

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



ВОЛКОВА Ольга Юрьевна

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ  
КОМПОЗИТНЫХ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ

1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
доцент А.А. Скворцов

Москва, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ В СОСУДАХ ДАВЛЕНИЯ</b> .....	11
1.1. Принципы повышения эффективности применения композитов в различных отраслях гражданского и специального машиностроения .....	11
1.2. Опыт применения волокнистых композитов в сосудах давления .....	15
1.2.1. Применение волокнистых композитов в сосудах давления и анализ эффективности композитных материалов в баллонах по сравнению со сталью ...	15
1.2.2. Методы расчета и оптимизации композитных сосудов давления.....	21
1.2.3. Технологии изготовления композитных сосудов давления .....	23
<b>ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ</b> .....	34
2.1. Теория упругости анизотропных многослойных композитов. ....	34
2.2. Элементы наследственной теории ползучести с учетом климатических факторов .....	41
2.3. Критерии прочности намоточных сосудов давления, учитывающие направленные механизмы разрушения .....	45
2.4. Механика роста расслоений и расщеплений при различных условиях (циклического и динамического) нагружения .....	49
<b>ГЛАВА 3. РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ</b> .....	57
3.1. МКЭ-расчеты НДС цилиндрической, донной частей и зон полюсных отверстий.....	57
3.2. Нитяная модель для выбора оптимальных углов армирования.....	61
3.3. Методы расчета композитных сосудов давления .....	62
3.3.1. Послойный метод расчета напряжений в симметричных парах слоев .....	66
3.3.2. Упрощенный послойный метод .....	69

3.3.3. Расчет упругих свойств через основные инварианты тензора упругих модулей .....	70
3.4. Построение предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев.....	76
3.5. Разработка программы рационального выбора углов армирования с целью создания равнонапряженной волокнистой структуры .....	98
3.6. Верификация результатов расчета напряженно-деформированного состояния композитного сосуда давления .....	106
<b>ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>114</b>
4.1. Оценки устойчивости деформирования тонкостенных пластин и оболочек при плоском напряженном состоянии для идентификации параметров критериев прочности.....	114
4.2. Энергетический критерий расслоения и масштабный эффект прочности	127
4.3. Расслоение при сжатии плоского композитного элемента с выщелкиванием слоя .....	130
4.4. Расслоение кольца (баллона) с выщелкиванием внутреннего слоя .....	139
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>151</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>153</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>167</b>
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	167
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	168
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	169

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы диссертационного исследования** обусловлена растущим спросом на полимерные волокнистые композиты, их широким применением в различных отраслях промышленности, а также постоянным развитием технологий и потребности в совершенствовании композитных материалов (КМ) и конструкций.

Одной из областей, где применение композитов особенно эффективно, являются сосуды давления. Новые материалы и методы изготовления позволяют создавать композитные сосуды давления с более высокими параметрами прочности, устойчивостью к коррозии и температурным воздействиям. Это открывает новые возможности для применения композитных баллонов и требует проведения дальнейших исследований по оптимизации и улучшению их свойств [48, 87].

Волокнистые композиты применительно к сосудам под давлением обладают рядом преимуществ. К ним, в частности, относятся устойчивость к коррозии, удельная прочность высокого порядка, а также отсутствие образования осколков в случае разрушения. Кроме этого, необходимо упомянуть возможность адаптивной к напряжениям оптимизации самой структуры армирования. Этим вызван наблюдаемый высокий интерес у ученых, имеющих дело с баллонами композитного типа. Так, механики в первую очередь сосредоточены на производстве расчетов зон полюсных отверстий и также донной части таких баллонов с использованием передового оборудования и программных средств. В то же время технологи изучают аспекты влияния разного рода факторов в данной области.

Специфика композитов открывает широкие перспективы применения в авиации и аэрокосмической технике, где снижение веса «покупается любой ценой». Оптимальное проектирование композитных конструкций, направленное на снижение их массы, остается ключевой задачей. Традиционные методы оптимизации, основанные на нелинейном программировании, хоть и эффективны,

но требуют значительных вычислительных ресурсов. В случае волокнистых композитов развиваются более рациональные методы проектирования, основанные на принципе равнонапряженности волокон.

Кроме расчетных методов чрезвычайно важно развивать и обосновывать экспериментальные методы надежного определения механических свойств материалов-конструкций композитного типа. Это связано с тем, что при «композитном проектировании» материал и конструкция создаются одновременно, они неразделимы.

Существуют различные методы и технологии изготовления композитных сосудов давления. В первую очередь стоит упомянуть популярный метод, когда такие композиты создаются в процессе непрерывной намотки. Полимерным связующим в данном случае пропитывается лента, которая может быть либо изготовлена из ткани, либо иметь в основе систему нитей. На следующем этапе берется вращающаяся оправка, на которую и наматывается такая лента. Оправка при этом укладывается в различных направлениях и, что важно, повторяет форму внутренней поверхности сосуда. В процессе изготовления спустя некоторое время осуществляется отверждение, удаление такой оправки. Происходит это при достижении желаемой толщины. Рассматриваемый метод дает возможность производства оболочек сложной формы и с высокой точностью реализовывать различные схемы армирования изделий из композитных материалов.

Таким образом, широкое применение полимерных волокнистых композитов в сосудах давления сохраняет актуальность и востребованность методов расчета и оптимального проектирования композитных конструкций.

**Степень разработанности проблемы.** Исследования в области механики деформируемых твердых тел, посвященные методам оптимизации конструкций из композитных и традиционных материалов, были опубликованы в научных работах ряда отечественных и зарубежных ученых Н.В. Баничука, В.А. Бунакова, Н.А. Алфутова, В.В. Васильева, П.А. Зиновьева, В.Л. Нарусберга, Ю.В. Немировского, И.Ф. Образцова, В.Н. Скопинского, Б.Г. Попова, Р.Б. Рикардса, А.А. Смердова, Г.А. Тетерса, Р.Т. Хафтки, В.В. Чедрика и др.

**Цель и задачи работы.** Цель работы заключалась в создании инженерных методов рационального проектирования структуры армирования композитных сосудов давления, позволяющих снизить массу баллонов при сохранении требований по прочности и надёжности.

Для реализации поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи:**

1. Проанализировать существующие методы изготовления намоточных сосудов давления из композиционных материалов для обоснования рациональных структур армирования.

2. Обосновать механически обоснованные критерии прочности, учитывающие различные виды разрушения и описывающие в пространстве напряжений используемые при намотке композитных сосудов давления для симметричных пар слоев предельные поверхности кусочно-линейного типа.

3. Используя новые критерии прочности и нитяную модель, разработать с целью решения задачи подбора равнонапряженной структуры армирования эффективную инженерную методику, которая в то же время, в отличие от традиционных методов, применяемых в оптимальном проектировании, не будет сопровождаться длительными и неудобными процедурами вычисления.

4. В программном комплексе ANSYS осуществить расчёты методом конечных элементов для зон полюсных отверстий, донной части и цилиндрической части.

5. Разработать программу автоматизированного расчета несущей способности композитного баллона для быстрого (инженерного) алгоритма оптимизации структуры армирования.

6. Проанализировать условия потери устойчивости деформирования при двухосном растяжении металлического лейнера.

**Научная новизна диссертации** состоит в том, что:

1. Предложен и обоснован новый метод оптимизации структуры армирования намоточных сосудов давления путем выбора углов армирования по нитяной аналогии с последующей проверкой уточненным послойным методом.

2. Впервые разработана методика обеспечения роста расчетного критического давления по сравнению с той структурой, которая используется на практике для композитного баллона и построены кусочно-линейные предельные поверхности в пространстве напряжений.

3. Впервые разработан более эффективный (надёжный и простой) по сравнению с традиционным расчетом по монослоям подход для послойного расчета имеющих в своей основе симметричные пары слоёв композитных конструкций.

4. На основе энергетического критерия проведен анализ потери устойчивости внутренних слоев в композитных сосудах давления и получены значения критического сжимающего напряжения и характерной толщины выщелкиваемого слоя.

5. Даны количественные оценки условий потери устойчивости деформирования при двухосном растяжении металлического лайнера.

**Теоретическая и практическая значимость работы определяется созданием:**

— инженерных методов расчета и оптимизации намоточных сосудов давления из композиционных материалов для различных отраслей промышленности, таких как, авиастроение, гражданское машиностроение, автомобилестроение;

— учитывающих вариативные механизмы разрушения критериев прочности, выведенных для построения предельных поверхностей относительно каждой пары слоев;

— методики решения обратной задачи (с использованием нитяной модели) подбора равнонапряженной структуры армирования при дополнительном условии отсутствия длительных и неудобных процедур вычисления, которые присущи традиционным методам, применяемым в оптимальном проектировании;

— программы выбора рациональной структуры армирования с учетом деградации свойств слоев в процессе докритического разрушения путем подбора

углов армирования по нитяной аналогии с последующей проверкой послойным методом.

**Методология и методы исследования.** При проведении диссертационного исследования был использован комплекс аналитических и расчетных методов. Для численного анализа напряженных состояний цилиндрической, донной частей и зон полюсных отверстий композитного сосуда давления были применены аналитические методы расчета, а также метод конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS на языке программирования APDL. Для анализа упругих и прочностных свойств были привлечены методы механики композитных материалов и в более широком смысле методы механики деформируемого твердого тела в целом. Построение в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев предельных поверхностей проводили с помощью компьютерной программы, написанной на языке Python. Используемые методы позволили достичь поставленных целей диссертационного исследования.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Механо-математические методы проектного расчета композитных сосудов давления: послойный метод расчета напряжений для симметричных пар слоев; упрощенный послойный метод с расчетом упругих свойств через основной инвариант тензора упругих модулей монослоя.

2. Построение кусочно-линейных предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев, учитывающих разные механизмы разрушения.

3. Компьютерная программа автоматизированного расчета несущей способности композитного баллона для оптимизации структуры армирования с верификацией результатов расчета имеющимися экспериментальными данными.

**Степень достоверности** результатов подтверждена согласованием расчетных и экспериментальных значений для разных углов армирования, коэффициентов запаса для предельных прямоугольников и эллипсов, а также для построения предельных поверхностей при двухосном нагружении

стеклопластиковых труб и оценки напряженно-деформированного состояния баллона давления, выполненного методом непрерывной намотки.

**Апробация работы.** Основные положения исследования обсуждались, докладывались и были одобрены на: международной студенческой научной конференции Московского Политеха «СНК-2020» (г. Москва, 2020 г.); международной научной конференции «Наука будущего – наука молодых» (г. Москва, г. Калининград, 2021 г.; г. Орел, 2023 г.); международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения «МИКМУС» (г. Москва, 2020 г. – 2023 г.); международном форуме «Ключевые тренды в композитах: Наука и технологии» (МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 2022 г.); XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г. Санкт-Петербург, 2023 г.); всероссийской научно-практической конференции «Наука-общество-технологии-2024» (Московский Политех, г. Москва, 2024 г.).

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 23 научных работах, из которых 4 и 10 - статьи в журналах, входящих в перечень ВАК и Scopus/Web of Science, соответственно.

**Личный вклад автора** состоит в постановке задачи данного исследования. Автору принадлежит разработка методов построения предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев; написание программы рационального выбора углов армирования с целью создания равнонапряженной волокнистой структуры; анализ существующих методов изготовления намоточных сосудов давления из композиционных материалов для обоснования возможности реализации структур армирования рационального типа.

**Структура и объем диссертации.** Структурно работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем исследования составил 169 страниц, в том числе 21 таблица и 60 рисунков. Список литературы состоит из 140 источников. В работе содержатся 3 приложения.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»: п. 4. Механика композиционных материалов и конструкций, механика; п.9. Устойчивость процессов деформирования; п.12. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

Автор выражает благодарность научному консультанту, д.т.н., профессору Полилову Александру Николаевичу за ценные советы и консультации в написании диссертационной работы.

## **ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ В СОСУДАХ ДАВЛЕНИЯ**

Волокнистые композиционные материалы применяются в сосудах высокого давления для различных отраслей производства. В частности, наибольшее внимание уделено применению волокнистых композитов в авиации, космической технике, гражданском и специальном машиностроении, а также в автомобилестроении. В работах известных авторов [8, 32, 39, 48-49, 74, 85, 87-88, 90, 94, 103, 110] приведены традиционные методы расчета и оптимизации композитных сосудов давления, а также технологии их изготовления. На основании анализа можно выяснить, какие направления развиты недостаточно.

### **1.1. Принципы повышения эффективности применения КМ в различных отраслях гражданского и специального машиностроения**

В современном мире композиционные материалы широко применяются в целом диапазоне областей, среди которых энергетическая, авиационно-космическая, автомобильная (корпуса машин, детали), горнодобывающая (буровые установки), металлургическая (огнеупорные материалы, арматура печей), строительная (панели зданий, опоры), химическая промышленность (емкости для перевозки и хранения ядовитых веществ и пищевых продуктов), текстильная промышленность (станки), сельскохозяйственная (косилки, трактора), бытовая техника (стиральные машины, радиоаппаратура).

Несмотря на огромное количество достоинств, существуют недостатки которые ограничивают широкое использование композитов, что показано на рис. 1.1. Видно, что производство данных материалов в малых объемах приводит к росту цен на них и, в свою очередь, не способствует привлечению потребителей для покупки и использования композиционных материалов, что, следовательно, замедляет рост производства. На рис. 1.1 также показано, что причинами низкого уровня внедрения композиционных материалов являются малый опыт проектирования, малоразвитость технологий, нехватка квалифицированных кадров

и отсутствие технологической базы. Особую сложность вызывает проектирование и оптимизация мест соединения композитных деталей с металлическими конструкциями [94].

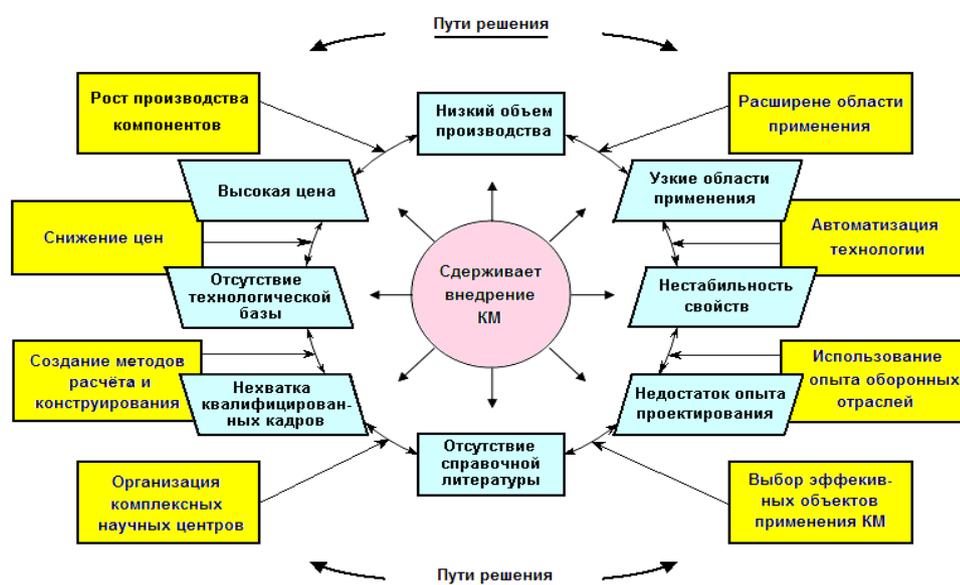


Рис. 1.1. Круг проблем, сдерживающий широкое применений угле-, стекло и органо-пластиков

Для решения вышеперечисленного круга проблем необходимо создание новых подходов и методов расчета и конструирования композиционных материалов, расширение области их применения, а также стимулирование и расширение производства. Повысить заинтересованность в использовании КМ может изготовление таких материалов, которые составили бы конкуренцию металлическим аналогам, то есть обладали бы более малым весом, теми же, а то и лучшими характеристиками, эффективно применялись бы для решения различных технических задач, и том числе тех, в которых использование металлических конструкций не представляется возможным.

ПКМ (стекло-, угле-, боро-, органопластики) - полимерные композитные материалы - один из наиболее перспективных классов конструкционных композитов. ПКМ при армировании дают широкий диапазон волокон на выбор, что позволяет значительно диверсифицировать их применение. В частности, такие характеристики, как жесткость, прочность и легкость очень важны в аэрокосмической и авиационной промышленности [37, 41].

Стоит отметить значительный вклад в изучение механики полимерных композитных материалов исследователей Васильева В. В., Амбарцумяна С. А., Ашкенази Е.К., Немировского Ю.В., Аннина Б.Д., Зиновьева П.А., Алфутова Н.А., Победря Б.Е., Полилова А.Н., Милейко С.Т., Попова Б.Г., Работнова Ю.Н., Тарнопольского Ю.М., Черепанова Г.П. и многих других [32-33, 35-37, 41, 44, 47, 51, 67, 76, 85, 124].

К числу зарубежных ученых, внесших наиболее заметный вклад в механику композитов, можно отнести Ву Э., Гордона Дж., Келли А., Кортена Х.Т., Фудзии Т., Цая С. и др. [2, 8, 28, 52, 72, 101].

Анализ физико-химических свойств композитов и эффектов, получаемых в результате их применения, способствует подбору композиционных материалов, которые неотъемлемы в различных областях (рис. 1.2). Данный анализ позволяет выбрать *объекты*, в которых реализуются те или иные *эффекты* от применения композитного материалов. На рис. 1.2 приведена схема, где приведены области, использующие полимерные композиты, а также эффекты, обеспечиваемые ими.



Рис. 1.2. Основные эффекты применения ПКМ и области использования.

Расшифровка обозначений: **Б** – безоскольное разрушение, **В** – высокая живучесть,

**Д** – долговечность, **Ж** – жаропрочность, **З** – большая запасенная энергия, **К** – коррозионная и химическая стойкость, **Н** – нехрупкость, **П** – простота получения сложной формы, **Р** – радиопрозрачность, **С** – снижение веса и материалоемкости,

**Т** – технологичность и безопасность, **У** – высокие удельная прочность и жесткость, **Х** – хладостойкость, **Ш** – шумопоглощение виброизоляция, **Э** – низкая энергоемкость производства, **Я** – экология

Использование ПКМ в авиации, как правило, способствует масштабной глубокой перестройке целой промышленности, так, например, в проекте Boeing – 787 американской корпорации *Boeing* конструкция планера должна была на 70 % быть выполненной из углепластика. Внедрения подобных технологий может стимулировать расширение области применения и показать положительные стороны использования КМ в авиастроении. Однако преимущества углепластиков, заключающиеся в их уникальных свойствах, часто перекрываются высокой стоимостью, что является сильно ограничивающим фактором для их распространения и использования [94].

Для каждой отрасли композиционные материалы должны обладать рядом необходимых для них свойств, чтобы обеспечить устойчивость под нагрузкой, снижение веса конструкции, а также решить техническую задачу, например, упростить конструкцию, снизить габариты, что может быть невозможно с использованием обычных сплавов. Так, например, в отраслях гражданского машиностроения требуемые свойства КМ и задачи, поставленные перед ними, будут совершенно другими по сравнению с авиационной отраслью.

Одной из наиболее привлекательных областей применения композиционных материалов является автомобильная отрасль. В связи с ее массовостью, с разнообразными типами автомобилей (гоночные, легковые, грузовые) и условиями их эксплуатации к материалам предъявляются различные требования: уменьшение вибрации, коррозионная стойкость, особые дизайнерские характеристики и безопасность при использовании. Данная отрасль очень динамична и мобильна, то есть создаются различные модели и технические решения, которые требуют новых материалов с заданными свойствами.

Эффекты, достигаемые в результате использования полимерных композиционных материалов, можно подразделить на несколько типов:

- прямые эффекты, связанные с физико-механическими свойствами материалов;
- технологические, заключающиеся в упрощении обработки, понижении энергоемкости и создании безотходного производства;

- конструкционные, связанные с проектированием размеров, формы и схемы армирования материала.

Вышеперечисленные эффекты необходимо учитывать при проектировании изделий из ПКМ для получения оптимальных характеристик для выбранной области промышленности.

## 1.2. Опыт применения волокнистых композитов в сосудах давления

### 1.2.1. Применение волокнистых композитов в сосудах давления и анализ эффективности КМ в баллонах по сравнению со сталью

Данный параграф посвящен анализу эффективности применения волокнистых композитов с требуемыми свойствами. Была сравнена эффективность КМ в сосудах давления с металлическими аналогами, а именно, со сталью, а также приведены достоинства и недостатки баллонов разных типов.

Волокнистые КМ, например, гипсоволоконные плиты и др., в своем составе содержат волокна стекла, стали или углерода. Натуральные волокна, например, целлюлоза, используются в нынешнем сегменте рынка значительно реже, но и они наделяют КМ принципиально новыми и интересными характеристиками.

Особенность армирующих волокон состоит в том, что они обладают неоднородной структурой и анизотропны, что оказывает значительное влияние на свойства композитов [2]. Наиболее часто для создания изделий из композиционных материалов используют стеклянные, углеродные и борные волокна. В таблице 1.1 приведены основные характеристики для композитных материалов.

Таблица 1.1. Основные характеристики композиционных материалов

Материал	Предел прочности при растяжении, МПа	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Стеклопластик	2000	2100
Органопластик	1370	1360
Боропластик	1100	2100
Базальтопластик	2350	2000

Волокнистые композиты также могут применяться для изготовления сосудов высокого давления. Обеспечение безопасности при хранении и при транспортировке в сосудах высокого давления достигается путем предварительного исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) сосудов.

Согласно установленным нормам, в промышленных масштабах запрещено использование газов тяжелее воздуха, так как это может повлечь серьезные последствия в случае их утечки. Чаще используют газы, которые легче воздуха, поэтому технология их сжижения и хранения под высокими давлениями имеет огромное значение.

Большой сегмент рынка освоило автомобилестроение, которое нуждается в сосудах высокого давления. Автомобильные баллоны проектируются на 150-200 атмосфер, а с учетом запаса прочности они должны выдержать до 600 атм. В связи с тем, что огромные давления при разрушении сосуда создают высокую скорость осколков, композитные баллоны могут стать привлекательными аналогами, разрушение которых более безопасно и происходит размоткой.

Еще одна причина применения композитных намоточных баллонов, а именно, изготовленных из стекло-органопластиков, это значительное снижение веса. Например, вес стального автомобильного 50-литрового баллона составляет около 100 кг, в то время как аналогичный композитный баллон весит 30 кг, который вдобавок обладает такими достоинствами как нехрупкое разрушение и отсутствие взрыва при разгерметизации [95].

Преимущества композитных баллонов также обусловлены возможностью выбора углов намотки, которыми можно оптимизировать конструкцию. Проиллюстрируем это на цилиндрической части баллона. Осевые напряжения в два раза меньше, чем окружные, поэтому за счет комбинации металлов и композитов можно добиваться оптимальной структуры сосуда и снижать толщину металлической стенки баллона.

Из вышеперечисленных достоинств композитных баллонов видно, что разработка и развитие КМ в конструкционном материаловедении имеет решающее значение для многих областей.

Ниже в таблице 1.2 показаны достоинства и недостатки сосудов давления разных типов [32].

Таблица 1.2. Достоинства и недостатки баллонов разных типов

Виды баллонов	Достоинства	Недостатки
Цельнометаллические	Низкая стоимость; Стойкость к ударным нагрузкам	Высокая вероятность коррозии; Взрывоопасность
Металлокомпозитные	Стойкость к ударным нагрузкам	Высокая вероятность коррозии
Композитные	Низкая масса; Стойкость к коррозии	Меньшая стойкость к ударным нагрузкам; Высокая стоимость

Таким образом, показано, что волокнистые композиты достаточно часто применяют для изготовления различных конструкций, в том числе сосудов давления, так как они имеют низкую плотность и вес. Одним из основных методов изготовления сосудов давления является непрерывная намотка. Более того, как было сказано ранее, КМ намного эффективнее стальных аналогов, и имеют ряд преимуществ.

Еще одной из основных проблем, которая стоит перед технологами – это проблема герметичности композитных сосудов высокого давления, которая связана с хрупким разрушением полимерной матрицы при растяжении однонаправленного армированного слоя поперек волокон. Значительное количество было посвящено данной тематике [47-48]. Подытоживая выводы ученых, можно сказать, что увеличение предельной деформации матрицы  $\bar{\epsilon}_{np}$  зачастую ведет к возникновению проблем, связанных (при растяжении поперек волокон) с деформацией –  $\bar{\epsilon}_2$ , а также с ухудшением (при растяжении вдоль

волокон) показателей прочности композита. Вызвано это наличием объективных ограничений, относящихся к волокнам (связь с матрицей и собственная жесткость).

