения решения задачи целочисленного линейного программирования для использования в системах поддержки и принятия решений и представленной к защите на соискание ученой степени кандидата технических наук, были использованы при разработке рабочего проекта алгоритмческого и программного обеспечения гидроакустического комплекса СГАК-АП.

Новизна диссертационной работы заключается в том, что автор впервые исследовал вопросы:

- нахождения целочисленного решения внутри области допустимых решений без добавления новых ограничивающих плоскостей;

- нахождения целочисленного решения внутри области допустимых решений без добавления новых ограничивающих плоскостей;
- решения исходной задачи симплекс-методом только один раз на начальном этапе, а не на каждом шаге алгоритма;
- использования простых алгебраических операций и подхода к поиску решения без ветвления в процессе выполнения алгоритма.

Разработанные алгоритмы программно реализованы и обеспечили:

- существенное снижение вычислительной нагрузки, и, соответственно, времени поиска решения за счет отсутствия ветвления и использования простых алгебраических операций по сравнению с альтернативными методами решения задач целочисленного линейного программирования;
- сокращение времени, затрачиваемого на поиск необходимой конфигурации для раскроя листов металла.

Председатель:

Технический директор

к.ф.м.н. А.С. Снятков

Члены комиссии

к.т.н. А.А. Храмичев

Общество с ограниченной ответственностью
«Проектно-конструкторское бюро автоматизации производств»
(ООО «ПКБАП»)

Российская Федерация
170008, г. Тверь,
ул. Ротмистрова, д. 27 корп. 1

тел. (4822) 41-53-38
тел./факс (4822) 41-53-38
E-mail: pkbap@mail.ru
www.pkbap.ru

УТВЕРЖДАЮ

Директор «ПКБ АП»

В.М. Кожемякин

«24» 04 2024 г.

АКТ ИСПЫТАНИЙ

алгоритма поиска целочисленного решения методом итеративного округления вглубь области допустимого решения, предложенном в диссертационной работе Иванова А.В., представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Комиссия в составе:

Председатель: главный инженер Бакин А.Ю.,

Члены комиссии: главный конструктор Симонов Ф.В.,

составила настоящий акт в том, что алгоритм, представленный в диссертационной работе Иванова А.В., был предоставлен в ООО «ПКБ АП» для испытаний и тестирования. Результаты испытаний показали, что алгоритм имеет следующие отличительные особенности по сравнению с уже существующими методами:

- предложенный подход не добавляет новые ограничивающие плоскости, что позволяет избежать роста вычислительной сложности в процессе решения;
- метод использует только простые операции пересечения прямой и плоскости в пространстве;
- отсутствие ветвления задачи в ходе решения по сравнению с методом ветвей и границ.

Наиболее значимым научным результатом работы является предложенный алгоритм поиска целочисленного решения методом итеративного округления вглубь области допустимого решения. Алгоритм основан на введении специальной числовой метрики, которая использует разность численных значений координат смещаемой точки и значений координат точек на границе области допустимых решений вдоль каждой из осей.

Практическая значимость разработки заключается в том, что она может повысить эффективность управления производственными процессами за счет увеличения скорости решения оптимизационных задач.

Председатель:

Члены комиссии:

Автономная некоммерческая организация
«Научно-исследовательский центр
искусственного интеллекта и анализа данных»
(АНО «Научно-исследовательский центр искусственного интеллекта и анализа данных»)

170100, г. Тверь, б-р Радищева, д.31б, эт./к. 4/7, тел. 8(920)695-78-25
ОГРН 1216900015628, ОКПО 55891306, ИНН/КПП 6950256107/ 695001001
БИК 044525999, к/с 30101810845250000999 в ГУ банка России по ЦФО
р/с 40703810702500003777 Филиал Точка ПАО Банка «Финансовая Корпорация Открытие»

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНО «Научно-исследовательский центр
искусственного интеллекта и анализа данных»
Е.Г. Царькова
«15» мая 2024 г.

ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

о методе решения задачи целочисленного программирования, предложенном в диссертационной работе Иванова А.В., представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Комиссия в составе:

Председатель: директор Царькова Е.Г., кандидат физ.-мат. наук,

Члены комиссии: ведущий инженер Беляев А.К., главный специалист центра учебной аналитики и управления качеством образования Бодров Е.Н.,

составила настоящее заключение о том, что научные результаты диссертационной работы Иванова А.В. могут быть рекомендованы для решения задач планирования и оптимизации процесса производства уникальных, дорогостоящих штучных изделий.

Предлагаемый метод поиска решения задачи целочисленного программирования имеет следующие отличительные особенности по сравнению с уже существующими методами:

- предложенный подход не добавляет новые ограничивающие плоскости, что позволяет избежать роста вычислительной сложности в процессе решения;
- метод использует только простые операции пересечения прямой и плоскости в пространстве;
- отсутствие ветвления задачи в ходе решения по сравнению с методом ветвей и границ.

Наиболее значимым научным результатом работы является предложенный алгоритм поиска целочисленного решения методом итеративного округления вглубь области допустимого решения. Алгоритм основан на введении специальной числовой метрики, которая использует разность численных значений координат смещаемой точки и значений координат точек на границе области допустимых решений вдоль каждой из осей.

Практическая значимость разработки заключается в том, что она может повысить эффективность управления производственными процессами за счет увеличения скорости решения оптимизационных задач.

Председатель: Е.Г. Царькова

Члены комиссии: А.К. Беляев

Е.Н. Бодров