В связи с этим необходимо балансировать и учитывать все эти факторы при определении оптимального состава и структуры композитного материала, несмотря на тот факт, что повышение предельной деформации матрицы в потенции способствует предотвращению ее преждевременного разрушения. Это может включать в себя использование различных методов усиления матрицы или изменение волокон для улучшения связи и устойчивости композита.

Таблица 1.3. Предельные деформации при растяжении вдоль и поперек волокон для однонаправленных композитов [31]

Предельная деформация	Стекланные волокна и эпоксидная матрица	Углеродные волокна и эпоксидная матрица	Органические волокна и эпоксидная матрица	Углеродные волокна и термопластичная матрица
$\bar{\varepsilon}_1, \%$	3.0	1.8	2.6	1.8
$\bar{\varepsilon}_2, \%$	0.3	0.4	0.2	0.7
$\bar{\varepsilon}_1 / \bar{\varepsilon}_2$	10	4.5	13	2.57

На рис. 1.3 продемонстрирован эффект нарушения герметичности сосуда высокого давления, когда такой сосуд изготовлен из однонаправленных волокнистых композитов. Имеется в виду ортогонально армированный трехслойный композит, применяемый метод – метод намотки. В данном случае, материал сосуда был растянут в одном направлении, что привело к нарушению его герметичности.

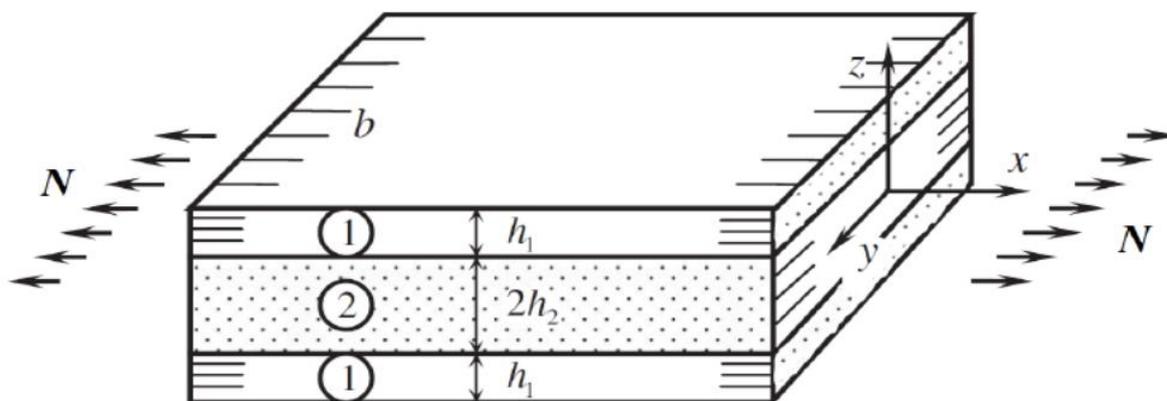


Рис. 1.3. Растяжение ортогонально армированного трехслойного композита [31]

Заметим, что всего могут иметь место две разновидности разрушения. К первой относится ситуация, при которой деформация волокон первого слоя (внешнего) доходит до критического значения  $\bar{\varepsilon}_1$ . Ко второй относится ситуация, при которой второй слой (средний) демонстрирует достижение критического значения  $\bar{\varepsilon}_2$ , а разрушение происходит при растяжении поперек волокон.

В идеальной ситуации абсолютно все слои демонстрируют одновременное разрушение. В таком случае выполняется условие  $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2$ . Однако заметим, что вследствие того, что поперечная предельная деформация однонаправленного композита заметно ниже, нежели продольная предельная, в современных композитах не происходит выполнение данного условия (таблица 1.3).

На рис. 1.4 продемонстрированы трещины в кольцевом слое намоточного сосуда высокого давления, которые появились при осевом растяжении сосуда.

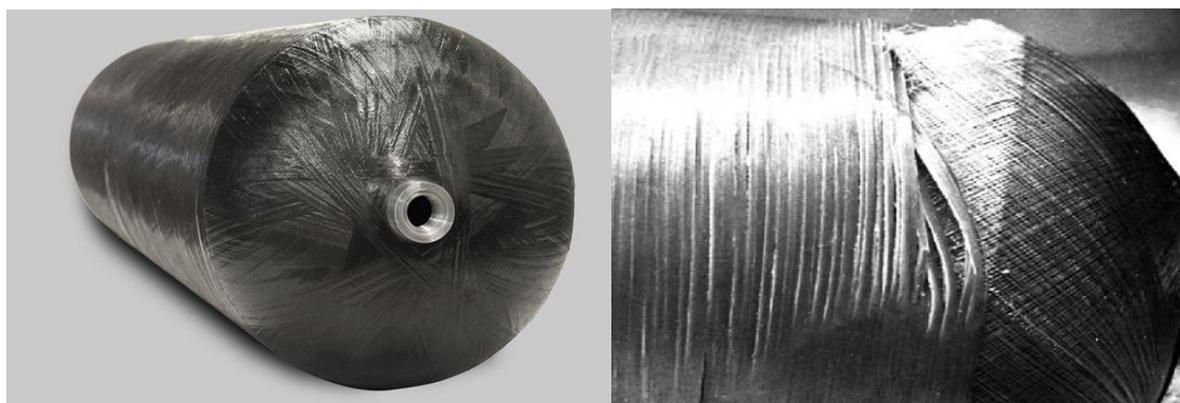


Рис. 1.4. Трещины, наблюдаемые в кольцевом слое (намоточный баллон)

Примечателен тот факт, что такого рода приводят к нарушению герметичности, но при этом фактически не оказывают влияние на разрушающее давление, так как не повреждают волокна. Так, в пассажирской авиации, космической отрасли использование композитов объективно ограничено вследствие пониженной весовой эффективности, когда происходит многократное, длительное использование. И в то же время они не представляют особой опасности при наличии лишь кратковременных нагрузок.

В качестве примера приведем эксперимент [31], который был организован с целью проверки герметичности ткани. В эксперименте произведено растяжение испытуемых образцов из углеродной стали и связующего. Размеры образцов: длина

– 240 мм, ширина – 60 мм, толщина – 0.7 мм. С целью фиксации нарушений герметичности были установлены датчики гелиевого детектора (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Растяжение, отслеживаемое датчиками гелиевого детектора [31]

На предварительном этапе было произведено испытание образца следующего рода: с круглым отверстием, заполненным однонаправленным углепластиком. Углепластик при этом был армирован ортогонально направлению нагружения (рис. 1.6).

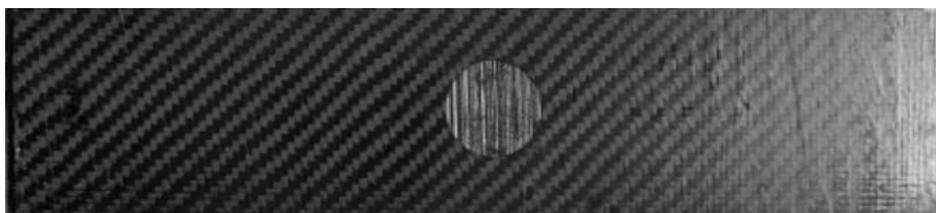


Рис. 1.6. Образец с круговым вырезом, заполнение однонаправленным углепластиком [31]

Результаты данного эксперимента подтвердили следующее: утрата герметичности произошла после деформации в размере 0,35% - такая ситуация типична для обычных современных изделий из углепластика. В том же время другой образец продемонстрировал сохранность герметичности и линейное поведение, будучи подвергнутым нагрузке до предельной деформации волокон в размере 1,6%.

Вышеприведенные данные указывают на то, что оболочка, изготовленная с применением метода выкладки или намотки, способна заменить в баллонах давления стандартного вида герметизирующий лейнер, произведенный из металла.

Подобная углеродная тонкая оболочка будет обладать специальной структурой. Замена будет способствовать значительному снижению веса баллонов.

### 1.2.2. Методы расчета и оптимизации композитных сосудов давления

В данном параграфе рассмотрены основные методы расчета композитных сосудов давления, а также приведены способы оптимизации баллонов.

Существует большое количество литературы, посвященной расчету и оптимизации композитных оболочек [32-33, 35, 39, 46, 53, 55, 64, 87, 110, 115, 118]. Выбор оптимальной структуры армирования позволяет добиться требуемых свойств сосудов высокого давления, однако при моделировании структуры следует учитывать возникающие поля напряжений в композитном материале. В настоящее время существуют компьютерные пакеты для их расчета, чем пользуются технологи и механики при проектировании донной части и полюсных отверстий баллонов. Помимо оптимизации структуры, необходимо обращать внимание на топологическую оптимизацию формы композитных баллонов. Прикладное значение имеет анализ методом рассчитанных интервалов для оценки того влияния, которое оказывает статистический разброс свойств материала, приложенных нагрузок и размеров каждого изделия.

В современной инженерии и науке моделирование разрушения композитных конструкций играет важную роль. Критерии прочности основаны на различных моделях разрушения материалов и представляют собой математические выражения, связывающие механические свойства материала, параметры нагрузки и параметры, характеризующие разрушение. Их использование позволяет оценить прочность и долговечность композитных конструкций, а также предсказать зоны повреждения и структурные изменения в материале при действии нагрузки. Несмотря на то, что эти критерии учитывают особенности композитных материалов, они имеют свои ограничения и не всегда могут полностью описать процессы разрушения. Поэтому в настоящее время исследования в области моделирования разрушения композитных конструкций активно продолжаются с целью разработки более точных критериев прочности и методов анализа.

Специфичность композитных материалов не дает основы для того, чтобы ориентироваться на определенный выбранный критерий прочности. Связано это с тем, что КМ характеризуются различными типами разрушения, а спектр их прочностных и упругих свойств достаточно широк [32]. Если упоминать распространенные в инженерной среде критерии, то упоминания заслуживают такие авторы, как Копнов В.А., Гондельблат И.И., Ашкенази Е.К., Цай-Ву, Малмейстер А.К., и другие [28-29, 36, 54, 79].

К методам проектного расчета и оптимизации структуры армирования композитных баллонов можно отнести следующие:

- МКЭ-расчеты НДС цилиндрической, донной частей и зон полюсных отверстий;
- Нитяная модель для выбора оптимальных углов армирования (и контуров днищ);
- Математические методы расчета композитных сосудов давления;
- Применяемый для расчета напряжений в симметричных парах слоев послойный метод;
- Упрощенный послойный метод;
- Оценка упругих свойств по Цаю;
- Методы построения предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев.

Каждый из представленных выше методов расчета и оптимизации композитных сосудов давления будет рассмотрен более подробно в главе 3.

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимизировать композитные сосуды давления (например, баллоны для сжатого газа) можно с помощью замены угла армирования, изменения числа пар слоев с различной ориентацией и использования критериев прочности. Все это будет способствовать повышению расчетного критического давления.

### 1.2.3. Технологии изготовления композитных сосудов давления

В данном разделе приведены основные методы изготовления конструкций из КМ на основе полимерной матрицы, которые используются при производстве летательных аппаратов [70-71].

В авиакосмической сфере, а также в сфере автомобилестроения неразрывно ведется создание современных материалов, а также их использование в технологическом процессе на производстве. Создание КМ, которые имеют уникальные свойства, а также обладают различными преимуществами, привело к тому, что композиционные материалы начали использовать вместо классических металлических конструкций.

Одним из наиболее известных методов производства армированных пластиков является намотка. Главная особенность данного метода состоит в том, что волокна укладываются в строго заданном направлении. С помощью этого метода создают высоконагруженные конструкции, в том числе, сосуды под высоким давлением. При разработке изделий для авиакосмической отрасли особое внимание уделяют элементам, работающим под высокой нагрузкой. Сосуды давления в летательных аппаратах — это баки, гидро- и газогенераторы и баллоны, которые изготавливают с применением различных методов сварки из высокопрочных сталей и титана. Для авиации особую роль играет вес конструкции, и в случае баллонов высокого давления, выполненных из композитных материалов, можно обеспечить облегчение конструкции в несколько раз и тем самым снизить расход топлива.

Высокая удельная прочность армирующих волокон достигается за счет ориентировки волокон в направлении наибольшей нагрузки. Данная технология была развита и в дальнейшем использована для создания высокопрочных сосудов давления цилиндрических и сферических форм.

Методы изготовления конструкций из КМ на основе полимерной матрицы бывают двух видов: прямые и непрямые [74].

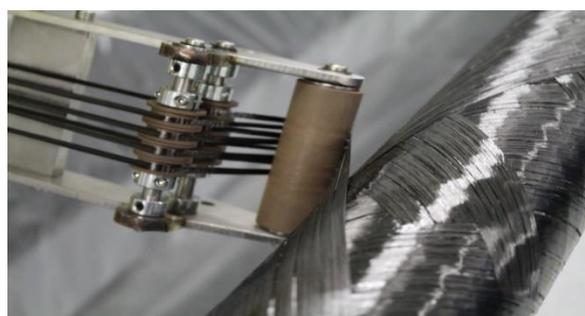
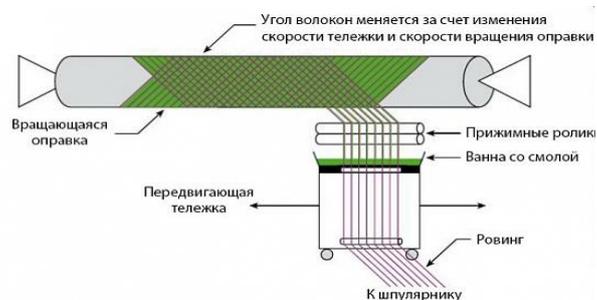
*Прямые методы* включают однооперационные методы, в которых из исходных реагентов получают готовый продукт. К таким методам относятся

«мокрая» намотка, пултрузия и другие (рис.1.7). В связи с тем, что в данных методах происходит одновременное образование как структуры материала, так и формы конструкционного элемента, несмотря на одностадийность методов, они являются технологически достаточно сложными в исполнении, в контроле и в необходимости проведения различных технологических операций.

*Непрямые методы* – это многооперационные методы, при применении которых происходит образование элементов конструкций из полуфабрикатов. Как правило, производство изделия включает несколько шагов, где отдельным этапом проводится пропитка армирующих материалов связующим, при которой получают подсушенные и частично отвержденные нити, жгуты, ленты или ткани. Использование данных методов имеет некоторые преимущества, так как происходит отделение конструкционных от химико-технологических этапов и изготовление полуфабрикатов (рис. 1.8) осуществляется отдельным производством.



а)



б)

Рис. 1.7. Прямые методы изготовления конструкций из КМ на основе полимерной матрицы: а) пултрузионный процесс будущего; б) «мокрая» намотка

При формообразовании детали или элемента конструкции используют прессовый, автоклавный и вакуумный методы, а также метод намотки. Получение готовой детали происходит после получения заготовки, произведенной либо намоткой на оправку, либо выкладкой в форму. При этом придается форма, размеры, происходит отверждение полимерного связующего. Намотка в процессе получения заготовки изделия часто используется для деталей, имеющих форму тел вращения, а выкладку применяют для конструкций более сложной формы. Давление, необходимое для изготовления, создается натяжением ленты при намотке, либо прикаткой заготовки. Следующей стадией формования является отверждение полимерной матрицы, при котором фиксируется желаемая форма изделия с необходимой структурой композита и его свойствами. Для получения качественной композиции важно тщательно следить за температурой и временем, которые в основном определяются типом связующего и геометрией детали. Например, эпоксидные и фенольные связующие затвердевают при температуре 130-180°C, кремнийорганические – при 200-220°C, полиимидные – при не более чем 350°C. На самом деле, время затвердевания становится понятным в ходе эксперимента. Изначальный ориентир составляет от 3 до 5 минут на каждый миллиметр толщины стенки. Заключительным шагом является доработка и сборка, состоящая в механической обработке: подрезании элемента, подпиливания и создании крепежных отверстий. Резка конструкционных материалов осуществляется на станках с твердосплавным и алмазным оборудованием. Соединение с другими деталями производят склейкой, механическим креплением и металлическими законцовками. Вышеописанные шаги в непрямых методах могут осуществляться как параллельно, так и последовательно в зависимости от того, какой метод изготовления был выбран.

## Виды полуфабрикатов

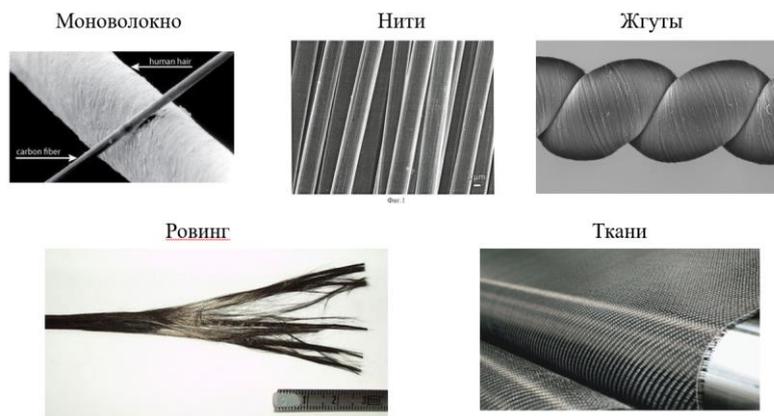
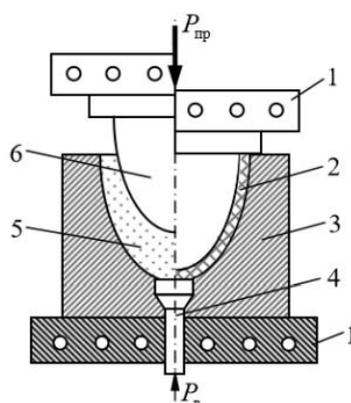


Рис. 1.8. Виды полуфабрикатов

### *Прессование деталей из волокнистых КМ*

Прессование широко используется для формования изделий крупносерийных производств, например, плоских плит и листов. Больше распространение получил метод при изготовлении деталей из волокнистых КМ.

Для прессования необходима пресс-форма, в которой создаются нужные давления и температура для формования детали из ПКМ и отверждения матрицы (рис. 1.9). Давление создается гидравлическим прессом, а высокая температура внутри пресс-формы достигается с помощью электронагревателей, находящихся в плитах матрицы и пуансона.



- 1 – плиты обогрева;
- 2 – отпрессованная деталь;
- 3 – матрица;
- 4 – выталкиватель;
- 5 – навеска полуфабриката;
- 6 – пуансон

Рис. 1.9. Пресс-форма

Прессованием получают детали из материалов с различным направлением армирующих волокон. При строго ориентированных волокнах в композитах со слоистой структурой часто используют заготовки из препрегов, и предварительно перед прессованием проводят операцию раскроя для получения заготовки нужной конфигурации. Резка полуфабриката (препрега) осуществляется ножом, лазером или струей воды. На препрег наносится разделительная защитная пленка, которая снимается при укладке слоев друг на друга. Данная конструкция предварительно прессуется и формуется в нагретом состоянии с целью сохранения расположения слоев и удаления воздуха, а затем помещается в полость матрицы, нагретой пресс-формы, где выдерживается для формовки. Полное смыкание пресс-формы проводят после перехода связующего в вязко-текучее состояние. Под давлением пресса происходит полное заполнения пространства между пуансоном и матрицей. Для лучшего размещения заготовки в форме часто проводят несколько подпрессовок пресс-формы (смыканий и размыканий). Далее при выдерживании при температуре и времени отверждения заготовки в пресс-форме образуется полимерная матрица, которая определяет размеры и форму детали. После формования под давлением от 0,2 до 10 МПа деталь вынимается с помощью выталкивателя. Прессованием получают полусферические и конические обтекатели, крышки люков, панели крыльев и т. д.

#### *Вакуумное и автоклавное формование*

Формование деталей проводят также вакуумным и автоклавным способом, где заготовку выкладывают на ровную или изогнутую поверхность для формования детали, которое происходит автоклавным методом (под действием сжатого газа) или вакуумным методом (создание разреженной атмосферы в замкнутом объеме (рис. 1.10)).

Методы имеют некоторые достоинства, такие как простота и небольшие капитальные вложения, так как формы намного дешевле форм для прессования. Вакуумное и автоклавное формование позволяет изготавливать сложнорельефные тонкостенные изделия. Автоклавный и вакуумный методы применяются, как

правило, для мелкосерийных производств деталей, панелей и отсеков летательных аппаратов сложной формы и больших размеров.

На рис. 1.11 представлена схема автоклава, основные элементы которого это эластичная диафрагма и форма. Автоклав состоит также из герметичного цилиндрического сосуда, с нагревательными элементами, заполненного азотом или воздухом. Размеры установки определяются габаритами изделия. Например, американская авиастроительная компания использует в своем производстве автоклав длиной 20 м и диаметром 6 м.

Отличительной особенностью двух данных методов является технология формования. Давление на формируемую заготовку прикладывается на верхнюю часть формы на эластичную диафрагму. Со стороны формы заготовка остается гладкой, а со стороны эластичной диафрагмы может быть шероховатой и неровной. Для соблюдения различных требований к заготовке могут быть использованы как вогнутые и плоские, так и выпуклые формы.

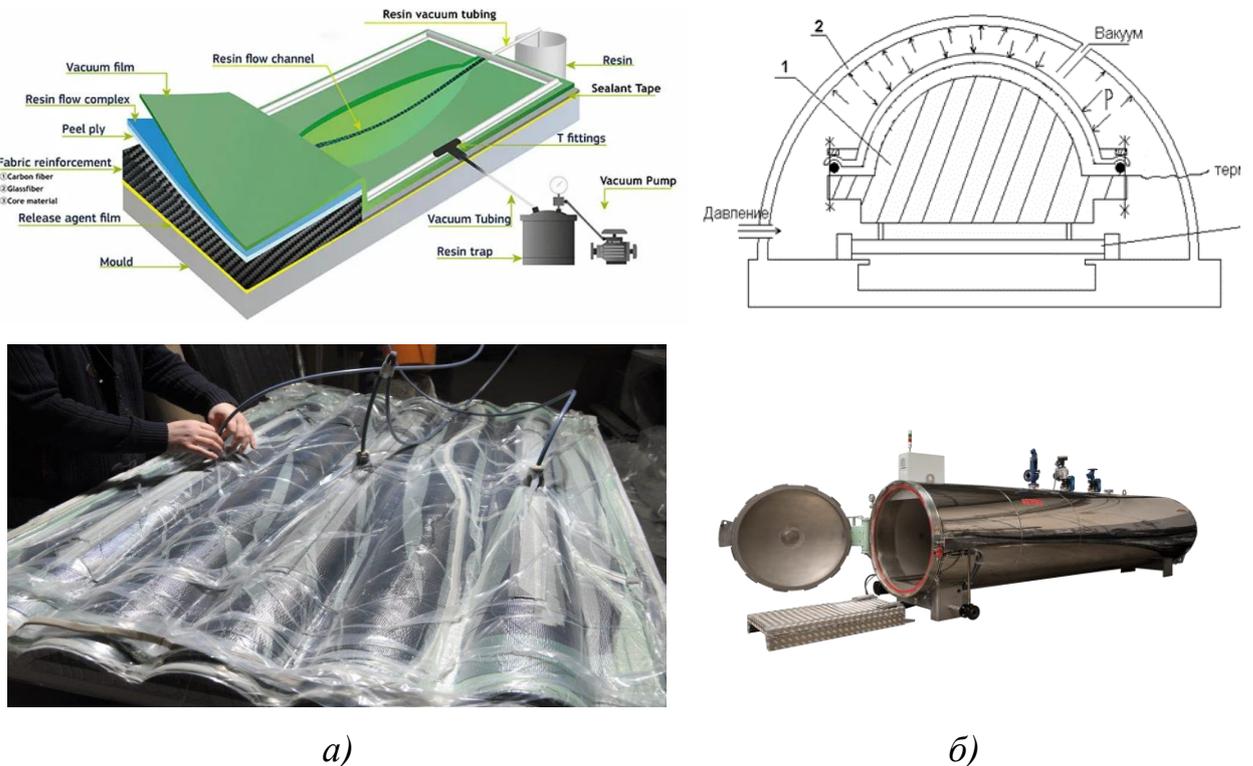
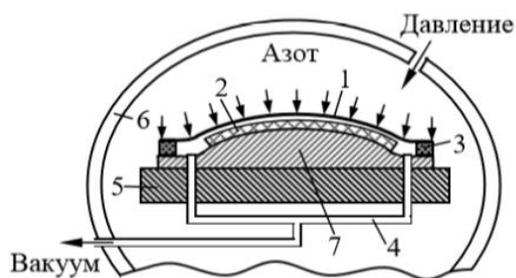


Рис. 1.10. Вакуумное и автоклавное формование



- 1 – эластичная диафрагма;
- 2 – формируемая заготовка;
- 3 – герметизирующая паста или жгут;
- 4 – вакуумная проводка;
- 5 – тележка для загрузки формы с заготовкой;
- 6 – стенка автоклава;
- 7 – форма

Рис. 1.11. Автоклав

### *Основные этапы процесса намотки*

Метод непрерывной намотки позволяет получать армированные оболочки вращения сложной формы и различной структуры [48, 71]. Намоткой создаются конструкции или детали из композитов (рис. 1.12).



а)



б)

Рис. 1.12. Методы намотки композитных конструкций

Технологический процесс начинается с наладки станка для намотки, то есть с разработки и отладки программы для запуска автоматического процесса. В зависимости от того материала, который они используют, станки могут быть разделены на станки, предназначенные для намотки тканью, и станки, предназначенные для намотки узкой лентой либо нитями. Последняя группа станков включает станки разнообразных конструкций, отличающихся по назначению и используемых в них системах управления.

Наиболее простыми в управлении считаются двухкоординатные системы, где основополагающим является вращение оправки, а подстраиваемым и управляемым – параллельные оси оправки движения раскладчика.

Многокоординатные системы управления учитывают больше число переменных и позволяют контролировать одновременно два или три движения раскладчика и вращение оправки. Данная система управления позволяет в результате получать изделия сложной формы.

Далее следует подготовка оправки для намотки и нанесение на нее антиадгезионного материала для легкого удаления изделия. Перед началом процесса для проверки рисунка проводят пробную намотку нескольких витков.

Заготовки получают путем ориентировки в разных направлениях пропитанного связующим армирующего материала на оправки либо вращающиеся формы, соответствующие форме и размерам необходимого элемента. При получении нужной толщины и структуры связующее в системе полимеризуют, оправка удаляется, но в некоторых случаях она остается, так как может выполнять свойства конструктивного элемента. После окончания намотки изделие помещают в автоклав или печь. При намотке материал натягивается для обеспечения ее устойчивости на поверхности оправки, плотной укладки, улучшения взаимодействия с полимерной матрицей и получения однородной структуры композита. Общая плотность и прочность изделия увеличивается, что позволяет в дальнейшем продлить долговечность изделия и повысить устойчивость материала к растрескиванию. Согласно имеющимся данным [71], 5-15% от разрушающего усилия нити является оптимальным значением их натяжения при намотке. Превышение значения натяжения может привести к уменьшению в материале связующего и деформации или разрушению волокон, что снижает общую прочность изделия из КМ. Значения натяжения меньше 5%, в свою очередь, могут вызвать низкое сцепление и плохое выравнивание волокон. После отверждения связующего в заданном режиме проводится охлаждение изделия. Затем для сосудов давления проводят термомеханическую обработку изделия, контроль прочности и герметичности.

### Виды и способы намотки

Существует несколько видов и способов намотки армирующего материала, выбор которых зависит от ориентации материала относительно оси оправки либо поверхности, а также, разумеется, от типа материала. Траектория, по которой происходит укладка армирующего материала, определяет различные виды намотки, такие как продольно-поперечная, полярная, комбинированная, радиальная, геодезическая.

Укладка геодезическим способом происходит по геодезическим линиям с некоторым углом укладки  $\theta$ . Геодезические линии являются кривыми на поверхности, дуги которых представляют собой наикратчайшее расстояние между их концами, которые в зависимости от поверхности (параболоиды, сферические, овалоиды, конические, цилиндрические и т.д.) могут быть прямыми, винтовыми линиями и кругами. Геодезическая укладка обеспечивает прочность конструкции по всем направлениям.

Для цилиндрических поверхностей геодезические представляют собой винтовые линии, и при геодезической намотке нить по касательной подходит к поверхности (рис. 1.13) и укладывается по геодезической линии с углом укладки, рассчитываемым по формуле:

$$\sin\theta_D = d / D.$$

В процессе укладки оправка вращается с постоянной скоростью, вдоль нее осуществляются возвратно-поступательные движения. Процесс продолжается до получения нужной толщины изделия, и в результате образуется структура из витков армирующего материала, пересекающихся между собой.

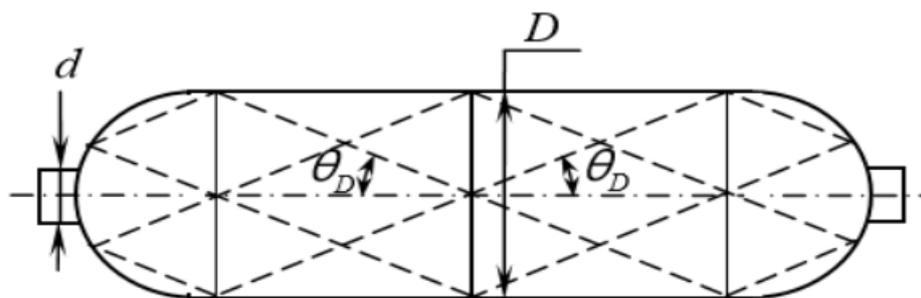


Рис. 1.13. Геодезическая намотка (на цилиндрическую поверхность)

Для конических оболочек в процессе геодезической намотки сохраняется та же механика и кинематика укладки, как и для цилиндрических поверхностей, однако присутствуют и некоторые отличия.

При конической намотке при сохранении постоянного угла укладки  $\theta$  и шага намотки будут происходить изменения толщины от большего диаметра – к меньшему. При намотке с переменным углом и шагом можно добиться равномерной толщины стенки изделия.

При выборе полярной намотки на замкнутой криволинейной поверхности вращения витки нити идут в одной плоскости. В процессе такой укладки траектория нити может отклоняться от идеального положения геодезической линии. Данный вид намотки является плоскостной и отличается от предыдущих отсутствием пересечений витков. Полярной намоткой можно изготавливать те же изделия и даже с большей производительностью, которые получены геодезической намоткой. Особенности полярной намотки, заключающиеся в отклонениях от положения геодезических линий, однако, могут приводить к соскальзыванию укладываемых нитей на оправке под действием натяжения. Для предотвращения этого коэффициент трения должен принять определенное значение. С целью сохранения равновесия нити должно быть выполнено условие:

$$\operatorname{tg}\phi < \mu,$$

где  $\phi$  – угол  $\max$  отклонения от геодезического витка плоскостного;  $\mu$  –  $\max$  коэффициент трения материала, укладываемого по поверхности оправки.

Кольцевой, также называемой радиальной, является намотка, которая осуществляется при близких к прямым углах. Данный тип намотки используют при укреплении цилиндрической части оболочек с овальными днищами, изготовленными с помощью намотки геодезической либо полярной.

Продольно-поперечная намотка представляет из себя производство цилиндрических оболочек узкими лентами. При этом данные ленты укладываются в кольцевом либо продольном направлении. Однако данный метод намотки является не самым перспективным в связи со сложностью соединения, полученной им цилиндрической оболочки с днищами.

Также существует несколько видов непрерывной намотки. Различают «сухую» и «мокрую» намотку. В первом случае лента, ткань или нить предварительно просушивается либо пропитывается, во втором связующее вводится непосредственно в процессе намотки.

### **Выводы по главе 1.**

1. Анализ литературы показал, что композитные сосуды давления широко применяются в различных областях промышленности. Изготовленные из композитных материалов сосуды высокого давления, обладают серьёзными преимуществами перед стальными аналогами. Существует большое разнообразие методов изготовления сосудов высокого давления из КМ. Самыми эффективными и чаще всего применяемыми на производстве являются методы намотки, вакуумное и автоклавное формование, прессование элементов из волокнистых КМ.

2. Важно разработать рекомендации по выбору методов формования изделий для получения сосудов с требуемыми свойствами на основе имеющихся технологических данных. Для конкретных задач важно подобрать подходящий способ намотки для получения качественных сосудов давления.

3. Для повышения эффективности использования сосудов высокого давления необходимо совершенствование методов их проектирования и оптимизации структуры армированных с учетом различных технологических факторов, влияющих на их механические свойства.

## ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ И РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

В данной главе приведен краткий анализ математического аппарата, необходимого в процессе проектирования рациональной структуры армирования для описания деформирования и разрушения композитных сосудов давления. Для анализа напряженно-деформированного состояния композитных материалах необходимо использовать определяющие соотношения, устанавливающие связь между тензором напряжений и тензором деформаций. При анализе распределения структурных напряжений в композитах из высокопрочных и высокомодульных волокон мы ограничиваемся уравнениями линейной теории анизотропной упругости и простыми гипотезами о равенстве продольных деформаций и поперечных напряжений в однонаправленных композитах (п. 2.1). Элементы наследственной теории ползучести с учетом климатических факторов рассмотрены в п. 2.2. Важным подходом для оценки устойчивости деформирования тонкостенных пластин и оболочек при плоском напряженном состоянии является применение критериев, учитывающих различные механизмы разрушения (п. 2.3 – 2.5).

### 2.1. Теория упругости анизотропных многослойных композитов

#### *Обобщенный закон Гука*

Зависимость между механическими деформациями и напряжениями определяется уравнениями механики деформируемого твердого тела. Построение функциональной зависимости отражает биективность между элементами двух множеств. Механика разрушения является частью механики твердого тела и определяет границы применения уравнений для пределов прочности материала.

#### *Зависимости напряжения от деформации для анизотропных материалов*

Обобщенный закон Гука, связывающий напряжения с деформациями справедлив для сложного напряженного состояния и для анизотропных материалов в общем виде, записывается следующим образом [8]:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j, \quad (2.2)$$

где  $i, j = 1, \dots, 6$ ,  $\sigma_i$  – компоненты тензора напряжений,  $C_{ij}$  – тензор упругих модулей,  $S_{ij}$  – матрица податливости, а  $\varepsilon_i$  – компоненты матрицы деформаций. Известно, что использование технических сдвиговых деформаций вместо тензорных деформаций нарушает тензорную запись закона Гука. Упругий потенциал гарантирует симметрию тензора упругих модулей и матрицы податливостей в (2.1), (2.2) относительно индексов  $i, j$ . Для малых деформаций пренебрегают тензором поворота, считая тензоры напряжений и деформаций симметричными (гипотеза парности касательных напряжений).

Компоненты напряжений и система координат с осями 1, 2 и 3 показаны на рис. 2.1. В таблице 2.1 в краткой и развернутой форме приводятся обозначения компонент  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ , где  $\gamma_{ij}$  – техническая деформация сдвига, а  $\varepsilon_{ij} (i \neq j)$  – тензорная сдвиговая деформация.

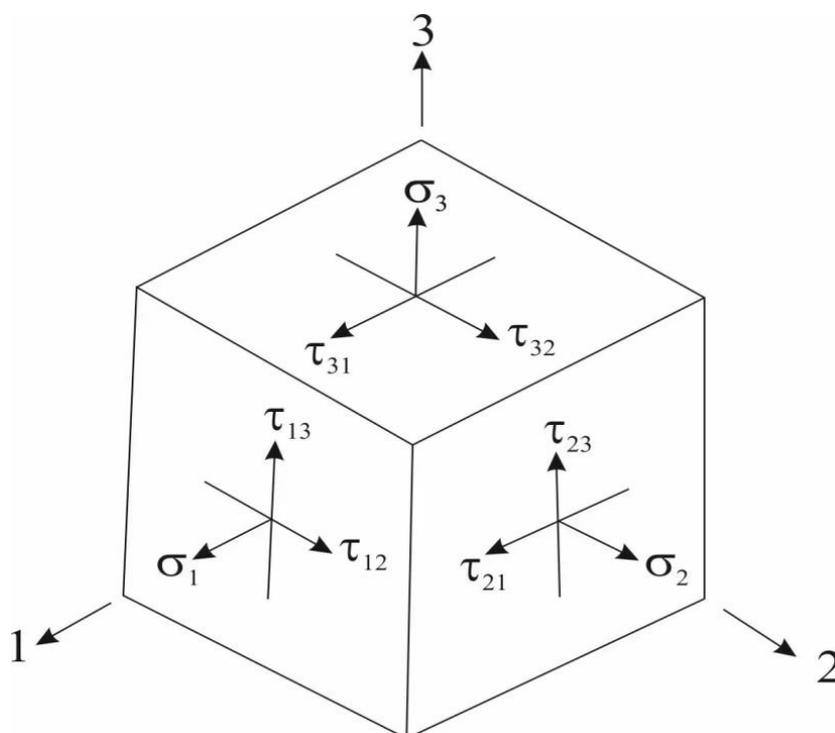


Рис. 2.1. Компоненты тензора напряжений в элементе

Таблица 2.1. Краткая и развернутая формы обозначений компонент напряжений и деформаций

Напряжения					
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$
$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\tau_{23} = \sigma_{23}$	$\tau_{31} = \sigma_{31}$	$\tau_{12} = \sigma_{12}$
Деформации					
$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$
$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{22}$	$\varepsilon_{33}$	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$

Частным случаем анизотропных материалов являются ортотропные материалы, которые имеют три ортогональные плоскости упругой симметрии и обладают одинаковыми свойствами в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Закон Гука записывается в виде (2.3) для ортотропного материала, где матрица податливости может быть выражена через технические константы формулой (2.4) [76].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mu_{21}/E_2 & -\mu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\mu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{13}/E_1 & -\mu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где  $E_1, E_2$  и  $E_3$  – модули Юнга в направлениях 1, 2 и 3,  $G_{23}, G_{31}$  и  $G_{12}$  – модули сдвига в плоскостях 2-3, 3-1 и 1-2, а  $\mu_{ij}$  – коэффициенты Пуассона, где  $\mu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$  – при растяжении в направлении оси  $i$ . Оси координат (1, 2 и 3) в однонаправленной армированной пластине показаны на рис. 2.2.

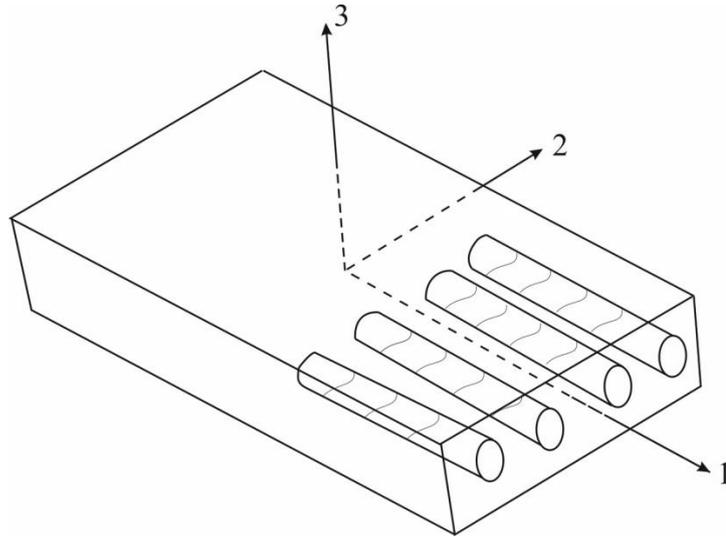


Рис. 2.2. Однонаправленно армированная пластина

Так как матрицы жёсткости и податливости являются взаимнообратными, то для ортотропного материала можно найти компоненты матрицы жёсткости.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (S_{22} \cdot S_{33} - S_{23}^2) / S; C_{12} = (S_{13} \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{33}) / S; \\
 C_{13} &= (S_{12} \cdot S_{23} - S_{13} \cdot S_{22}) / S; C_{22} = (S_{33} \cdot S_{11} - S_{13}^2) / S; \\
 C_{23} &= (S_{12} \cdot S_{13} - S_{23} \cdot S_{11}) / S; C_{33} = (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2) / S; \\
 C_{44} &= 1 / S_{44}; C_{55} = 1 / S_{55}; C_{66} = 1 / S_{66};
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$S = S_{11} \cdot S_{22} \cdot S_{33} - S_{11} \cdot S_{23}^2 - S_{22} \cdot S_{13}^2 - S_{33} \cdot S_{12}^2 + 2 \cdot S_{12} \cdot S_{23} \cdot S_{13}.$$

Подставив компоненты матрицы податливости из (2.4) в (2.5), получим компоненты матрицы жёсткости, выраженные через технические константы ортотропного материала [8].

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (1 - \mu_{23} \cdot \mu_{32}) / (E_2 \cdot E_3 \cdot T); \\
 C_{12} &= (\mu_{21} + \mu_{31} \cdot \mu_{23}) / (E_2 \cdot E_3 \cdot T) = (\mu_{12} + \mu_{32} \cdot \mu_{13}) / (E_1 \cdot E_3 \cdot T); \\
 C_{13} &= (\mu_{31} + \mu_{21} \cdot \mu_{32}) / (E_2 \cdot E_3 \cdot T) = (\mu_{13} + \mu_{12} \cdot \mu_{23}) / (E_1 \cdot E_2 \cdot T); \\
 C_{22} &= (1 - \mu_{13} \cdot \mu_{31}) / (E_1 \cdot E_3 \cdot T); \\
 C_{23} &= (\mu_{32} + \mu_{12} \cdot \mu_{31}) / (E_1 \cdot E_3 \cdot T) = (\mu_{23} + \mu_{21} \cdot \mu_{13}) / (E_1 \cdot E_2 \cdot T); \\
 C_{33} &= (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21}) / (E_1 \cdot E_2 \cdot T); C_{44} = G_{23}; C_{55} = G_{31}; C_{66} = G_{12}; \\
 T &= (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21} - \mu_{23} \cdot \mu_{32} - \mu_{31} \cdot \mu_{13} - 2 \cdot \mu_{21} \cdot \mu_{32} \cdot \mu_{13}) / (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

При плоском напряженном состоянии для однонаправленного ортотропного монослоя, расположенного параллельно плоскости 1-2 (рис. 2.2), волокна которого направлены вдоль оси 1, будут выполняться следующие условия:

$$\sigma_3 = 0; \tau_{23} = 0; \tau_{31} = 0; \varepsilon_3 = S_{13} \cdot \sigma_1 + S_{23} \cdot \sigma_2; \gamma_{23} = 0; \gamma_{31} = 0. \quad (2.7)$$

Тогда, принимая во внимание (2.7), формулу (2.3) можно свести к такому виду, как:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где компоненты матрицы податливости определяются следующей формулой

$$S_{11} = 1/E_1; S_{12} = -\mu_{12}/E_1 = -\mu_{21}/E_2; \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, ; S_{66} = 1/G_{12}. \quad (2.9)$$

Закон Гука при плоском напряженном состоянии для системы координат (1,2,3), связанной с ориентацией волокон, для ортотропного материала можно записать в виде (2.10):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [C] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где компоненты матрицы жёсткости находятся либо через компоненты матрицы податливости с помощью формулы (2.11), либо через технические константы материала (2.12):

$$C_{11} = S_{22} / (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2); C_{12} = S_{12} / (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2); \quad (2.11)$$

$$C_{22} = S_{11} / (S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2); C_{66} = 1/S_{66}.$$

$$C_{11} = E_1 / (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21});$$

$$C_{12} = \mu_{12} \cdot E_2 / (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21}) = \mu_{21} \cdot E_1 / (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21}); \quad (2.12)$$

$$C_{22} = E_2 / (1 - \mu_{12} \cdot \mu_{21}); C_{66} = G_{12}.$$

*Влияние ориентации и объёмной доли волокон на компоненты матрицы жёсткости однонаправленного композита*

Ориентация волокон монослоев в композитном элементе конструкции часто находится под разными углами друг к другу, и локальные оси 1,2 и 3 не совпадают с глобальной системой координат  $(x, y, z)$ . В этом случае упругие свойства однонаправленных монослоев необходимо связать с глобальной системой координат, что требует их преобразования: если волокна ПКМ повернуть на угол  $\theta$  относительно оси  $x$  (рис.2.3), то угловая зависимость напряжений и деформаций может быть записана в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ s \cdot c & -s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ s \cdot c & -s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

где  $s = \sin(\theta)$ ,  $c = \cos(\theta)$ .

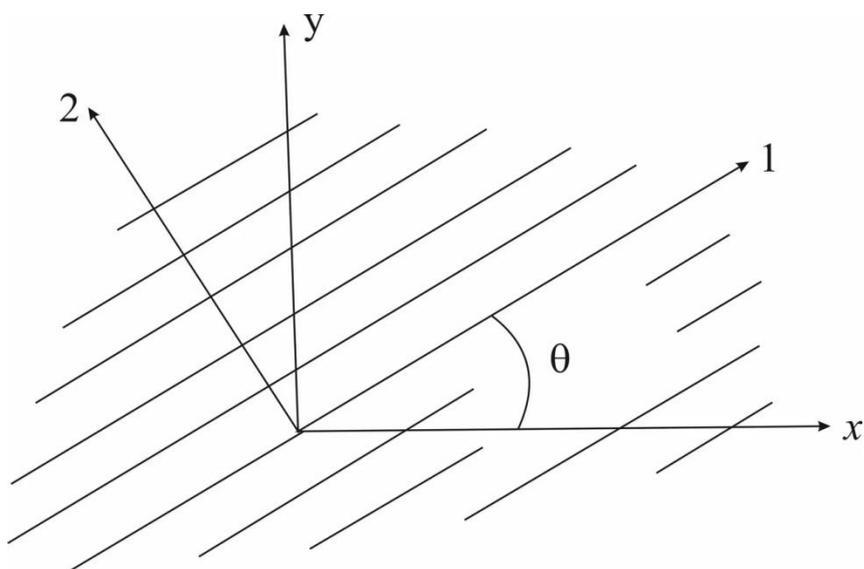


Рис. 2.3. Положительный поворот главных осей материала относительно произвольной оси  $x$

В сокращенном виде формулы (2.13) и (2.14) будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

если ввести матрицы  $[T]$  и  $[R]$ :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2 \cdot s \cdot c \\ s^2 & c^2 & -2 \cdot s \cdot c \\ -s \cdot c & s \cdot c & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Используя матрицу  $[R]$ , которая подразумевает отличие тензорной сдвиговой деформации от технической сдвиговой деформации, тензор деформации может быть записан в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Для плоского напряженного состояния получаем:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot [C] \cdot [R] \cdot [T] \cdot [R]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$[C'] = [T]^{-1} \cdot [C] \cdot [R] \cdot [T] \cdot [R]^{-1}. \quad (2.22)$$

Рассматривая (2.22) в системе координат  $(x, y)$ , закон Гука для однонаправленных композитов в напряженном состоянии, когда направление волокон находится под углом к оси  $x$ , можно записать в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [C'] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где компоненты матрицы жёсткости  $C'_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11} \cdot c^4 + 2 \cdot (C_{12} + 2 \cdot C_{66}) \cdot s^2 \cdot c^2 + C_{22} \cdot s^4; \\
C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4 \cdot C_{66}) \cdot s^2 \cdot c^2 + C_{12} \cdot (s^4 + c^4); \\
C'_{22} &= C_{11} \cdot s^4 + 2 \cdot (C_{12} + 2 \cdot C_{66}) \cdot s^2 \cdot c^2 + C_{22} \cdot c^4; \\
C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2 \cdot C_{66}) \cdot c^3 \cdot s + (C_{12} - C_{22} + 2 \cdot C_{66}) \cdot s^3 \cdot c; \\
C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2 \cdot C_{66}) \cdot s^3 \cdot c + (C_{12} - C_{22} + 2 \cdot C_{66}) \cdot c^3 \cdot s; \\
C'_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2 \cdot C_{12} - 2 \cdot C_{66}) \cdot s^2 \cdot c^2 + C_{66} \cdot (s^4 + c^4).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Упругие свойства однонаправленных композитов также зависят от объемной доли волокон и от упругих свойств компонентов. Исходя из гипотезы о равенстве продольных деформаций, поперечных и сдвиговых напряжений в компонентах (в волокнах и матрице), упругие свойства однонаправленных композитов можно оценить по следующим формулам [8]:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_{1f} \cdot V_f + E_{1m} \cdot (1 - V_f); E_2 = E_{2f} \cdot E_{2m} / (E_{2m} \cdot V_f + E_{2f} \cdot (1 - V_f)); \\
G_{12} &= G_{12f} \cdot G_{12m} / (G_{12m} \cdot V_f + G_{12f} \cdot (1 - V_f)); \\
\mu_{12} &= \mu_{12f} \cdot V_f + \mu_{12m} \cdot (1 - V_f),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где  $E_{1f}, E_{2f}$  и  $G_{12f}$  – модули Юнга и модуль сдвига для волокна,  $E_{1m}, E_{2m}$  и  $G_{12m}$  – модули Юнга и модуль сдвига для матрицы,  $\mu_{12f}$  и  $\mu_{12m}$  – коэффициенты Пуассона, применяемые для матрицы и волокна, которые предполагаются изотропными, а  $V_f$  – объёмная доля волокон.

## 2.2. Элементы наследственной теории ползучести с учетом климатических факторов

В 40-х годах в связи с расширяющимся использованием газовых турбин в промышленности стали проявляться некоторые проблемы, связанные с изменением предела прочности материала, находящегося под длительной нагрузкой. В ходе эксплуатации зазор между корпусом турбины и кромкой лопатки с течением времени демонстрировал, что в свою очередь могло привести к аварии и полной неисправности турбины. Во-первых, ярко выражены явления ползучести,

а во-вторых, что особенно важно, в турбинах. К аварийным ситуациям приводит не потеря прочности, а деформация с течением времени [62, 94, 106]. Для повышения КПД диаметр турбины должен быть как можно больше, а зазор между лопатками и корпусом - как можно меньше. Другими словами, эффективными условиями являются наибольшие растягивающие и центробежные силы, наибольшая температура, т.е. наибольшая скорость ползучести, но наименьшая допустимая деформация.

Прогнозирование деформации при длительной нагрузке и эксплуатации является важной задачей при проектировании и введении в работу турбин. Ползучесть – это свойство материала, при котором происходит деформация твердого тела, проявляющаяся при длительной нагрузке или механическом напряжении [106]. Еще одно немаловажное явление, которое необходимо описывать при приложении напряжения — это релаксация, которая заключается в самопроизвольном рассеянии напряжения с течением времени при постоянной деформации. Видно, что необходимо разработать теоретическое описание явления ползучести и релаксации, связанные со структурными изменениями в твердом теле, которые по своей природе схожи и будут описываться одним набором параметров. Пример, качественно описывающий данное явление, это переполненный автобус. При открытии дверей автобуса люди начинают заходить, создавая давку, и таким же образом ведут себя частицы материала при нагрузке. Однако со временем люди распределяются и рассаживаются по местам, и становится свободнее, чем образно можно описать релаксацию.

При работе газотурбинных двигателей может наблюдаться ползучесть, что связано с приложением постоянного напряжения. Релаксация проявляется, когда при больших температурах производят ослабление и затяжку болтов лопасти турбины.

#### *Исследование ползучести и релаксации*

Для изучения явления ползучести проводят эксперимент. Для исследования необходимо взять образец, с постоянно действующей на него силой (рис. 2.4), и проводить измерение длины рабочей части. В результате получают кривые

ползучести. Данные кривые представляют собой при разных напряжениях  $\sigma$  зависимость деформации от времени (рис. 2.5) [105].

Такая кривая описывает поведение материала в зависимости от напряжения и времени в условиях постоянных значений температуры и напряжения. Она включает три основных участка.

Первый участок, обозначенный как I, представляет собой участок упрочнения, где наблюдается неустановившаяся ползучесть. В этом диапазоне материал подвергается деформации, однако еще не достигает установившегося состояния. Это связано с тем, что механизмы ползучести не полностью активизированы и требуется время для их функционирования.

Второй участок, обозначенный как II, представляет собой установившуюся ползучесть. На этом участке механизмы ползучести полностью развиты и материал достигает устойчивого состояния, где деформация происходит с постоянной скоростью. Этот участок является самым длительным в жизненном цикле материала и его длительность определяется его свойствами и эксплуатационными условиями.

Третий участок, обозначенный как III, представляет собой ускоренную ползучесть. На этом участке напряжение и температура поддерживаются на постоянных значениях, но происходит ускоренная деформация материала. Этот участок характеризуется неустойчивым поведением, где деформация возрастает с течением времени. Такое поведение может быть связано с различными факторами, такими как повышенная температура, недостаточное упрочнение материала и другими воздействиями.

Кривая ползучести является важным инструментом для понимания долговечности материалов и их поведения в условиях постоянных нагрузок и температур. Изучение этой кривой позволяет инженерам и исследователям оптимизировать материалы и проектировать конструкции, чтобы минимизировать влияние ползучести и обеспечить долговечность и надежность изделий.

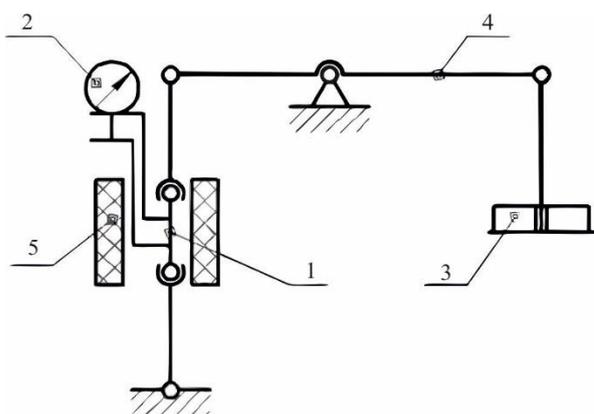


Рис. 2.4. Исследование ползучести (схема эксперимента):  
1 – образец; 2 – печь; 3 – индикатор деформации; 4 – рычажная система; 5 – груз [94]

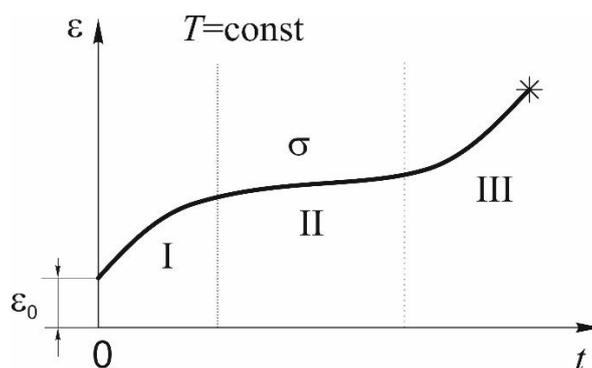


Рис. 2.5. Кривая ползучести:  
I – неустойчивая (ускоренная) ползучесть;  
II – установившаяся ползучесть (участок упрочнения);  
III – неустойчивая (ускоренная) ползучесть ( $\sigma = \text{const}$ ;  $T = \text{const}$ ) [94]

Для обеспечения постоянного напряжения вместо силы эксперимент проводят в воде, прикрепляя к грузу тело. Для данного тела осуществляется погружение по мере того, уменьшается поперечное сечение образца и он растягивается. При этом определение размеров тела производится с помощью коэффициента Пуассона, который рассчитывается по поперечному сжатию и продольному растяжению. Для сохранения постоянного уровня воды добавляют на поверхность воды масло, но чаще все сохраняют постоянной силу [94].

Кривые релаксации можно получить экспериментально (рис. 2.6, 2.7).

Для эксперимента на релаксацию необходимо обеспечить слежение за изменением растягивающей силы при сохранении удлинения образца. Жесткость системы позволяет зафиксировать деформацию, а добавление в систему динамометра дает возможность определить величину изменения силы (напряжения). В связи с тем, что эксперименты на релаксацию необходимо проводить очень точно и тщательно, то на практике, как правило, для изучения свойства ползучести материала проводят эксперимент для получения кривых ползучести при разных значениях постоянного напряжения.

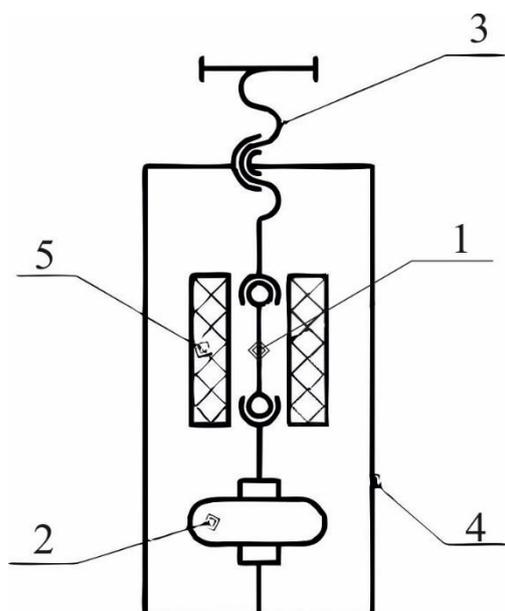


Рис. 2.6. Изучение релаксации (схема эксперимента):  
 1 – динамометр; 2 – печь;  
 3 – нагружающий винт; 4 – образец; 5 – корпус [94]

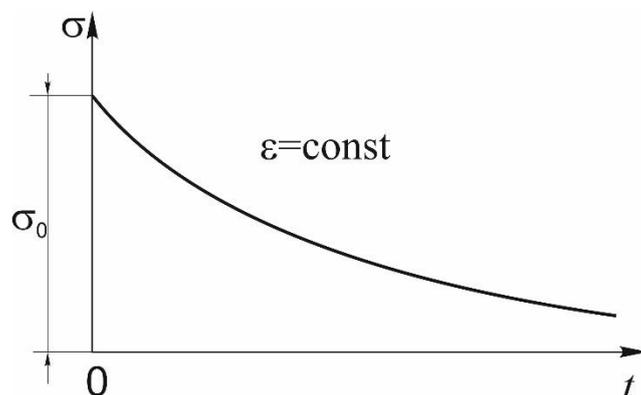


Рис. 2.7. Кривая релаксации напряжений ( $\varepsilon = \text{const}$ ) [94]

### 2.3. Критерии прочности намоточных сосудов давления, учитывающие направленные механизмы разрушения

Учитывая тот факт, что разрушение волокнистого композита имеет направленный характер, целесообразно некоторое предельное соотношение между напряжениями [92] принять в качестве условия прочности. Такие напряжения действуют в плоскости возможного разрушения, и эта плоскость включает в себя одно из направлений армирования. Если  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  представляют собой нормальное и касательное напряжение, то условие прочности примет вид

$$\Phi(\sigma_n, \tau_n) = 1. \quad (2.26)$$

*Растяжение в случае ортогонально армированных пластиков.* Для такого рода пластиков, учитывая тот факт, что характер растяжения имеет совершенную определенность, целесообразно применить условие (2.26), поставленное на одной из двух взаимно перпендикулярных площадок. Площадки при этом содержат волокна какого-либо семейства армирования [52]. Здесь простейшее

предположение о виде функции  $\Phi$  в (2.26) состоит в ее линейности. В таком случае на одной ( $n_1$ ) либо другой ( $n_2$ ) плоскости разрушения можно выписать два критерия (плоскость связана с направлением волокон какого-либо ортогонального семейства):

$$\sigma_{n_1} + m_1 \tau_{n_1} = \sigma(0) = c_1; \quad (2.27)$$

$$\sigma_{n_2} + m_2 \tau_{n_2} = \sigma(90) = c_2. \quad (2.28)$$

Формулы преобразования тензора напряжений при повороте координатных осей на угол  $\varphi$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - 2\tau_{12} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_{n_2} &= \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi + 2\tau_{12} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{n_1} &= \tau_{n_2} = \tau_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Применим данные формулы для случая растяжения под углом  $\varphi$  к какому-либо из семейств волокон ( $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma(\varphi)$  – прочность при растяжении под углом  $\varphi$  к волокнам).

В таком случае из критериев (2.27) и (2.28) будут получены зависимости прочности  $\sigma(\varphi)$  от угла вырезки образца  $\varphi$ :

$$\sigma(\varphi) = \frac{c_1}{\cos^2 \varphi + m_1 \sin \varphi \cos \varphi} \quad \text{при } \varphi \leq \varphi^*; \quad (2.30)$$

$$\sigma(\varphi) = \frac{c_2}{\sin^2 \varphi + m_2 \sin \varphi \cos \varphi} \quad \text{при } \varphi > \varphi^*. \quad (2.31)$$

При этом осуществляется переход от одной плоскости разрушения к другой при угле  $\varphi^*$ . В свою очередь, он находится из равенства (2.30) и (2.31), которое приводит к квадратному уравнению относительно  $\operatorname{tg} \varphi^*$ . И него следует

$$\varphi^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \left( m_1 \varepsilon - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_1 \varepsilon)^2 + 4\varepsilon} \right), \quad (2.32)$$

где  $\varepsilon = c_2 / c_1$ .

Как видно на рис. 2.8 (сплошные линии), зависимость (2.30) достоверно описывает при растяжении под углами от  $0^\circ$  до  $45^\circ$  изменение прочности армированных пластиков ортогонального типа [95,99].

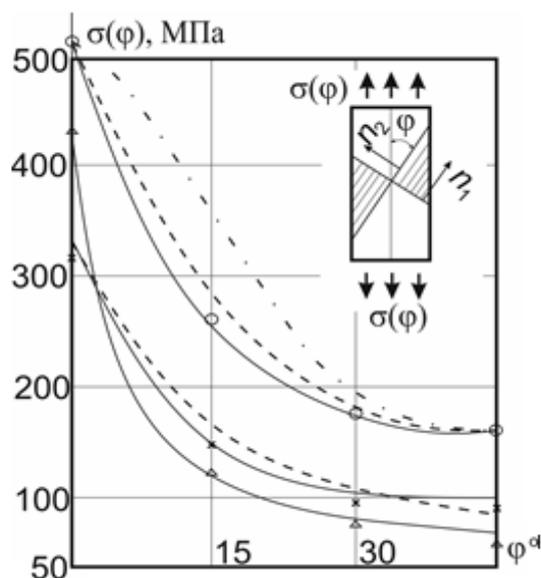


Рис. 2.8. Зависимости прочности ортогонально армированных пластиков от направления вырезки образцов:

× – углепластик; Δ – боропластик; o – стеклопластик; сплошные кривые – линейный критерий; штриховые – квадратичный; штрих-пунктирные – инвариантный

При одинаковом числе слоев  $N_1$  и  $N_2$  в случае «равнопрочных» пластиков (0/90) в двух ортогональных направлениях  $c_1 = c_2$ ,  $m_1 = m_2$  и  $\varphi^* = 45^\circ$ . Формулы (2.30) и (2.31) описывают зависимость прочности от угла, симметричную относительно угла  $45^\circ$ :  $\sigma(\varphi) = \sigma(90^\circ - \varphi)$  (рис. 2.9, в).

При  $N_2 = 0$  будет наблюдаться рассмотренный ниже случай однонаправленного материала. В то же время в случае неравных  $N_1$  и  $N_2$  прочности вдоль волокон пропорциональными числу слоев считаются следующим образом:  $c_1 / c_2 = N_1 / N_2$ . Также при допущении о том, что сдвиговая прочность вдоль волокон  $c_1 / m_1$  или  $c_2 / m_2$  слабо зависит от числа слоев (приблизительно к прочности полимерной матрицы), то в таком случае  $m_2 / m_1 = c_1 / c_2 = N_1 / N_2$ . Тогда для известной структуры ортогонального армирования с известным числом слоев  $N_1$  и  $N_2$  всю немонотонную зависимость прочности от направления растяжения есть возможность описать всего лишь на основании двух экспериментов (рис. 2.9, з), к

примеру, для равных 0 и 45° углов вырезки. При этом угол смены плоскости разрушения будет определяться из условия (2.32).

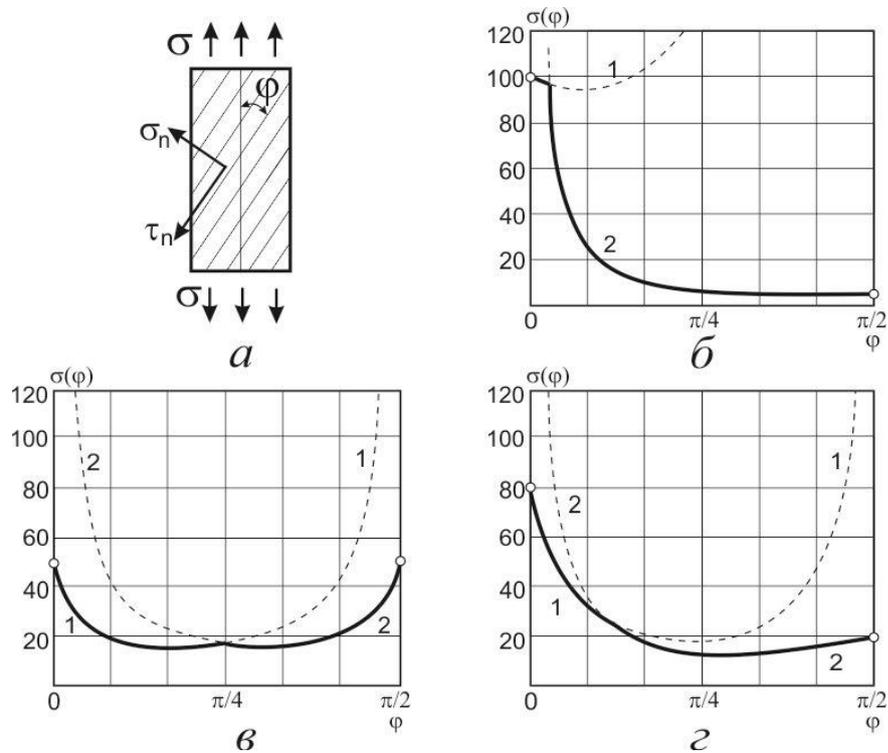


Рис. 2.9. Схема нагружения (*a*) и зависимости прочности армированных композитов ортогонального типа от направления вырезки образцов по двум линейным критериям прочности: 1 – (2.30); 2 – (2.31); *б* – однонаправленный композитный материал (0); *в* – «равнопрочный» (0/90); *г* – (0<sub>4</sub>/90<sub>1</sub>)

На рис. 2.10 данные для углепластика (см. рис. 2.8) нанесены в координатах  $\sigma_n = \sigma(\varphi)\cos^2 \varphi$ ,  $\tau_n = \sigma(\varphi)\sin \varphi \cos \varphi$ . В таких координатах прямая линия (2.27), приводящая к зависимости (2.30), хорошо описывает и эксперимент, и участок эллипса

$$\left(\frac{\sigma_{n1}}{\sigma(0)}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{\tau(0)}\right)^2 = 1. \quad (2.33)$$

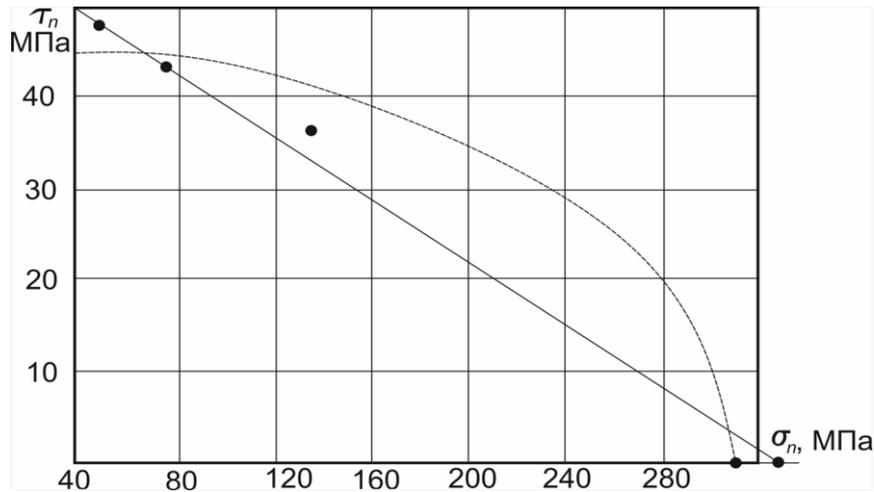


Рис. 2.10. Предельная кривая для углепластика (0/90) в координатах  $\sigma_n, \tau_n$

При подстановке (2.29) в (2.33) приходим к выражению

$$\sigma(\varphi) = \left( \cos^4 \varphi / \sigma(0)^2 + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi / \tau(0)^2 \right)^{-1/2}. \quad (2.34)$$

Расчеты по формуле (2.34) приведены на рис. 2.8 штриховыми линиями, штрих-пунктирными – по  $(\sigma_1 / X)^2 + (\sigma_2 / Y)^2 - \gamma \sigma_1 \sigma_2 / (XY) + (\tau_{12} / S)^2 = 1$ , в меньшей степени согласующейся с экспериментом и в то же время приводящей к более долгим и громоздким расчетным выражениям. Предпочтение следует отдавать линейным зависимостям (2.27) и (2.28) ввиду их удобства и простоты в обработке результатов в координатах  $\sigma_n, \tau_n$ .

При этом кривые (2.30) и (2.31) являются немонотонными и совместно образуют  $\omega$ -образную кривую (см. рис. 2.9). Имеется в виду, что угол минимума кривой (2.30)  $\varphi'_1 = \frac{1}{2} \arctg m_1$  лежит левее  $\varphi^*$ , а угол минимума кривой (2.31)

$\varphi'_2 = \frac{1}{2} \arctg(-m_2)$  лежит правее  $\varphi^*$ .

#### 2.4. Механика роста расслоений и расщеплений при различных условиях (циклического и динамического) нагружения

В полимерных материалах наблюдаются различные виды разрушения: расслоение (*delamination*), при котором образуются трещины границам слоев и образование слоев, и расщепление (*splitting*), при котором образуются трещины вдоль волокон и образованием щепок из волокон [42, 66-68, 108]. Как правило,

дефект, появляющийся в процессе расслоения или расщепления, называется трещина расслоения или трещина расщепления, или просто расслоение или расщепление соответственно. Например, расслоение фанеры и расщепление древесины.

Часто бывает сложно сформулировать критерии разрушения, выраженные через критические напряжения, так как в конце трещины напряжение равно бесконечности, поэтому вводят коэффициент интенсивности напряжения. В направлении нагружения расщепления нарастают, и могут сопровождаться эффектами выщелкивания материала при сжатии или перескока трещины при растяжении. Продольная трещина в данном направлении не вносит сильных возмущений в поле напряжений.

В механике дефектов и разрушения было показано соответствие между энергетическим и силовым подходами, а также связь удельной работы разрушения с трещиностойкостью [130]. Зная эту идентичность и применяя эти подходы к композитам, можно применить энергетические критерии для описания механизма разрушения, например, расслоение или расщепление, и определения критериев для оценки опасности при разрушении композитов, которые линейно деформируются вдоль волокон.

#### *Энергетический критерий расслоения и масштабный эффект прочности*

Через призму термодинамики критерий разрушения можно представить в виде (2.33), где  $dA$  – совершаемая над телом механическая работа,  $dU$  – сумма приращений накопленной упругой энергии,  $dR$  – работа разрушения и  $dT$  – диссипация энергии:

$$dA = dU + dR + dT. \quad (2.35)$$

При этом отметим, что дифференцирование проводится либо по времени, либо по площади трещины –  $S$ . После этого представим работу разрушения в виде  $R = \gamma S$ , где  $\gamma$  – удельная работа разрушения.

В разностной форме через начальное  $U_0$  и конечное состояние  $U_1$  образца можно записать энергетический критерий расслоения. Пренебрегая диссипацией

энергии  $T$  в уравнении (2.35) получаем критерий, при котором энергия будет превышена на величину работы разрушения  $R$ , которая пропорциональна площади трещины.

Из-за небольшого времени разрушения в системе не учитывается дополнительная работа по смещению захватов системы нагружения. При данном условии критическое напряжение может быть найдено из уравнения

$$U_0 = U_1 + R. \quad (2.36)$$

В качестве примера рассмотрим стержень с параметрами:  $S$  – площадь сечения при действующем напряжении  $\sigma$ ,  $L$  – длина. В таком случае упругая энергия будет выражена формулой  $U_0 = \frac{1}{2}\sigma^2 LS/E$ , где  $E$  – модуль Юнга в направлении растяжения. При действии накопленной упругой энергии за время разрушения  $\tau$  в рассматриваемом стержне будет произведено разрушение (он разделится на две части). И если вся упругая энергия переходит в разрушение  $U_0 = R$ , то можно оценить нижнюю границу прочности:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{L}}, \quad (2.37)$$

и данная оценка будет корректна при  $L \leq \tau c$ , где  $c$  – скорость распространения упругих волн. Прочность тела будет напрямую зависеть от геометрических параметров тела, так как упругая энергия прямо пропорциональна объему тела, а разрушение начинается на его поверхности.

Аналогичным образом можно сформулировать зависимость, наблюдаемую на практике, критического напряжения от размеров образца.

Необходимо при испытании небольших образцов при расслоении помнить об эффекте масштабирования системы для корректной оценки прочности конструкций.

Из выражений, приведенных выше можно заметить, что неявно эффект масштаба присутствует в переменной  $\gamma$ , что обеспечивает преимущество энергетического подхода по сравнению с силовым, который оценивает критические параметры и моменты в отдельных точках тела. Для более точного

решения важно использовать оба подхода, что помогает обеспечить более высокие показатели безопасности реальных конструкций, а также оценить необходимый запас прочности.

### *Расщепление композитных труб при кручении*

Изготовленные из пултрузионного стеклопластика либо боралюминия композитные однонаправленные трубы широко применяются в различных отраслях промышленности и строительства. Эти трубы обладают высокой прочностью и жесткостью, что делает их идеальными несущими элементами. Разрушение под нагрузкой крутящих моментов происходит по типу продольного расщепления. На рис. 2.11 изображена композитная труба с внутренним  $R_1$  и внешним радиусами  $R_2$ .

Угол закручивания  $\theta$  остается постоянным при разрушении  $\theta = M_0 / C_0 = M_1 / C_1$ , где  $M_{0,1}$ ,  $C_{0,1}$  – моменты и крутильные жесткости сечения (до и после расщепления трубы). При этом внешние силы считаются не совершающими работы, скомпенсированными. Интерес представляет вопрос того, на какое количество частей разрушится труба во время испытания – в этом и состоит анализ.

Пусть рассматриваемая труба будет расщеплена на  $n$  частей. В таком случае мы получим при рассмотрении разницы между оставшейся и накопленной энергий с работой расщепления в трубе с толщиной стенки  $h = R_1 - R_2$  и длиной  $L$

$$\frac{M_0^2 L}{2C_0} - \frac{M_1^2 L}{2C_1} \geq n\gamma^* h \cdot L, \quad (2.38)$$

где  $C_1 = nC_n$ ;  $C_n$  – жесткость на кручение (1/ $n$ )-й части трубы при расщеплениях симметричного продольного типа.

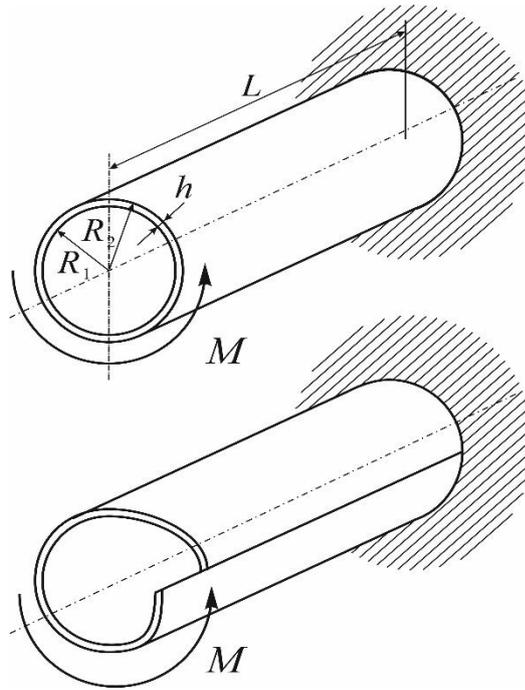


Рис. 2.11. Испытание на кручение (а) и деформация сечения тонкостенной трубы (после расщепления) (б) [95]

При этом критический момент расщепления в начальный момент времени может быть рассчитан как:

$$M_0 = \sqrt{\frac{2n\gamma^* h C_0^2}{C_0 - C_1}}, \quad (2.39)$$

Применим тонкостенное приближение, когда

$$C_0 = \frac{1}{2} G_{xy} \pi (R_1^4 - R_2^4) \approx 2\pi G_{xy} R^3 h; \quad R = (R_1 + R_2) / 2;$$

$$C_1 = n(2\pi R / n) h^3 G_{xy} \beta(c) \approx 2\pi G_{xy} R h^3 / 3; \quad G_{xy}, G_{xz} - \text{модули сдвига};$$

$$c = 2\pi R / (nh\sqrt{g}); \quad g = \frac{G_{xy}}{G_{xz}} \quad \text{где } g=1 \text{ для однонаправленных труб, и при } c \rightarrow \infty$$

$$\beta(c) \rightarrow 1/3.$$

После расщепления трубы для тонкостенных стержней открытого профиля, независимо от числа расщеплений и со сторонами, равными длине окружности и толщине трубы, жесткость при кручении будет выражена как жесткость стержня прямоугольной формы. Следует отметить, что наиболее энергетически выгодным будет образование одного расщепления без стеснения деформации сечения, что подтверждено экспериментально на биокомпозитах.

Для оценки сверху предельного момента можно использовать равенство (2.39) при неизменном угле закручивания. Оценка снизу может быть получена из уравнения (2.38), в котором критический момент можно вывести, добавляя в левую часть дополнительную работу, при повороте на угол  $\tilde{M}_0 L (C_1^{-1} - C_0^{-1})$ . Выражение для критического момента выглядит следующим образом:

$$\tilde{M}_0 = \sqrt{\frac{2\gamma^* h C_0 C_1}{C_0 - C_1}}. \quad (2.40)$$

Отношения двух оценок  $\frac{M_0}{\tilde{M}_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}$  бывает достаточно большим, что может затруднять анализ экспериментальных данных. Например, для сплошного изотропного цилиндра  $\sqrt{\frac{C_0}{C_1}} = 1,34$ , а для тонкостенной трубы отношение  $\frac{R}{h} \sqrt{3}$  становится очень большим, и при проведении с композитными трубами испытаний на кручение это создает трудности для точной оценки прочности композитных деталей, и требует учета жесткости экспериментальной машины, а также обоснование и доработку расчетной схемы.

При расщеплении трубы, стеснение деформаций в захватах приводит к изменению ее геометрических размеров, что в свою очередь влияет на ее жесткость. Возникает эффекте зависимости жесткости трубы от процесса расщепления.

Для более точного понимания данного эффекта можно рассмотреть следующий пример. Рассмотрим круглую трубу, закрепленную с обеих сторон. При приложении момента к трубе, она начинает крутиться вокруг своей оси. Если не учитывать стеснение деформаций, то при расщеплении трубы ее сечение будет оставаться в одной плоскости, и жесткость трубы останется неизменной.

Однако в реальности, под действием внешних нагрузок и стеснения деформаций в захватах, сечение трубы будет искривляться. Это приведет к изменению геометрии сечения трубы и, следовательно, к изменению ее жесткости.

В последующих расчетах и экспериментах необходимо учесть зависимость жесткости трубы от процесса расщепления. Это может быть сделано путем

решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение трубы при кручении. Такой подход позволяет получить более точные результаты и более полное понимание эффекта стеснения деформаций в захватах на поведение трубы при расщеплении.

$$C_1^+ = \frac{2\pi h^3 R G_{xy}}{3(1-B)}, \quad (2.41)$$

где  $B = \frac{2k \cdot \left( ch\left(\frac{L}{k}\right) - 1 \right)}{L \cdot sh\left(\frac{L}{k}\right)}$ ;  $k = \frac{\pi R^2}{h} \sqrt{\frac{E_x}{G_{xy}}}$  – характерная длина зоны краевого эффекта Б.

Сен-Венана.

Анизотропия композитных материалов, то есть, когда  $\frac{G_{xy}}{E_x}$  мало, может значительно увеличить зону влияния заделки. В изотропном материале длина зоны краевого эффекта в два раза меньше, чем в углепластике. В случае изотропии при  $\nu = 0,3$   $d = 5,06R^2 / h$ , а анизотропном случае  $d = 9,93R^2 / h$ , таким образом, видно, что при анизотропии жесткость на кручение повышается и деформация влияет на большую длину.

Можно рассчитать жесткость расщепленной трубы при запрещении деплантации, взяв параметры  $h = 2$  мм,  $R = 20$  мм, и, следовательно,  $d = 2000$ , где  $L = d$  мм. Тогда  $ch(1) = (e + e^{-1}) / 2 = 1,55$ ,  $sh(1) = (e - e^{-1}) / 2 = 1,18$ , видно, что жесткость при запрещении на торцах увеличивается в 15 раз.

Согласно энергетическому критерию, в результате увеличения остаточной жесткости мы будем наблюдать увеличение критического крутящего момента.

Если ввести коэффициент  $p$ , равный 0 при нестесненном кручении и 1 в условиях абсолютно жесткой заделки, то из уравнений (2.41) и (2.39) мы получим

$$M_0^+ = \sqrt{\frac{12\pi\gamma^* h^2 G_{xy} R^5}{3R^2 - h^2 (1 - pB)^{-1}}}. \quad (2.42)$$

Очевидно, что далее для условий жесткой заделки мы можем произвести оценку критической длины  $L^*$ . Заметим, что те трубы, что будут иметь более низкие

значения длины, будут разрушаться от нормальных осевых напряжений, а не в результате расщепления, с максимальным значением

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{2kM}{RBLh^2}. \quad (2.43)$$

При больших значениях осевого напряжения тело может разрушиться по типу продольного разрыва или смятия образца.

Изучение эффекта в однонаправленных трубах помогает лучше понять причину образования некоторых элементов биокompозитов, например, формирование колец на стебле бамбука. Образование колец способствует повышению прочности при сжатии и кручении и препятствует деплантации сечений звена бамбука, что видно из уравнений (2.42) и (2.43). Кольца бамбука трансформируют скручивающие напряжения в продольные напряжения волокон. В реальных условиях под действием ветра для стеблей бамбука наличие колец необходимо, так как они предотвращают разрушение при скручивании и перераспределяют нагрузку в продольном направлении.

### **Выводы к главе 2.**

1. Показаны различные методы расчета НДС конструкций из волокнистых композитов и дана оценка прочности композитов.
2. Выбран и обоснован комплексный метод расчета упругих свойств и условий разрушения композитов с полимерной матрицей.
3. Произведен анализ критериев прочности, учитывающих направленный характер разрушения волокнистых композитов, при этом такие критерии дают более точную интерпретацию полученных в результате экспериментов данных и более точные расчеты прочности композитных элементов различных конструкций.

### **ГЛАВА 3. РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ**

Сосуды давления представляют собой одну из областей, где применение композитных материалов является чрезвычайно эффективным. Расчеты и исследования, связанные с композитными оболочками [32, 87, 115] и баллонами [5], включая металлокомпозитные [34, 45, 75, 83, 86] и многополостные [25] конструкции, привлекают большой интерес в научных кругах.

Данная глава посвящена совершенствованию и разработке новых методов проектного расчета композитных сосудов давления и оптимизации структуры армирования. В частности, наибольшее внимание уделено расчетам напряженно-деформированного состояния баллона в цилиндрической, донной части и зонах полюсных отверстий методом конечных элементов, а также математическим методам расчета композитных сосудов давления [38, 47], таким как послойный метод расчета напряжений [102, 104, 111]; упрощенный послойный метод расчета; оценка упругих свойств по С. Цаю [28-29]; методы построения предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев.

#### **3.1. МКЭ-расчеты НДС цилиндрической, донной частей и зон полюсных отверстий**

На рис. 3.1 – 3.6 представлены результаты расчета напряжений и полей перемещений композитного сосуда давления для *A*, *B* и *C*-структуры, соответственно, методом конечных элементов.

Equivalent Stress  
Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom - Layer 0  
Unit: MPa  
Time: 1  
24.02.2023 22:14

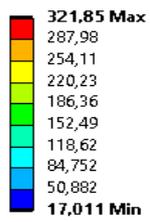


Рис. 3.1. Эквивалентные напряжения по Мизесу для реальной *A*-структуры армирования

Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1  
24.02.2023 22:12

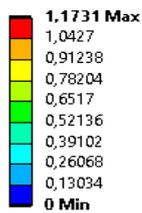


Рис. 3.2. Поле перемещений для реальной *A*-структуры армирования

Equivalent Stress  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom - Layer 0  
 Unit: MPa  
 Time: 1  
 24.02.2023 22:22

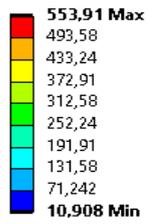


Рис. 3.3. Эквивалентные напряжения по Мизесу для *B*-структуры армирования

Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Unit: mm  
 Time: 1  
 24.02.2023 22:21

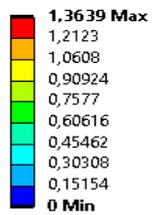


Рис. 3.4. Поле перемещений для *B*-структуры армирования

Equivalent Stress  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom - Layer 0  
 Unit: MPa  
 Time: 1  
 24.02.2023 22:19

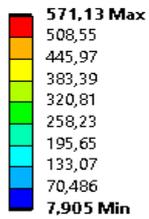


Рис. 3.5. Эквивалентные напряжения по Мизесу для *C*-структуры армирования

Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Unit: mm  
 Time: 1  
 24.02.2023 22:20

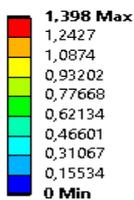


Рис. 3.6. Поле перемещений для *C*-структуры армирования

Стоит отметить, что напряжения по МИЗЕСУ, полезные для изотропных металлов, для пар слоев волокон приведены для иллюстрации возможностей МКЭ [40, 129].

### 3.2. Нитяная модель для выбора оптимальных углов армирования

Рассмотрим наиболее простую модель «нитяную аналогию» [98], для которой принято, что по всем волокнам напряжения равномерно распределены (рис.3.7).

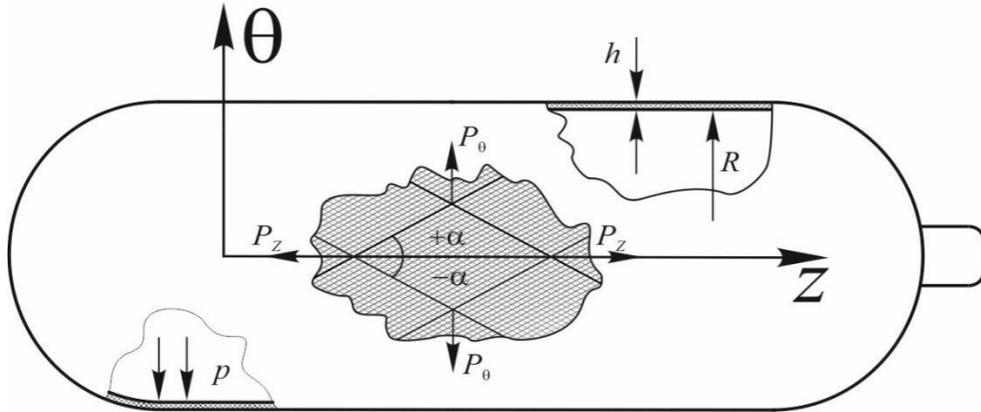


Рис. 3.7. Схема цилиндрического сосуда давления и ромбическая модель из нерастяжимых волокон, уложенных под углами  $\pm\alpha$  к продольной оси сосуда давления

Рассмотрим баллон с параметром радиуса цилиндрической части  $R$ . Средние напряжения по осевым  $\bar{\sigma}_z$  и окружным  $\bar{\sigma}_\theta$  направлениям можно рассчитать, как:

$$\bar{\sigma}_z = \frac{pR}{2h}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{pR}{h}. \quad (3.1)$$

В соответствии с данной моделью можно рассчитать минимально допустимую толщину  $h$  для баллона с определенными углами армирования. В случае достижения предела прочности  $\sigma_0$  под действием критического давления  $p^*$  можно получить выражения из (3.1):

$$\frac{p^*R}{2\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \cos^2 \alpha_i; \quad \frac{p^*R}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \sin^2 \alpha_i. \quad (3.2)$$

Из (3.1) при  $m=1$  можно рассчитать величины  $h_1 = h = \frac{3p^*R}{2\sigma_0}$ ;  $\alpha_1 = \alpha^* = 54^\circ 44'$ ; ( $\text{tg}^2 \alpha^* = 2$ ). Для семейств волокон при  $m \geq 2$ , число переменных ( $h_i$  и  $\alpha_i$ ) становится больше числа уравнений (3.1), и тогда нужно задавать какие-то  $\alpha_i$ , чтобы рассчитать толщину. Можно показать, что при армировании средней части баллона волокнами разных типов, например, с

направлением армирования  $\pm\alpha_1$  и толщиной  $h_1$ , а также с направлением армирования  $\pm\alpha_2$ , с толщиной  $h_2$  (углы возьмем  $(0/90)$ ,  $(\pm 30/90)$ ,  $(\pm 45/90)$ ,  $(0/\pm 60)$  и др.) при условии, что  $\alpha_1 < \alpha^*$ ;  $\alpha_2 > \alpha^*$ , то итоговая толщина  $h = h_1 + h_2 = 3p^*R / (2\sigma_0)$  остается неизменной. Из вышеприведенного примера по нитяной модели следует, что массы будут равны для любой трубы или баллона с равнонапряженными волокнами. При этом масса будет наименьшей для выбранной конфигурации баллона, характеристик волокон и создаваемом критическом давлении.

### 3.3. Методы расчета композитных сосудов давления

В данной задаче для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из слоистых полимерных волокнистых материалов (ПКМ) применяется линейная диаграмма деформирования в осях связанных с направлением армирования слоев с учетом нелинейности свойств материала, например, его геометрии.

Решение задачи основано на теории упругости анизотропных тел и теории анизотропных пластин и оболочек [6, 20, 33, 35, 72]. Для изучения деформированного состояния слоистых тонкостенных материалов с анизотропными свойствами, таких как пластины и оболочки, используются приближенные методы, основанные на данных теориях.

1. Метод гипотез представляет собой подход, основанный на предварительном формулировании гипотез о распределении деформаций и напряжений внутри конструкции. Данный метод позволяет установить связь между этими параметрами и физическими законами, лежащими в основе поведения материала.

2. Метод разложения в ряд по толщине предлагает использовать разложение неизвестных функций, описывающих деформации и напряжения, в ряд Тейлора или другой степенной ряд. Это позволяет представить данные функции в виде бесконечной суммы слагаемых, каждое из которых описывает вклад конкретного порядка в поведение конструкции.

3. Метод асимптотического решения трехмерных уравнений - базируется на разложении решения задач теории упругости трехмерных тел в окрестности малого параметра - отношения толщины конструкции к ее характерному размеру в плоскости. Для учета геометрической нелинейности, проявляющейся при больших деформациях, применяют теорию больших деформаций, которая учитывает изменение геометрии конструкции под действием нагрузки. Для описания физической нелинейности, обусловленной нелинейным характером зависимости напряжений от деформаций, используют теории пластичности, ползучести или вязкоупругости.

Таким образом, предлагаемый подход сочетает в себе применение диаграммы деформирования полимерных волокнистых материалов с учетом ориентации армирования слоев, а также нелинейности некоторых свойств конструкций. Это позволяет более точно определять напряженно-деформированное состояние конструкций из слоистых полимерных волокнистых материалов, что необходимо для обеспечения их надежности и работоспособности.

Гипотезы, лежащие в основе метода гипотез, были обоснованы такими известными авторами, как Г. Кирхгофф, С. П. Тимошенко, Е. Рейсснер и Х. М. Муштари. В гипотезе ломаной линии предполагается, что каждый слой материала в конструкции имеет различные характеристики и взаимодействует с соседними слоями, что приводит к формированию ломаной линии интерфейсов между слоями. Это позволяет учесть неоднородность конструкции и различные свойства каждого слоя при расчетах, однако может приводить к накоплению ошибок из-за сложности учета непрерывности деформаций на границах слоев.

В гипотезе эквивалентного слоя предполагается, что все слои материала в конструкции эквивалентны друг другу и имеют одинаковые характеристики и свойства. Это упрощает расчеты, так как порядок разрешающей системы уравнений остается постоянным и не зависит от числа слоев. Данная гипотеза позволяет оценить глобальные свойства конструкции с достаточной точностью, но не учитывает детальные локальные явления.

Конкретная задача и цель исследования диктуют выбор гипотез. При исследовании глобальных свойств неоднородной структуры рекомендуется использовать гипотезу эквивалентного слоя, чтобы избежать ошибок, связанных с непрерывностью поперечных деформаций на границах слоев. При этом также важно изучать локальные явления, чтобы получить полную и точную картину структуры.

Разработано несколько теорий для точного прогнозирования напряженно-деформированного состояния, устойчивости и параметров динамического отклика композитных конструкций. Особенно эффективны различные вариации теории оболочек и слоистых анизотропных пластин [45, 75-76].

Теория слоистых анизотропных пластин и оболочек позволяет рассчитывать напряженно-деформированное состояние композитных конструкций под действием внешних нагрузок. Она учитывает как линейные, так и нелинейные свойства материала, такие как упругость, прочность и деформации. Благодаря этому, вычисления с использованием таких теорий дают более точные результаты, чем простые модели, которые не учитывают анизотропию и слоистость материала.

Теория слоистых анизотропных пластин и оболочек имеет широкий спектр применения, включая аэрокосмическую, авиационную, морскую, автомобильную и другие отрасли промышленности. Она используется при проектировании и оптимизации композитных конструкций, а также при анализе их поведения при различных условиях нагружения [37, 49, 115-116, 118].

В настоящее время ученые и инженеры все больше прибегают к применению соотношений теории упругости анизотропного тела [20,76] для улучшения точности прогнозирования свойств неоднородных композитных конструкций. Ранее эти соотношения не получали практического применения из-за ограниченных возможностей вычислительной техники. Однако, в последнее десятилетие ситуация радикально изменилась благодаря развитию компьютерных технологий и появлению коммерческих программных комплексов для реализации проектирования упругих свойств тел с анизотропными свойствами в конечно-

элементном анализе. Таким образом, за счет программных пакетов можно значительно улучшить моделирование свойств материалов для их дальнейшего использования в композитных конструкциях [74].

В общих чертах, предметом механики разрушения является изучение процесса развития трещин в конструкциях. Однако, для композитных материалов, разрушение происходит по-разному из-за неоднородности материала, наличия включений и других факторов. Моделирование разрушения композитных конструкций позволяет изучать возникновение и развитие повреждений. Из-за специфики композитных материалов, нет единого критерия прочности, и инженеры используют различные критерии, такие как критерии Малмейстера, Гондельблата-Копнова, Цая-Хилла и другие.

Также, при оценке прочности композитной конструкции, необходимо учитывать возможность разрушения материала. Механика разрушения материалов и конструкций предоставляет модели и методы для определения критических напряжений и деформаций, при которых происходит разрушение. Эти модели могут быть использованы в сочетании с моделью линейной теории упругости для более точной оценки прочности и работоспособности конструкции.

Оценка прочности композитной конструкции может включать как аналитические, так и экспериментальные методы. Аналитические методы основаны на решении уравнений механики тела и механики разрушения, а также на использовании известных материальных свойств композита. Экспериментальные методы включают проведение испытаний на различные воздействия (например, изгиб, растяжение, сжатие), с последующим измерением напряжений и деформаций для определения прочностных свойств материала.

В целом, чтобы достичь наиболее надежной оценки прочности композитной конструкции, рекомендуется комбинировать аналитические и экспериментальные методы. Это позволяет использовать достоинства обоих подходов и учесть их ограничения.

### 3.3.1. Послойный метод расчета напряжений в симметричных парах слоев

Основной компьютерный подход к определению напряженного состояния и предельных нагрузок слоистых композитных элементов, таких как однонаправленные препреги и пластины, включает послойный расчет. В качестве проблемы представлен компонент структуры, состоящий из однонаправленных монослоев (препрегов) [94].

Для расчетов композитного баллона необходимо учитывать такие параметры как условия нагружения, геометрия и структуру армирования. Для этого важно знать углы  $\pm\alpha_i$  и числа  $n_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) пар слоев  $(\pm\alpha_{1n_1} / \pm\alpha_{2n_2} / \dots / \pm\alpha_{mn_m})$ . По этим данным рассчитаем сумму всех слоев  $N = 2 \sum_{i=1}^m n_i$ , и будем рассматривать нагрузку относительно их числа, а не толщины.

Необходимо: получить  $\sigma_z(\alpha_i)$  и  $\sigma_\theta(\alpha_i)$  для всех пар слоев и оценить критическое давление разрушения баллона.

На первом этапе рассчитываются характеристики монослоя для матрицы модулей упругости (3.3) и матрицы податливостей (3.4). Несимметричные эффекты, возникающие при сдвигах, могут помешать работе с деформациями как тензорами. После расчета можно показать, что для монослоя получаются элементы матрицы модулей упругости  $\{E^0\}$  и матрицы податливостей  $\{S^0\}$ :

$$E_{11}^0 = E_1^0 \Delta_0^{-1}; \quad E_{12}^0 = E_2^0 \nu_{12}^0 \Delta_0^{-1}; \quad E_{22}^0 = E_2^0 \Delta_0^{-1}; \quad \Delta_0 = 1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0; \quad E_{66}^0 = G_{12}^0; \quad (3.3)$$

$$S_{11}^0 = \frac{E_{22}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_1^0}; \quad S_{22}^0 = \frac{E_{11}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_2^0}; \quad S_{12}^0 = -\frac{E_{12}^0}{\Delta} = -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0}; \quad (3.4)$$

$$\Delta = E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2; \quad S_{66}^0 = \frac{1}{E_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}^0}.$$

В выражениях (3.3) и (3.4) сделана замена  $11 \rightarrow 1$ ;  $22 \rightarrow 2$ ;  $12 \rightarrow 6$ ;  $zz \rightarrow z$ ;  $\theta\theta \rightarrow \theta$ , поэтому тензор модулей сводится к квадратной матрице, а тензоры напряжений и деформаций к псевдо-векторам [97].

Второй этап включает расчет компонентов тензора модулей упругости и матрицы податливостей в осях  $z-\theta$ , связанных с баллоном для пар слоев  $(\pm\alpha_i)$ , в соответствии с представленной на рис. 3.8 схемой:

$$\begin{aligned} E_{zz}(\alpha) &= E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\ E_{z\theta}(\alpha) &= (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4); \\ E_{\theta\theta}(\alpha) &= E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} S_{zz}(\alpha) &= S_{11}^0 c^4 + S_{22}^0 s^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2; \\ S_{z\theta}(\alpha) &= (S_{11}^0 + S_{22}^0 - S_{66}^0) s^2 c^2 + S_{12}^0 (s^4 + c^4); \\ S_{\theta\theta}(\alpha) &= S_{11}^0 s^4 + S_{22}^0 c^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

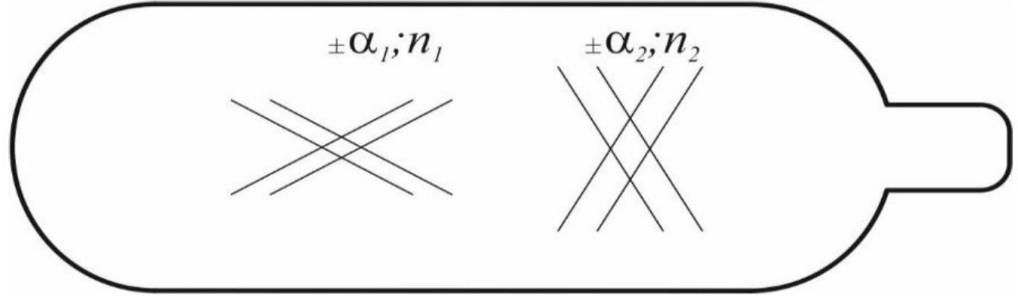


Рис. 3.8. Схема симметричной укладки волокон (однаправленных препрегов) в стенке баллона

В (3.5), (3.6) и ниже приняты обозначения  $c = \cos\alpha_i$ ;  $s = \sin\alpha_i$ .

На третьем этапе необходимо провести вычисление средних значений компонент тензора модулей упругости для всего пакета слоев, при условии, что деформации всех пар слоев в тонкостенной, безмоментной оболочке являются одинаковыми и равны средним деформациям  $\bar{\epsilon}_z, \bar{\epsilon}_\theta$ :

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = z, \theta.$$

Матрица эффективных податливостей для всего пакета слоев определяется из (3.4):

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1}; \quad \bar{S}_{22} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1}; \quad S_{12}^0 = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1}; \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2. \quad (3.7)$$

При рассмотрении симметричных укладок материала можно сделать вывод о том, что пакет в целом является ортотропным. Это означает, что его механические свойства зависят от направления нагрузки. В плоском случае, когда рассматриваются

укладки в одной плоскости, тензоры модулей и податливостей содержат четыре независимых компонента, то есть четыре числа, характеризующих механические свойства материала. Эти компоненты позволяют описать поведение материала при различных типах нагрузок.

Однако, в случае двухосного растяжения, учитываются только три из этих компонент. Это объясняется особенностями направления нагрузки при двухосном растяжении и его влиянием на механические свойства материала.

Более подробное рассмотрение этих компонент и их значения представлено в (3.7). В данной формуле приведены точные значения исследованных параметров, которые характеризуют поведение материала при различных укладках и направлениях нагрузки.

На четвертом этапе по формулам (3.1) и (3.8) рассчитывают средние деформации:

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z0} \bar{\sigma}_0; \quad \bar{\varepsilon}_0 = \bar{S}_{z0} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{00} \bar{\sigma}_0. \quad (3.8)$$

На пятом этапе рассчитываются осевые и окружные напряжения в каждой паре слоёв

$$\begin{aligned} \sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{z0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_0; \\ \sigma_0(\alpha_i) &= E_{z0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{00}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_0, \end{aligned}$$

которые на плоскости  $\sigma_z - \sigma_0$  изображаются как точка  $B$  (рис. 3.16-3.19), и после этого строят предельные поверхности в виде прямоугольника из прямых 1,2,3 или в виде эллипса 4. При повышении давления можно заметить, что в парах слоев будет происходить смещение соответствующей им точки вдоль луча  $OB$  вплоть до достижения точки  $A$  предельной поверхности. Из отношения отрезков можно рассчитать коэффициент запаса. За  $p^*$  принимается для наиболее нагруженной пары выход луча нагружения на предельную поверхность при наименьшем коэффициенте запаса, возникающем при начальном значении давления [113, 114].

Принятие за нижнюю границу прочности первое нарушение критерия прочности является нецелесообразным, так как оно дает завышенную оценку. Для корректировки необходимо изучить процесс последовательного разрушения в парах слоев с учетом разных типов разрушения. Обычно широко используемые

критерии не учитывают этого. Для предварительных расчетов коэффициентов запаса за основу брали критерий первого разрушения. По построению предельной поверхности в виде прямоугольника можно определить типы присутствующих механизмов разрушения, что нельзя сказать о предельной поверхности в виде эллипса.

**Анализ для пар слоёв.** В общем случае, расчет более сложной конфигурации композитных изделий с укладкой (или намоткой) производится с использованием пошагового метода. Этот метод предполагает разделение структуры на слои и последовательное рассмотрение соответствующих упругих и прочностных свойств каждого слоя. При укладке симметричными углами  $\pm\alpha$ , каждая пара слоев будет иметь одинаковые углы наклона относительно направления  $x$ . Такие пары слоев являются ортотропными, что означает, что у них есть две оси симметрии (направления  $x$  и  $y$ ), вдоль которых материал обладает одинаковыми упругими характеристиками. Такая симметрия позволяет корректно определять упругие и прочностные свойства композитных изделий с укладкой в экспериментах. Для слоев в паре с одинаковыми характеристиками нет причин проводить дополнительный анализ несимметричной укладки. Для заново посчитанных напряжений для пар слоев с укладкой можно далее определять критерии прочности. Эти зависимости могут быть получены на основе обработки экспериментов по испытаниям косоугольно армированных труб. Таким образом, применение пошагового метода расчета для композитных изделий с укладкой под симметричными углами позволяет более удобно и корректно определить упругие и прочностные свойства таких изделий [94].

### 3.3.2. Упрощенный послойный метод

Проектирование процесса разрушения сильно слоистых анизотропных композитов в форме пластин включает следующие этапы:

1. Рассчитываются компоненты упругих модулей композита, учитывая разориентацию слоев и исходя из значений модулей упругости монослоев.

2. Расчет средней деформации при допущении, что деформация однородна.
3. Получение напряжений во всех слоях, используя для них одинаковое значение средней деформации.
4. Первое разрушение. Рассчитывается нагрузка на слои для первого разрушения, применяя критерий прочности. Проведение расчета с первым разрушением помогает добиться желаемой точности.
5. Решение задачи по разрушению. В случае разрушения волокон по прочностному критерию, слой не учитывается. Если разрушается матрица, модуль Юнга и модуль сдвига равен нулю перпендикулярно волокнам, и процесс повторяется с первого этапа. Это продолжается до полной потери несущей способности пластины.

Такой метод моделирования позволяет учесть особенности анизотропии композитов и предсказать процесс разрушения слоистых композитных пластин с учетом сильно отличающихся модулей упругости вдоль и поперек волокон.

### 3.3.3. Расчет упругих свойств через основные инварианты тензора упругих модулей

#### *Восстановление технических упругих констант с помощью инвариантов*

Экспериментальное определение полного набора технических упругих постоянных материала, как известно, сопряжено с методическими трудностями. Если нахождение модуля Юнга вдоль и поперек волокон не вызывает проблем (с некоторыми оговорками), то для точного определения модуля сдвига и коэффициента Пуассона необходимы специальные оснастка, оборудование и методики.

Частичное решение этой проблемы с помощью инвариантов представлено в работе [29]. Для перехода к инвариантам необходимо понизить степень синусов и косинусов в выражении (3.5). Из стандартных тригонометрических преобразований следует:

$$\begin{aligned}
s^4 &= \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}; \quad c^4 = \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \\
s^3 c &= \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{8}; \quad sc^3 = \frac{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{8}; \quad s^2 c^2 = \frac{1 - \cos 4\alpha}{8}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Если подставить (3.9) в (3.5) и привести подобные слагаемые, можно получить выражения, которые удобно представить матричным виде.

$$\begin{pmatrix} E_{xxxx}^0 \\ E_{yyyy}^0 \\ E_{xyxy}^0 \\ E_{xxyy}^0 \\ E_{yyxy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 \\ V_1 & -V_2 & V_3 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & -V_3 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & -V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_2/2 & V_3 \\ 0 & 0 & 0 & V_2/2 & -V_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \sin 2\alpha \\ \sin 4\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{3E_{11}^0 + 3E_{22}^0 + 2E_{12}^0 + 4E_{66}^0}{8}; \quad V_2 = \frac{E_{11}^0 - E_{22}^0}{2}; \\
V_3 &= \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 - 2E_{12}^0 - 4E_{66}^0}{8}; \quad V_4 = \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 + 6E_{12}^0 - 4E_{66}^0}{8}; \\
V_5 &= \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 - 2E_{12}^0 + 4E_{66}^0}{8}.
\end{aligned}$$

Из пяти выражений  $V_i$  независимыми от угла при усреднении (инвариантами) являются только три  $V_1$ ,  $V_4$  и  $V_5$ . Далее С. Цай рассматривает линейную комбинацию вида:

$$2(V_1 + V_5) = E_{11}^0 + E_{22}^0 + 2E_{66}^0 = \text{«trace»}[E^0]. \tag{3.11}$$

Здесь необходимо подробнее остановиться на терминологии. Название «trace» $[E^0]$  выбрано автором [29] по аналогии со «следом» матрицы. Однако выражение (3.20) не является суммой диагональных элементов в чистом виде. Тем не менее, для простоты изложения далее будет использован именно этот термин «след» и это обозначение (3.11).

В таблице 3.1 представлены упругие характеристики различных видов углепластика, матричные константы, определенные с помощью соотношений (3.3), а также значение следа «trace» для каждого материала.

Таблица 3.1. Упругие характеристики различных видов углепластика

Марка	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{12}^0$	$E_{66}^0$	«trace»
IM7/977-3	191	9,9	7,8	0,35	192,2	10,0	3,5	7,8	217,8
T300/N5208	181	10,3	7,2	0,28	181,8	10,3	2,9	7,2	206,5
КМУ-3	180	9,0	5,2	0,31	180,9	9,0	2,8	5,2	200,2
IM7/MTM45	175	8,2	5,5	0,33	175,9	8,2	2,7	5,5	195,1
IM7/8552	171	9,1	5,3	0,32	171,9	9,1	2,9	5,3	191,6
T300/934	148	9,7	4,6	0,30	148,9	9,7	2,9	4,6	167,7
AS/H3501	138	8,9	5,1	0,30	138,8	9,0	2,7	5,1	162,0
T700/C-Ply 55	121	8,0	4,7	0,30	121,7	8,0	2,4	4,7	139,2

В таблице 3.2 приведены нормированные на величину следа «trace» значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  и  $\nu_{12}$ , средние величины которых могут с достаточной точностью считаться константами для всего класса материалов (в данном случае - углепластиков).

Таблица 3.2. Нормированные на величину следа «trace» упругие константы

Марка	$E_1$ /«trace»	$E_2$ /«trace»	$G_{12}$ /«trace»	$\nu_{12}$ /«trace»
IM7/977-3	0,877	0,046	0,036	0,0016
T300/N5208	0,877	0,050	0,035	0,0014
КМУ-3	0,899	0,045	0,026	0,0015
IM7/MTM45	0,897	0,042	0,028	0,0017
IM7/8552	0,892	0,047	0,028	0,0017
T300/934	0,883	0,058	0,027	0,0018
AS/H3501	0,852	0,055	0,032	0,0019
T700/C-Ply 55	0,869	0,057	0,034	0,0022
<b>Ср. знач.</b>	<b>0,881</b>	<b>0,050</b>	<b>0,031</b>	<b>0,0017</b>

Отсюда следует, что «trace» можно определить и без пересчета матричных констант - лишь на основе технических, полученных в эксперименте.

$$\text{«trace»}[E^0] \approx \frac{E_1}{0,881} \approx \frac{E_2}{0,050} \approx \frac{G_{12}}{0,031} \approx \frac{\nu_{12}}{0,0017}. \quad (3.12)$$

Поскольку жесткость монослоя определяется в значительной степени модулем Юнга вдоль волокон, а его проще всего корректно определить в опыте, целесообразно находить след «trace» именно в виде  $\frac{E_1}{0,88}$ . По аналогии с таблицей

3.2 можно провести нормирование и матричных постоянных. Тогда выражение (3.12) переписывается в виде:

$$\text{«trace»}[E^0] \approx \frac{E_{11}^0}{0,885} \approx \frac{E_{22}^0}{0,050} \approx \frac{E_{66}^0}{0,031} \approx \frac{E_{12}^0}{0,015}. \quad (3.13)$$

Таким образом, проводя только один относительно несложный эксперимент по определению модуля Юнга вдоль волокон, можно восстановить значения матричных упругих постоянных, необходимых для дальнейших расчетов. В таблице 3.3 приведено сравнение значений ...«trace» из таблицы 3.1 и «trace»\*, рассчитанных на основе  $E_1$  по формуле (3.12), а также восстановленные матричные константы.

Таблица 3.3. Восстановленные с помощью «trace»\* матричные константы

Марка	«trace»	«trace»*	$E_{11}^{0*}$	$E_{22}^{0*}$	$E_{12}^{0*}$	$E_{66}^{0*}$
IM7/977-3	217,8	217,0	192,2	10,9	3,4	6,7
T300/N5208	206,5	205,7	182,1	10,3	3,2	6,3
КМУ-3	200,2	204,5	181,1	10,3	3,2	6,3
IM7/MTM45	195,1	198,9	176,1	10,0	3,1	6,1
IM7/8552	191,6	194,3	172,1	9,7	3,0	6,0
T300/934	167,7	168,2	148,9	8,4	2,6	5,2
AS/N3501	162,0	156,8	138,9	7,9	2,4	4,8
T700/C-Ply 55	139,2	137,5	121,8	6,9	2,1	4,2

Те же вычисления можно провести для стеклопластика [136]. В таблицах 3.4 – 3.6 представлены исходные данные и результаты расчетов.

Таблица 3.4. Упругие характеристики различных видов стеклопластика

Марка	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{12}^0$	$E_{66}^0$	«trace»
ВПС-38Т	45,3	10,2	5,6	0,27	46,1	10,4	2,8	5,6	67,6
S-Glass/epoxy	41,5	8,0	3,1	0,25	42,1	8,1	2,0	3,1	56,4
D-Glass/epoxy	39,2	7,8	3,4	0,29	39,9	7,9	2,3	3,4	54,6
E-glass/epoxy	39,0	8,6	3,8	0,28	39,7	8,8	2,5	3,8	56,0

Таблица 3.5. Нормированные на величину «trace» упругие константы

Марка	$E_1 / \text{«trace»}$	$E_2 / \text{«trace»}$	$G_{12} / \text{«trace»}$	$\nu_{12} / \text{«trace»}$
ВПС-38Т	0,670	0,151	0,083	0,0040
S-Glass/epoxy	0,737	0,142	0,055	0,0044
D-Glass/epoxy	0,718	0,142	0,062	0,0053
E-glass/epoxy	0,696	0,154	0,068	0,0050
<b>Ср. знач.</b>	<b>0,705</b>	<b>0,147</b>	<b>0,067</b>	<b>0,0050</b>

Таблица 3.6. Восстановленные с помощью «trace»\* матричные константы

Марка	«trace»	«trace»*	$E_{11}^{0*}$	$E_{22}^{0*}$	$E_{12}^{0*}$	$E_{66}^{0*}$
ВПС-38Т	67,6	64,3	46,1	9,6	2,6	4,3
S-Glass/epoxy	56,4	58,9	42,2	8,8	2,4	3,9
D-Glass/epoxy	54,6	55,6	39,9	8,3	2,3	3,7
E-glass/epoxy	56,0	55,3	39,7	8,3	2,3	3,7

Использование инвариантов для пересчета матричных постоянных на основе одного модуля упругости вдоль волокон позволяет завершить первый и второй этапы послойного метода без особых сложностей.

Отметим, что использование следа корректно лишь для высокомодульных углепластиков. Для стеклопластиков, обладающих в 3-4 раза меньшим, чем углепластик, модулем вдоль волокон, погрешности приближенных расчетов возрастают.

Несколько иной принцип применяется для решения второй проблемы послойного метода расчета композитов – громоздкости тензорных преобразований при повороте СК (3.5). Как было отмечено ранее, для сильно анизотропных однонаправленных материалов характерно:  $E_{11}^0 \gg E_{22}^0, E_{12}^0, E_{66}^0$ . Тогда для упрощения выражений при повороте СК константы  $E_{22}^0, E_{12}^0, E_{66}^0$  можно принять равными нулю. И соотношения (3.5) переписываются в виде:

$$\begin{aligned}
 E_{xxxx}^0 &\approx E_{xxxx}^{0*} = E_{11}^0 c^4; & E_{xyyy}^0 &\approx E_{xyyy}^{0*} = E_{11}^0 s^2 c^2; \\
 E_{xxyy}^0 &\approx E_{xxyy}^{0*} = E_{11}^0 c^3 s; & E_{yyyy}^0 &\approx E_{yyyy}^{0*} = E_{11}^0 s^4; \\
 E_{yyxy}^0 &\approx E_{yyxy}^{0*} = E_{11}^0 s^3 c; & E_{xyxy}^0 &\approx E_{xyxy}^{0*} = E_{11}^0 s^2 c^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

На основе данных таблиц 3.1, 3.4 были проведены расчеты компонент матриц  $[E_\alpha^0]$  и  $[E_\alpha^{0*}]$  для угле- и стеклопластика. Результаты представлены в виде графиков (рис. 3.9 – углепластик; рис. 3.10 – стеклопластик) зависимостей  $E_{ijkl}^0(\alpha)$  для всех шести компонент матрицы модулей упругости. Сплошными линиями на графиках обозначены компоненты  $[E_\alpha^0]$ , а штриховыми -  $[E_\alpha^{0*}]$ .

Из рис. 3.9-3.10 видно, что расхождение значений упругих констант, подсчитанных по соотношениям (3.5) и (3.14) для углепластиков значительно ниже, чем для стеклопластиков. Объяснить это можно тем, что для углепластика

$\frac{E_{11}^0}{E_{22}^0} \approx 20$ , а для стеклопластика -  $\frac{E_{11}^0}{E_{22}^0} \approx 5$ , и влиянием остальных компонент матрицы

модулей упругости монослоя пренебрегать некорректно.

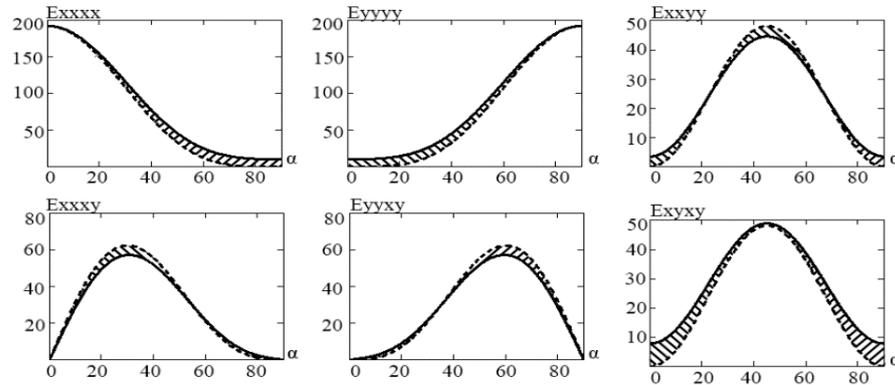


Рис. 3.9. Зависимости компонент матрицы модулей упругости углепластика от угла поворота [136]

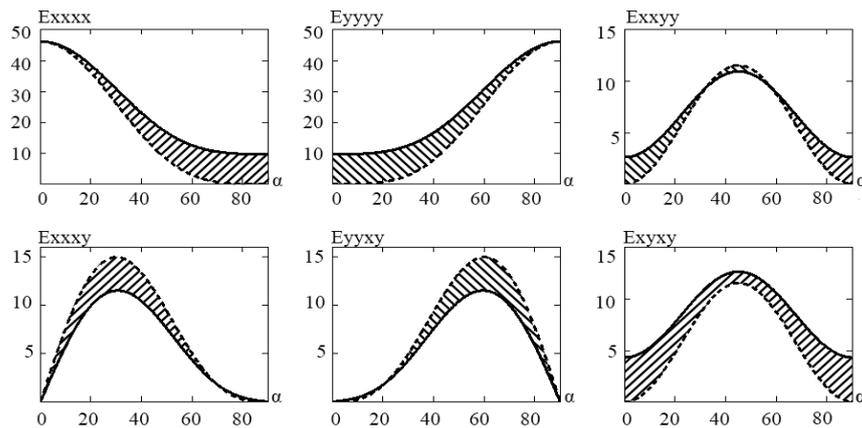


Рис. 3.10. Зависимости компонент матрицы модулей упругости стеклопластика от угла поворота [136]

Для определения границ применимости упрощенного подхода были построены зависимости относительного отклонения констант (3.15) от значения модуля упругости вдоль волокон  $E_1$ . Для демонстрационного расчета на основе таблиц 3.1 и 3.4 усредненные значения  $E_2 = 9$ ,  $G_{12} = 5$  и  $\nu_{12} = 0,3$  считались постоянными, изменялся только модуль  $E_1 = 39...192$ , таким образом,  $\frac{E_{11}^0}{E_{22}^0} \approx 4...20$ .

Угол поворота  $\alpha = 30^\circ$ .

$$\Delta_{xxxx} = \frac{\left\| |E_{xxxx}^0| - |E_{xxxx}^{0*}| \right\|}{|E_{xxxx}^0|}; \Delta_{yyyy} = \frac{\left\| |E_{yyyy}^0| - |E_{yyyy}^0| \right\|}{|E_{yyyy}^0|}; \quad (3.15)$$

...

Поскольку вид полученных зависимостей для всех констант одинаков, удобнее рассмотреть усредненную кривую (рис. 3.11):

$$\Delta_{общ} = \frac{\sum \Delta_{ijkl}}{6}. \quad (3.16)$$

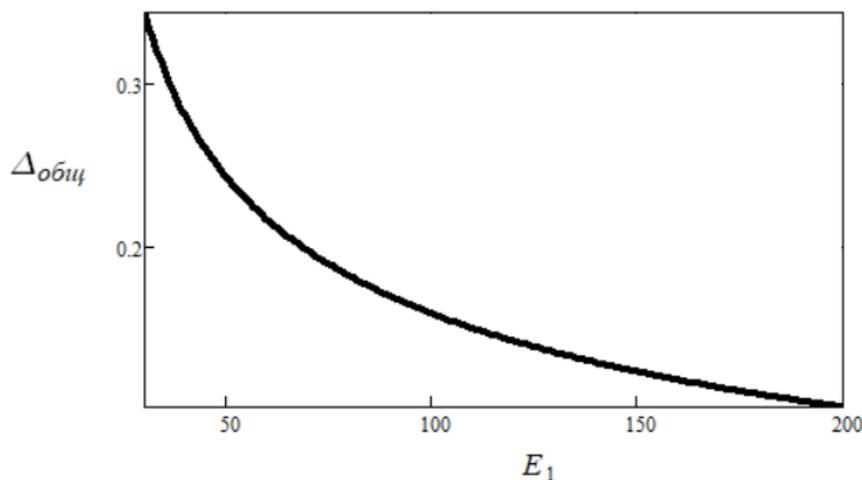


Рис. 3.11. Зависимость  $\Delta_{общ}$  от значения  $E_1$

### 3.4. Построение предельных поверхностей прочности в пространстве напряжений на основе критериев прочности для пар слоев

#### *Модель ромба*

Для определения критериев прочности была использована модель ромба для воссоздания симметрично намотанных труб, которая представляет собой нерастяжимые стержни, образующие ромб со стороной  $l$ . Силы  $P_z = 2\sigma_z l \sin \alpha$ ,  $P_\theta = 2\sigma_\theta l \cos \alpha$  принимают за 1 при растяжении по двум осям. Момент  $M = 2\mu l^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , пропорционален площади ромба и при смещении угла стержни не вызывают изменение момента. Значение  $\mu$  – это величина момента на единицу поверхности, проявляющийся при смещении матрицы.

Можно рассчитать работу сил  $P_z$ ,  $P_\theta$  при изменении  $d\alpha$ , точкой приложения которых являются вершины ромба, тогда  $\Delta_z = (2l \cos \alpha)' d\alpha = -2l \sin \alpha \cdot d\alpha$ ;  $\Delta_\theta = 2l \cos \alpha \cdot d\alpha$  и, приравняв к моменту  $M = 2\mu l^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , получим:

$$|P_z \Delta_z + P_\theta \Delta_\theta| = Md\alpha. \quad (3.17)$$

Необходимо рассчитать критический параметр распределенного момента  $\mu^*$  для определения начала деструкции матрицы. Для этого значение прочности растяжения берем, как  $\sigma_z^*(45) = \sigma_{45} = \mu^* / 2$ , где 45 означает намотку трубы ( $\pm 45^\circ$ ). Уравнение (3.17) в осях  $\sigma_z - \sigma_\theta$  сводится к графикам прямых 1, 2 (рис. 3.16 – 3.19) с коэффициентами наклона  $\beta^* = \text{arctg } \text{tg}^2 \alpha$ :

$$|\sigma_z \text{tg} \alpha - \sigma_\theta \text{ctg} \alpha| = \sigma_{45} \Rightarrow$$

1.  $\sigma_\theta = t^2 \sigma_z + t \sigma_{45}$ ; при  $\sigma_z < \text{tg} \beta^* \sigma_\theta$ ;  $\text{tg} \beta^* = \text{tg}^2 \alpha = t^2$
2.  $\sigma_\theta = t^2 \sigma_z - t \sigma_{45}$ ; при  $\sigma_z > \text{tg} \beta^* \sigma_\theta$ ;  $\text{tg} \beta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}$ .

$$(3.18)$$

Разность в выражении (3.18) иллюстрирует ситуацию искажения ромба напряжениями  $\sigma_z, \sigma_\theta$  с изменением угла  $\alpha$  в разные стороны. Далее можно определить уравнения для оценки прочности при растяжении вдоль одной оси трубы, в зависимости от намотки ( $\pm \alpha$ ) в одном из направлений: в окружном  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  или осевом  $\sigma_z^*(\alpha)$

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_z^*(45) t^{-1} = \sigma_{45} \text{ctg} \alpha; \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = \sigma_{45} \text{tg} \alpha. \quad (3.19)$$

Для намотки  $\pm 45^\circ$  оба направления являются равнозначными. Для баллонов со сжатым газом потеря прочности часто бывает связана с недостаточной герметичностью из-за внутреннего давления, а не с прочностными свойствами несущей матрицы или материала. Далее мы не будем рассматривать ситуации с наличием проницаемости, так как считаем, что герметичность заведомо обеспечивается герметиком или лейнером. Принято, что  $\sigma_z^*(45) \neq (>) \sigma_\theta^*(45)$ , а также  $\sigma_z^*(45) = \sigma_\theta^*(45) = \sigma_{45}$ ;  $\sigma_z^*(0) = \sigma_\theta^*(90) = \sigma_0$ ;  $\sigma_z^*(90) = \sigma_\theta^*(0) = \sigma_{90}$ ;  $\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha)$ .

Вышеизложенные условия были сделаны для упрощения методики. Для учета сопротивления при растяжении в окружном направлении при намотке  $\sigma_z^*(90) = \sigma_{90}$  можно рассмотреть следующее уравнение:

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \text{ctg} \alpha + \sigma_{90}; \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \text{tg} \alpha + \sigma_{90}. \quad (3.20)$$

При  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow \infty$ , в (3.19) достигается  $\sigma_0$  вдоль волокон при малых углах для осевой прочности и для углов порядка  $90^\circ$  градусов для окружной прочности. Можно выделить две области для прочности при осевом растяжении при изменении угла: первая это область больших углов, где на значение прочности влияет степень перекоса ромба, тогда как вторая это область малых углов с механизмом разрыва волокон. Промежуточное значение углов определяет смену двух областей, где выполняется равенство критических напряжений.

$$\begin{aligned} \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) &= \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha; & \alpha > \alpha_0, \\ \approx \sigma_0; & \alpha \leq \alpha_0 \end{cases}; \\ \sigma_\theta^*(\alpha) &= \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha; & \alpha < 90^\circ - \alpha_0, \\ \approx \sigma_0; & \alpha \geq 90^\circ - \alpha_0 \end{cases}, \\ \operatorname{ctg} \alpha_0 &= \sigma_0 / \sigma_{45}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Примем значения  $\sigma_0 = 1200$  МПа;  $\sigma_{45} = 300$  МПа, тогда:

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45} = 1200 / 300 = 4 \Rightarrow \alpha_0 = 0.245 = 14^\circ. \quad (3.22)$$

Для внесения поправок в (3.21) важно учитывать наличие комбинации касательных и нормальных напряжений, что видно из критерия разрушения, оценивающего прочность волокон и момент разрушения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + m_0 \tau_{12} &= \sigma_0; \\ \sigma_1 &= \sigma_z \cos^2 \alpha; \quad \tau_{12} = \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \\ \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) &= \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha + m_0 \sin \alpha \cos \alpha}; \quad \alpha \leq \alpha_0 \\ \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) &= \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \\ \alpha_0 &\Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Сделаем следующие допущения для приближенного решения последнего уравнения (3.23):

- 1)  $\alpha_0$  малый угол, тогда примем, что  $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$ ;  $\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha_0^2 \approx 1$ ,
- 2) примем  $m_0 = 0.3$ , так как  $m_0$  трудно определять для малых углов, поэтому из (3.23):

$$\begin{aligned}\sigma_0 \alpha_0 &\approx \sigma_{45} (1 + 0.3 \alpha_0) \Rightarrow \\ \alpha_0 &= \frac{\sigma_{45}}{\sigma_0 - 0.3 \sigma_{45}} = 0.27 = 15.5^\circ.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Разница в расчетах по (3.24) и (3.22) около 10%, и стоит отметить, что (3.21), (3.23) влияют только в ситуациях при осевом растяжении с малыми углами ( $90^\circ$  при окружном) из чего следует, что для намотки  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  или  $60^\circ$  расчет поправки не является необходимым.

Для  $\pm 16^\circ$  из уравнения (3.20) можно получить осевую прочность, взяв  $\sigma_{90} = 100$  МПа:

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90} \Rightarrow \sigma_z^*(16) = 690 \text{ МПа.} \quad (3.25)$$

Схожим образом, как и в уравнении (3.23), учитывая (3.20) и (3.25), запишем для различных типов разрушения равенство критических напряжений

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} &= (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha_0 + \sigma_{90} \Rightarrow \\ \alpha_0 &\approx \frac{\sigma_{45} - \sigma_{90}}{\sigma_0 - m_0 \sigma_{45} + (1 - m_0) \sigma_{90}} = \frac{200}{1180} \approx 10^\circ.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Для вывода уравнения (3.26) были использованы все допущения, сделанные выше, а также значение  $m_0 = 0.3$ .

*Получение предельных поверхностей методом трех отрезков и эллипса.*

При анализе деструкции матрицы для слоёв ( $\pm \alpha$ ) необходимо получить с помощью прямых 1 и 2 рис. 3.16-3.19) предельную поверхность. Прямые нужно провести через  $\sigma_z^*(\alpha)$ ,  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  под  $\beta^* = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Уравнения зависимости прямых в общем случае соответствуют (3.19) или (3.20), а малых углах (или около  $90^\circ$ ) – (3.21) или (3.23).

На основании нитяной модели на луче  $O$  нужно отметить  $C$  – точку, на месте которой волокна разрушаются. В точке  $C$  считаем, что по волокнам напряжение равно  $\sigma_0$ . Можно показать, что проекции напряжения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{zC} &= \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{c^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{1}{1+t^2}; \\ \sigma_{\theta C} &= \sigma_0 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{s^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{t^2}{1+t^2}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Участок на прямой 3, иллюстрирующий разрушение волокон, перпендикулярен лучу  $O$ :  $\sigma_0 = t^2 \sigma_z$ , следовательно, для прямой 3 уравнение имеет вид:  $\sigma_0 = -\frac{\sigma_z}{t^2} + K$ ;

Подставим координаты  $C$  (3.27) в уравнение прямой 3, и получим  $\Rightarrow K = \sigma_0 \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)}$ , а для прямой 3 [15]:

$$t^2 \sigma_0 + \sigma_z = \sigma_0 (1+t^4)(1+t^2)^{-1}. \quad (3.28)$$

Для получения приближения кусочно-линейной предельной поверхности рассмотрим наклонный эллипс. Построим его через три точки, две из которых выражаются через (3.19), а третья является точкой  $C$  (3.27), располагающейся на луче  $O$ . Наклонный эллипс (3.27) обозначен на рис. 3.16 и 3.17 цифрой 4

$$t^2 \sigma_z^2 + t^{-2} \sigma_0^2 - \sigma_z \sigma_0 \left( 2 - \frac{\sigma_{45}^2 (1+t^2)^2}{t^2 \sigma_0^2} \right) = \sigma_{45}^2; \quad t = tg \alpha. \quad (3.29)$$

Впоследствии для расчета коэффициентов запаса при заданном давлении будем брать предельную поверхность в виде (3.29). При таком подходе, однако сложно определить и разделить механизмы разрушения: разрыв волокон (прямая 1) и разрушение матрицы при перекосе ромба (1 или 2 прямая). Для учета этого используем предельную поверхность в виде прямоугольника, определяемого через прямые (3.18) и (3.26).

Для расчета необходимо получить  $\sigma_{zB}; \sigma_{\theta B}$  в точке  $B$  на рис. 3.16 – 3.19. И тогда отрезок  $OB$  определяется как:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_z}{\sigma_{zB}}, \quad (3.30)$$

который при дальнейшем проведении пересекает прямые 1 (3.28), 2 (3.18) или 3 (3.28) в точке  $A$ . Коэффициент запаса получен из отношения  $AO$  к  $OB$   $k = \sigma_{zA} / \sigma_{zB} = \sigma_{\theta A} / \sigma_{\theta B}$ .

Пересечение с прямой 1:

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left( \frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} ctg\alpha - tg\alpha \right)^{-1}.$$

Пересечение с прямой 2:

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left( tg\alpha - \frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} ctg\alpha \right)^{-1}.$$

Пересечение с прямой 3:

$$k = \frac{\sigma_{\theta A}}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\theta B}} \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)} \left( 1 + \frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{\theta B} t^2} \right)^{-1}.$$

**Исследование соответствия экспериментальных данных результатам по методу трех отрезков.** Наиболее часто используемый способ построения для обработки экспериментальных данных [19] показан на рис. 3.12. На нем также показаны эллипсы, вершины которых не лежат на «оптимальном» луче, то есть в данной ситуации прочность не получается наибольшей, когда нагрузке подвержены в основном волокна. Этот эффект получается вследствие того, что в  $A\sigma_z^2 + B\sigma_0^2 + C\sigma_z\sigma_0 = 1$  присутствует только три варьируемых параметра, что недостаточно для моделирования вышеописанного процесса и для соблюдения следующих условий:

- 1-2. Задание прочности при одноосном осевом и окружном растяжении на осях.
3. При оптимальном нагружении вдоль луча достижение  $\sigma_0$  в точке  $C$ .
4. Поворот оси эллипса на  $\beta^* = arctg(tg^2\alpha)$ .

Для учета вышеперечисленного нужно добавить в уравнение повернутого эллипса  $A\sigma_z^2 + B\sigma_0^2 + C\sigma_z\sigma_0 = 1$  хотя бы один параметр, например, координаты эллипса вне начала отсчета. Уточнение, исходя из рис. 3.13, 3.14, будет совсем небольшим, однако расчеты значительно усложнятся. Самый простой способ добавления нового параметра (вершины эллипса вне начала координат) это допущение, что координаты точки совпадают с  $C$  на луче  $O$ , правда в таком случае условия 1-2 не будут выполняться, и одна из прочностей из (3.21) будет неизвестна.

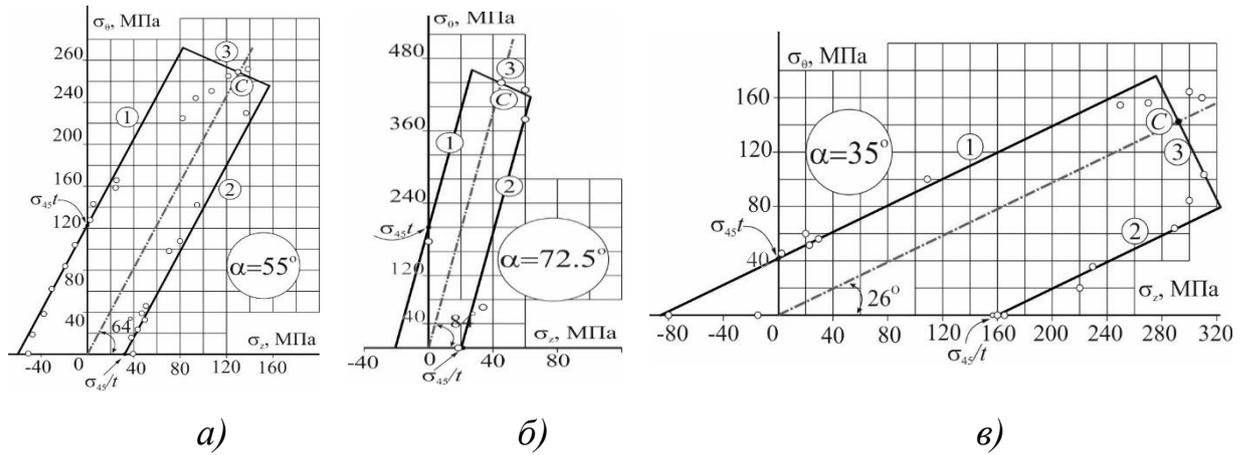


Рис. 3.12. Предельные поверхности труб с намотками  $\pm 55^\circ$  – (а),  $\pm 72,5^\circ$  – (б),  $\pm 35^\circ$  – (в). Материал труб стеклопластик, нагружение двухосное

Исходя из построенных на рис.3.12 кусочно-линейных предельных поверхностей, значения для  $\sigma_{45}; \sigma_0$  сильно различаются (таблица 3.7), это говорит как о разбросе экспериментальных данных, так и о приближенности принятых гипотез.

Таблица 3.7. Оценки базовых значений прочности  $\sigma_{45}; \sigma_0$ , полученные при обработке данных для труб с разными углами намотки

$\pm \alpha^\circ$	$tg^2 \alpha = tg \beta$	$\beta^\circ$	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\approx \sigma_{45}, \text{ МПа}$	$\approx \sigma_0, \text{ МПа}$
$\pm 55^\circ$	2	64	2/3	1/3	60–80	230
$\pm 35^\circ = \pm(90^\circ - 55^\circ)$	1/2	26	1/3	2/3	60–100	240–250
$\pm 72.5^\circ$	10	84	0.909	0.0905	65	370
$\pm 30^\circ$	1/3	18	1/4	3/4	300	1000
$\pm 60^\circ$	3	72	3/4	1/4	300	1000

При условии попадания вершины эллипса на оптимальный луч (3.18), (3.21) проявляется эффект вырождения кривой второго порядка в две прямые (3.18). Более того, можно также заметить, что в этой ситуации вершина эллипса удаляется на бесконечность, и тогда  $ax^2 + by^2 + cxy = 1 \rightarrow a = b; c = -2a$ , поэтому выражение преобразуется в  $a(x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow |x - y| = a^{-1/2}$ .

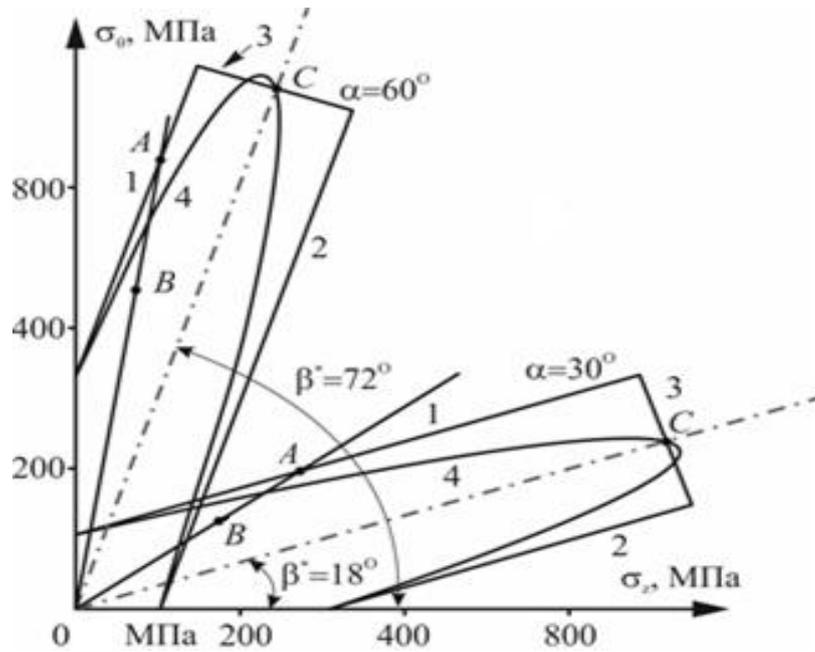


Рис. 3.13. Получение коэффициента запаса через предельные поверхности в виде прямоугольников (кривая 123) и эллипсов (кривая 4) для намоток  $\alpha = \pm 30^\circ$  и  $\alpha = \pm 60^\circ$  ( $\sigma_{45} = 300$  МПа,  $\sigma_0 = 1000$  МПа). 1, 2 – условия перекашивания ромба при двухосном растяжении, 3 – условие разрыва волокон;  $\operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg}^2 \alpha$  [18]

**Метод наименьших квадратов. Случай предельного эллипса.** Для получения наиболее оптимальных параметров эллипса в координатах  $\sigma_z - \sigma_\theta$  применим метод наименьших квадратов для уравнения  $A\sigma_z^2 + B\sigma_\theta^2 + C\sigma_z\sigma_\theta = 1$ , где  $\sigma_z = x$ ;  $\sigma_\theta = y$ :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1 \Leftrightarrow F = \sum (Ax^2 + By^2 + Cxy - 1)^2 = \min.$$

Задача формулируется как процесс минимизации суммы квадратов отклонений эллипса с параметрами  $A$ ,  $B$  и  $C$  от точек  $x_i; y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Данные  $n$  экспериментальных прочностей получены при изменении отношения напряжений  $\sigma_z / \sigma_\theta$ .

Решение системы линейных уравнений дает коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  из условия минимума:

$$\frac{dF}{dA} = 0 \Rightarrow Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = d_1; \quad a_1 = \sum x_i^4; \quad b_1 = a_2 = \sum x_i^2 y_i^2 = c_3;$$

$$\frac{dF}{dB} = 0 \Rightarrow Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = d_2; \quad c_1 = \sum x_i^3 y_i = a_3; \quad d_1 = \sum x_i^2; \quad b_2 = \sum y_i^4;$$

$$\frac{dF}{dC} = 0 \Rightarrow Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 = d_3; \quad d_2 = \sum y_i^2; \quad d_3 = \sum x_i y_i; \quad c_2 = b_3 = \sum x_i y_i^3;$$

$$A \times \Delta = d_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1(c_2 d_3 - c_3 d_2) + c_1(b_3 d_2 - b_2 d_3);$$

$$B \times \Delta = a_1(c_3 d_2 - c_2 d_3) + d_1(a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_1(a_2 d_3 - a_3 d_2);$$

$$C \times \Delta = a_1(b_2 d_3 - b_3 d_2) + b_1(a_3 d_2 - a_2 d_3) + d_1(a_2 b_3 - a_3 b_2);$$

$$\Delta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1(a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

Очевидно, что в случае числа точек более трех необходимо использовать решение трех линейных уравнений. На рис. 3.14 сравниваются предельный эллипс, построенный по трем точкам, аналогично рис. 3.13, и эллипс, построенный с использованием уравнений и учета большого числа экспериментальных точек с рис. 3.12. Обнаруживается незначительное расхождение, что допускает использование более простого метода построения через поверхности в виде прямоугольника или эллипса с двумя экспериментальными прочностями  $\sigma_0$ ;  $\sigma_{45}$ .

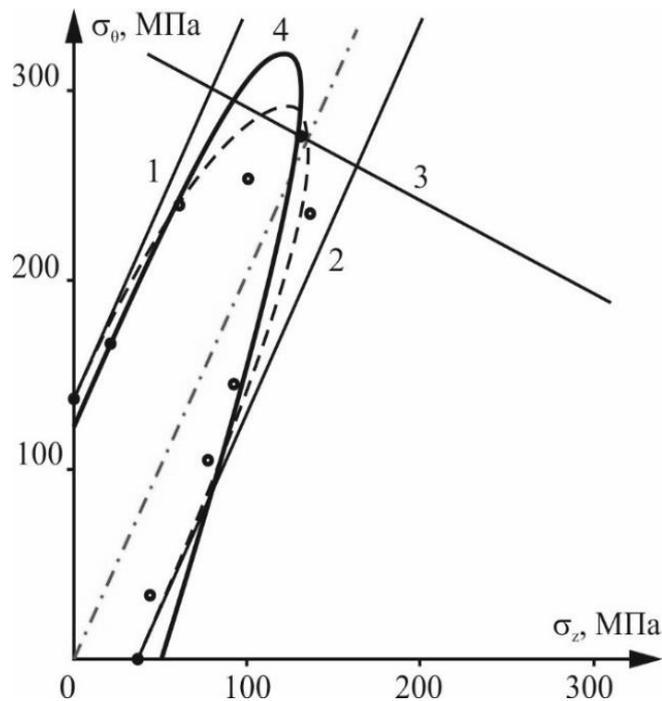


Рис. 3.14. Три способа описания экспериментальных данных с рис. 3.12 для  $\pm 55^\circ$   
 1) прямоугольником (123); 2) эллипсом с учетом прочностей  $\sigma_{45}$ ;  $\sigma_0$  (штриховая); 3) эллипс, полученный через МНК (сплошная)

### *Рациональное проектирование структуры армирования*

Помимо основных достоинств волокнистых композитов (безопасное разрушение, устойчивость к коррозии) можно также отметить возможность подбора оптимальной структуры армирования [9, 10, 11]. Данное свойство привлекает исследователей для различных экспериментов с воздействием разных факторов [12, 13], а также для проведения теоретических расчетов зон полюсных отверстий и донных частей. Одним из важных направлений является топологическая оптимизация формы изделий. В литературе показано [14], что были изучены корреляции между свойствами, размерами композитных материалов и нагрузками на них, что является очень важным с точки зрения эксплуатации. Утверждается, что для этого целесообразно использовать метод рассчитанных интервалов [21].

Наряду с классическими критериями прочности [22-23, 79, 28] часто также используют более простые критерии [92-95]. Для точных расчетов важно учитывать деградацию свойств материала при прогрессирующей деструкции [3-4, 9-10, 30].

**Исходная структура армирования.** Рассмотрим для иллюстрации *A*-структуру армирования пятью семействами пар слоев, которые приведены в таблице (таблица 3.9). Изделие представляет собой баллон из стеклопластика.

Таблица 3.8. Значения тригонометрических функций (вспомогательная таблица)

$\pm\alpha_i^0$	<b>sin</b>	<b>cos</b>	$\sin^2 \alpha_i$	$\cos^2 \alpha_i$	$\sin^4 \alpha_i$	$\cos^4 \alpha_i$	$s^2 c^2$
16	0.2756	0.9613	0.0759	0.9241	0.0058	0.8538	0.0702
18	0.3090	0.9511	0.0955	0.9046	0.0091	0.8183	0.0864
52	0.7880	0.6157	0.6209	0.3791	0.3856	0.1437	0.2354
63	0.8910	0.4540	0.7939	0.2061	0.6302	0.0425	0.1636
49.5	0.7604	0.6494	0.5782	0.4217	0.3343	0.1778	0.2438

Таблица 3.9. Армирование баллонов со структурами  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Количество слоев  $N=28$ ;  $n_i$  – число пар слоёв

$i$	$\pm\alpha_i, ^\circ$	$n_i$		
		$A$	$B$	$C$
1	16	2	0	0
2	18	4	4	2
3	52	2	2	2
4	63	2	2	2
5	90	4	6	4
1- $C$	49	0	0	4

*Значения средних напряжений для всех структур  $A$ ,  $B$  и  $C$*

Параметры баллона  $h = 8$  мм – толщина стенки;  $R = 150$  мм – средний радиус. Начальное давление  $p = 100$  атм = 10 МПа.

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа}. \quad (3.31)$$

Для использования послойного метода возьмем следующие значения свойств:

$$E_{11}^0 = 45 \text{ ГПа}; E_{22}^0 = 9 \text{ ГПа}; G_{12}^0 = 7 \text{ ГПа}; E_{12}^0 = 3 \text{ ГПа}. \quad (3.32)$$

Для описания упругих свойств необходимо выбрать одну из упругих моделей, таких как модель Фойгта, модель Рейсса, модель Хашина-Штрикмана и др. Для обоснования выбора той или иной модели требуются значения модулей упругости матрицы и волокон, а также их объемная доля. Несмотря на наличие данных в литературе, для точности описания упругих свойств значения модулей необходимо получать через эксперимент. Из модели Фойгта и Рейсса можно получить приближенные верхние и нижние оценки, что может быть удобным и полезным для начальных расчетов, но не для точных оценок.

Для выбора оптимальной структуры армирования достаточно знать соотношения между коэффициентами запаса и прочностью в связи с линейностью зависимости напряжения от внутреннего давления.

Для получения самой оптимальной структуры армирования важно получить коэффициенты запаса разных слоев почти равными друг другу. Данная задача

оптимизации решается путем проведения ряда прямых задач для чего необходимо подобрать простые схемы расчета.

Для модели ромба в применении к однонаправленному композиту достаточно знать прочность композита вдоль  $\sigma_0$  и поперек  $\sigma_{90}$  волокон, прочность на растяжение  $\sigma_{45}$  с намоткой  $\pm 45^\circ$ . Возьмем данные значения следующими:

$$\sigma_0 = 1200 \text{ МПа}, \sigma_{90} = 100 \text{ МПа} \text{ и } \sigma_{45} = 300 \text{ МПа}, \quad (3.33)$$

и с учетом этого получены предельные поверхности для А-структуры баллона с различными углами намотки, некоторые из которых показаны на рис. 3.15 – 3.18.

Было показано, что попытки связать прочность композита с использованием распределения Вейбулла для прочности волокон и модели Дау-Даниэльса-Розена сталкиваются с трудностями и не приводят к точному результату, поэтому были взяты значения прочностей, полученные на модельных образцах [15].

Таблица 3.10. Модули упругости (ГПа) пар слоев. Стеклопластик (индекс  $g$ ), углепластик (индекс  $c$ )

$\pm\alpha_i^\circ$	$E_{zz}^g(\alpha_i)$	$E_{90}^g(\alpha_i)$	$E_{z0}^g(\alpha_i)$	$E_{zz}^c(\alpha_i)$	$E_{90}^c(\alpha_i)$	$E_{z0}^c(\alpha_i)$
16	41.0	10.3	4.4	122.0	10.9	11.1
18	39.8	10.7	4.7	117.6	11.6	12.9
49.5	19.3	24.9	7.9	36.2	56.7	31.0
52	17.9	26.6	7.7	32.0	63.3	30.1
63	13.1	34.3	6.3	17.2	94.2	21.8
90	9.0	45.0	3.0	9.0	140.0	3.0

Далее пересчитываем: эффективные модули в С-структуре, напряжения в парах слоев, предельную поверхность для  $49.5^\circ$ , коэффициенты запаса и предельное давление для С структуры, чтобы можно было оценить, насколько С-структура лучше, чем А. Из известных формул получаем в ГПа.

$$\begin{aligned} E_{zz}(\alpha) &= E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\ E_{90}(\alpha) &= E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\ E_{z0}(\alpha) &= (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4). \end{aligned}$$

Для стеклопластика  $16^\circ$  :

$$E_{zz}(16) = 45 \cdot 0.8538 + 9 \cdot 0.0058 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0702 = 41$$

$$E_{\theta\theta}(16) = 45 \cdot 0.0058 + 9 \cdot 0.8538 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0702 = 10.3$$

$$E_{z\theta}(16) = (45 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.0702 + 3 \cdot (0.0058 + 0.8538) = 4.4$$

Для углепластика  $16^\circ$  :

$$E_{zz}(16) = 140 \cdot 0.8538 + 9 \cdot 0.0058 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0702 = 122$$

$$E_{\theta\theta}(16) = 140 \cdot 0.0058 + 9 \cdot 0.8538 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0702 = 10.9$$

$$E_{z\theta}(16) = (140 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.0702 + 3 \cdot (0.0058 + 0.8538) = 11.1$$

Для стеклопластика  $18^\circ$  :

$$E_{zz}(18) = 45 \cdot 0.8183 + 9 \cdot 0.0091 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0864 = 39.8$$

$$E_{\theta\theta}(18) = 45 \cdot 0.0091 + 9 \cdot 0.8183 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0864 = 10.7$$

$$E_{z\theta}(18) = (45 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.0864 + 3 \cdot (0.0091 + 0.8183) = 4.7$$

Для углепластика  $18^\circ$  :

$$E_{zz}(18) = 140 \cdot 0.8183 + 9 \cdot 0.0091 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0864 = 117.6$$

$$E_{\theta\theta}(18) = 140 \cdot 0.0091 + 9 \cdot 0.8183 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.0864 = 11.6$$

$$E_{z\theta}(18) = (140 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.0864 + 3 \cdot (0.0091 + 0.8183) = 12.9$$

Для стеклопластика  $52^\circ$  :

$$E_{zz}(52) = 45 \cdot 0.1437 + 9 \cdot 0.3856 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2354 = 17.9$$

$$E_{\theta\theta}(52) = 45 \cdot 0.3856 + 9 \cdot 0.1437 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2354 = 26.6$$

$$E_{z\theta}(52) = (45 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.2354 + 3 \cdot (0.3856 + 0.1437) = 7.7$$

Для углепластика  $52^\circ$  :

$$E_{zz}(52) = 140 \cdot 0.1437 + 9 \cdot 0.3856 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2354 = 32$$

$$E_{\theta\theta}(52) = 140 \cdot 0.3856 + 9 \cdot 0.1437 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2354 = 63.3$$

$$E_{z\theta}(52) = (140 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.2354 + 3 \cdot (0.3856 + 0.1437) = 30.1$$

Для стеклопластика  $63^\circ$  :

$$E_{zz}(63) = 45 \cdot 0.0425 + 9 \cdot 0.6302 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.1636 = 13.1$$

$$E_{\theta\theta}(63) = 45 \cdot 0.6302 + 9 \cdot 0.0425 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.1636 = 34.3$$

$$E_{z\theta}(63) = (45 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.1636 + 3 \cdot (0.0425 + 0.6302) = 6.3$$

Для углепластика  $63^\circ$  :

$$E_{zz}(63) = 140 \cdot 0.0425 + 9 \cdot 0.6302 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.1636 = 17.2$$

$$E_{\theta\theta}(63) = 140 \cdot 0.6302 + 9 \cdot 0.0425 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.1636 = 94.2$$

$$E_{z\theta}(63) = (140 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.1636 + 3 \cdot (0.0425 + 0.6302) = 21.8$$

Для стеклопластика 49.5° :

$$E_{zz}(49.5) = 45 \cdot 0.1778 + 9 \cdot 0.3343 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2438 = 19.3$$

$$E_{\theta\theta}(49.5) = 45 \cdot 0.3343 + 9 \cdot 0.1778 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2438 = 24.9$$

$$E_{z\theta}(49.5) = (45 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.2438 + 3 \cdot (0.1778 + 0.3343) = 7.9$$

Для углепластика 49.5° :

$$E_{zz}(49.5) = 140 \cdot 0.1778 + 9 \cdot 0.3343 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2438 = 36.2$$

$$E_{\theta\theta}(49.5) = 140 \cdot 0.3343 + 9 \cdot 0.1778 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 7) \cdot 0.2438 = 56.7$$

$$E_{z\theta}(49.5) = (140 + 9 - 4 \cdot 7) \cdot 0.2438 + 3 \cdot (0.1778 + 0.3343) = 31$$

Для проверки справедливости приближенного метода исследовали влияние модуля Юнга вдоль волокон на эффективность оптимизации. Поэтому наряду со стекло- взяли углепластик.

*Вычисление компонент тензора средних модулей упругости для A структуры изготовленные из стеклопластика*

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = z, \theta, z$$

$$\bar{E}_{zz}(A, g) = \frac{1}{7} [E_{zz}(16) + 2E_{zz}(18) + E_{zz}(52) + E_{zz}(63) + 2E_{zz}(90)] = 24.2 \text{ ГПа}$$

$$\bar{E}_{\theta\theta}(A, g) = 26.1 \text{ GPa}; \quad \bar{E}_{z\theta}(A, g) = 4.8 \text{ ГПа}$$

Из закона Гука значения для средних деформаций:

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{S}_{ij} \bar{\sigma}_j; \quad i, j = z, \theta \quad (3.34)$$

через компоненты эффективной матрицы податливостей, полученные для (3.32) при вычислении эффективных модулей из данных таблицы 3.9. Проведем расчет для A-структуры:

**Расчет значений элементов матрицы податливостей для A-структуры**

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 4.29 \times 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}; \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 3.98 \times 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}; \quad (3.35)$$

$$S_{z\theta}^0 = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1} = -0.794 \times 10^{-5} \text{ ГПа}^{-1}; \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2 = 608.5 \text{ ГПа}^2.$$

**Получение средних деформаций для A-структуры**

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа}. \quad (3.36)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_\theta = 2.53 \times 10^{-3};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_\theta = 6.72 \times 10^{-3}$$

**Оценка напряжений в парах слоев для A-структуры, МПа**

$$\sigma_z(\alpha_i) = E_{zz}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 133.3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_0(\alpha_i) = E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{00}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 80.3 \text{ МПа}.$$

Таблица 3.10. Средние деформаций (%) для *A*, *B* и *C* структур баллонов, выполненных из стеклопластика (*g*) и углепластика (*c*)

	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_0(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_0(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_0(\alpha_i)$
	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
glass	0.253	0.672	0.346	0.551	0.338	0.555
carbon	0.0965	0.258	0.156	0.195	0.153	0.198

Для всех трех структур в парах слоев были рассчитаны напряжения методом средней деформации. В таблице 3.11. показаны значения, полученные послойным методом. Данные значения напряжений представлены на рис. 3.16-3.19 точками *B*.

Таблица 3.11. Напряжения (МПа) в парах слоев для трех структур из стеклопластика в точках *B* (3.39) при  $p=10$  МПа

$\pm\alpha_i^\circ$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_0(\alpha_i)$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_0(\alpha_i)$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_0(\alpha_i)$
	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
16	133.3	80.3	-	-	-	-
18	132.3	83.8	164	75.2	161	75.2
49.5	-	-	-	-	109	165
52	97.0	198.2	105	175	104	176
63	75.5	246.4	79.5	210	79	211
90	42.9	310	47.7	258	47.1	260

В таблице 3.12 показаны значения напряжений для структур из однонаправленного углепластика с учетом замены в (3.32):

$$E_{11}^0 = 140 \text{ ГПа}, \quad (3.37)$$

с сохранением значений упругих свойств (3.32) и данных из (3.33). Было также замечено, что подбор иных упругих и прочностных свойств не будет вносить больших изменений в методику и оптимизацию.

Таблица 3.12. Напряжения (МПа) в парах слоев для трех (А, В и С) структур из углепластика в точках В - (3.39), (3.40), (3.44) при  $p=10$  МПа

$\pm\alpha_i^\circ$	$\sigma_z(\alpha_i)$ А	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ А	$\sigma_z(\alpha_i)$ В	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ В	$\sigma_z(\alpha_i)$ С	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ С
16	146	38.9	-	-	-	-
18	147	42.4	208	42.6	205.5	42.7
49.5	-	-	-	-	117	160
52	108	193	108	170	108.6	171.4
63	73.1	265	69.3	218	69.5	220
90	16.5	365	19.9	278	19.7	282

**Расчет средних модулей для В-баллона – стекл., ГПа**

$$\bar{E}_{zz}(B, g) = \frac{1}{7}[2E_{zz}(18) + E_{zz}(52) + E_{zz}(63) + 3E_{zz}(90)] = 19.7 \text{ ГПа}$$

$$\bar{E}_{\theta\theta}(B, g) = 31.0 \text{ ГПа}; \quad \bar{E}_{z_0}(B, g) = 4.6 \text{ ГПа.}$$

**Расчет податливостей для В-баллона – стекл., МПа**

$$\bar{S}_{zz}(B, g) = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 0.0526 \text{ ГПа}^{-1} = 5.26 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{S}_{\theta\theta}(B, g) = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 0.0333 \text{ ГПа}^{-1} = 3.33 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$S_{z_0}^0(B, g) = -\bar{E}_{z_0} \bar{\Delta}^{-1} = -0.00783 \text{ ГПа}^{-1} = -0.783 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{\Delta}(B, g) = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z_0}^2 = 591.2 \text{ ГПа}^2.$$

**Расчет средних деформаций для В-баллона – стекл.**

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа.}$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z_0} \bar{\sigma}_\theta = 3.46 \times 10^{-3};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z_0} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_\theta = 5.51 \times 10^{-3}.$$

**Расчет напряжений в парах слоев для В-структуры**

$$\sigma_z(\alpha_i) = E_{zz}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{z_0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 163.6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta(\alpha_i) = E_{z_0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{\theta\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 75.2 \text{ МПа};$$

**Расчет средних модулей для С-баллона – стекл.**

$$\bar{E}_{zz}(C, g) = \frac{1}{7}[2E_{zz}(49) + E_{zz}(18) + E_{zz}(52) + E_{zz}(63) + 2E_{zz}(90)] = 18.2 \text{ ГПа}$$

$$\bar{E}_{\theta\theta} = 30.2 \text{ ГПа}; \quad \bar{E}_{z_0} = 5.8 \text{ ГПа.}$$

**Расчет податливостей для С-баллона – стекл.**

$$\begin{aligned}\bar{S}_{zz} &= \bar{E}_{00} \bar{\Delta}^{-1} = 5.85 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ \bar{S}_{00} &= \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 3.52 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ S_{z0}^0 &= -\bar{E}_{z0} \bar{\Delta}^{-1} = -1.12 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ \bar{\Delta} &= \bar{E}_{zz} \bar{E}_{00} - \bar{E}_{z0}^2 = 516 \text{ ГПа}^2.\end{aligned}$$

### Расчет средних деформаций для С-баллона – стекл.

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа}.$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z0} \bar{\sigma}_\theta = 3.38 \times 10^{-3};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z0} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{00} \bar{\sigma}_\theta = 5.55 \times 10^{-3}.$$

### Пример. Расчет напряжений в парах слоев для С-структуры для 18°

$$\sigma_z(\alpha_i) = E_{zz}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{z0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 160.6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta(\alpha_i) = E_{z0}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{00}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 75.2 \text{ МПа};$$

Таблица 3.13. Значения средних деформаций для стекло- и углепластика

	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$
	A	A	B	B	C	C
ст	$2.53 \times 10^{-3}$	$6.72 \times 10^{-3}$	$3.46 \times 10^{-3}$	$5.51 \times 10^{-3}$	$3.38 \times 10^{-3}$	$5.55 \times 10^{-3}$
угл	$0.965 \times 10^{-3}$	$2.58 \times 10^{-3}$	$1.56 \times 10^{-3}$	$1.95 \times 10^{-3}$	$1.53 \times 10^{-3}$	$1.98 \times 10^{-3}$

### РАСЧЕТЫ ДЛЯ УГЛЕПЛАСТИКА

Таблица 3.14. Напряжения (МПа) в парах слоев для трех (А, В и С) структур из углепластика - (26) и  $p=10$  МПа

$\pm\alpha_i^\circ$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_\theta(\alpha_i)$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_\theta(\alpha_i)$	$\sigma_z(\alpha_i)$	$\sigma_\theta(\alpha_i)$
	A	A	B	B	C	C
16	146	38.9	-	-	-	-
18	147	42.4	208	42.6	205.5	42.7
52	108	193	108	170	108.6	171.4
63	73.1	265	69.3	218	69.5	220
90	16.5	365	19.9	278	19.7	282
49.5	-	-	-	-	117	160

**Вычисление компонент тензора средних модулей упругости для  $A$  структуры из углепластика ГПа, МПа**

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = z, \theta$$

$$\bar{E}_{zz} = 60.6 \text{ ГПа}$$

$$\bar{E}_{\theta\theta} = 67.4 \text{ ГПа}; \quad \bar{E}_{z\theta} = 13.5 \text{ ГПа.}$$

**Вычисление компонент матрицы податливостей для  $A$ -структуры**

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 1.73 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 1.55 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$S_{z\theta}^0 = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1} = -0.35 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2 = 3902.19 \text{ ГПа}^2.$$

**Расчет средних деформаций для  $A$ -структуры**

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_\theta = 9.65 \times 10^{-4};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_\theta = 2.58 \times 10^{-3}.$$

**Расчет напряжений в парах слоев для  $A$ -структуры для какого угла**

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_z(\alpha_i) = E_{zz}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{z\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 146.4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta(\alpha_i) = E_{z\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_z + E_{\theta\theta}(\alpha_i) \bar{\varepsilon}_\theta = 38.9 \text{ МПа.}$$

**Расчет средних модулей для  $B$ -баллона – углепл.**

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = z, \theta, z$$

$$\bar{E}_{zz} = 44.4 \text{ ГПа}$$

$$\bar{E}_{\theta\theta} = 85.8 \text{ ГПа}; \quad \bar{E}_{z\theta} = 12.4 \text{ ГПа}$$

**Расчет податливостей для  $B$ -баллона – углепл.**

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 2.35 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 1.21 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$S_{z\theta}^0 = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1} = -0.34 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$

$$\bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2 = 3656 \text{ МПа}^2.$$

**Расчет средних деформаций для  $B$ -баллона – углепл.**

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа.}$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_\theta = 1.56 \times 10^{-3};$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta} \bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta} \bar{\sigma}_\theta = 1.95 \times 10^{-3}.$$

### Расчет напряжений в парах слоев для *B*-структуры для 18

$$\begin{aligned}\sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 208.4 \text{ МПа}; \\ \sigma_\theta(\alpha_i) &= E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{00}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 42.6 \text{ МПа};\end{aligned}$$

### Расчет средних модулей для *C*-баллона – углепл.

$$\begin{aligned}\bar{E}_{ks} &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i); \quad k, s = z, \theta \\ \bar{E}_{zz} &= 37 \text{ ГПа}; \\ \bar{E}_{00} &= 80.3 \text{ ГПа}; \quad \bar{E}_{z0} = 19 \text{ ГПа}.\end{aligned}$$

### Расчет средних деформаций для *C*-баллона – углепл.

$$\begin{aligned}\bar{S}_{zz} &= \bar{E}_{00}\bar{\Delta}^{-1} = 3.1 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ \bar{S}_{00} &= \bar{E}_{zz}\bar{\Delta}^{-1} = 1.42 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ \bar{S}_{z0}^0 &= -\bar{E}_{z0}\bar{\Delta}^{-1} = -0.73 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \\ \bar{\Delta} &= \bar{E}_{zz}\bar{E}_{00} - \bar{E}_{z0}^2 = 2610.1 \text{ ГПа}^2.\end{aligned}$$

### Расчет средних деформаций для *C*-баллона – углепл.

$$\bar{\sigma}_z \approx 93.7 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_\theta \approx 187.5 \text{ МПа}.$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_z &= \bar{S}_{zz}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z0}\bar{\sigma}_\theta = 1.53 \times 10^{-3}; \\ \bar{\varepsilon}_0 &= \bar{S}_{z0}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{00}\bar{\sigma}_\theta = 1.98 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 205.2 \text{ МПа}; \\ \sigma_\theta(\alpha_i) &= E_{z0}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{00}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_0 = 42.6 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

**Выбор оптимального числа пар слоёв.** Для исходной *A*-структуры (таблица 3.8) приведены в таблице 3.15 коэффициенты запаса, которые дольно сильно зависят от значений углов. Следовательно выбранная модель армирования не является подходящей. Далее для подтверждения этого разберем нитяную модель, в которой из (3.1) было показано, что для средневзвешенных квадратов синусов (SIN) и косинусов (COS) будет верно:

$$\begin{aligned}2 \sum_{i=1}^m n_i \cos^2 \alpha_i &= \sum_{i=1}^m n_i \sin^2 \alpha_i \Rightarrow \frac{SIN}{COS} = 2; \\ \text{для } A \Leftrightarrow \frac{SIN}{COS} &= \frac{\sin^2 16^\circ + 2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{\cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1.11 \ll 2??!\end{aligned} \tag{3.38}$$

а расхождение в последнем равенстве может быть исправлено добавлением пар слоев с разной ориентацией.

**1 способ. В структура.** Будем менять соотношения между числами пар слоев при других неизменных параметрах. Исходя из того, что при  $63^\circ > 55^\circ = \alpha^*$  пары слоев перегружены, а с  $16^\circ < \alpha^*$  – недогружены, сделаем замену  $16^\circ$  на  $90^\circ$ . После замены будет лучше достигаться (3.38):

$$\frac{2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 3}{2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1.92 \approx 2 !!$$

Из данных выше в таблицах 3.13, 3.15 можно увидеть, что случай *B* более оптимальный, чем случай *A*. Можно найти  $x$  – количество заменяемых пар слоев:

$$\frac{(6-x) \sin^2 18^\circ + 2 \sin^2 52^\circ + 2 \sin^2 63^\circ + (6+x)}{(6-x) \cos^2 18^\circ + 2 \cos^2 52^\circ + 2 \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow$$

$$x = 2.13 \approx 2.$$

Замена  $16^\circ$  на  $90^\circ$  дает структуру с оптимальными параметрами. Более того, для достижения лучшего результата по проектированию можно также изменять модули упругости и углы намотки. Выбор между стеклянными, углеродными и органическими волокнами, может помочь в достижении близких коэффициентов запаса между разными слоями и распределении напряжения.

Таблица 3.15. Коэффициенты запаса при внутреннем давлении  $p = 10$  МПа и критическое давление трех структур армирования баллона из стеклопластика (*g*) и углепластика (*c*)

$\pm\alpha^\circ$	$\pm 16^\circ$	$\pm 18^\circ$	$\pm 49.5^\circ$	$\pm 52^\circ$	$\pm 63^\circ$	$90^\circ$	$p^*$	%
структура								
<i>A-g</i>	<b>1.2</b>	1.4	-	3.8	3.8	2.3	12	100
<i>B-g</i>	-	<b>1.7</b>	-	4.0	4.4	2.1	17	141
<i>C-g</i>	-	<b>1.7</b>	4.3	4.0	4.4	2.1	17	142
<i>A-c</i>	<b>3.2</b>	3.6	-	4.0	3.6	5.9	32	267
<i>B-c</i>	-	<b>3.9</b>	-	4.3	4.3	5.0	39	325
<i>C-c</i>	-	<b>4.0</b>	4.3	4.3	4.3	5.1	40	333

**2 способ. С структура.** Для расчета по (3.38) возьмем угол армирования  $\psi$  с сохранением других углов ориентации, тогда выражение преобразуется:

$$\frac{2 \sin^2 \psi + \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{2 - 2 \sin^2 \psi + \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow \sin^2 \psi = 0.5782; \psi = 0.864 \approx 49.5^\circ.$$

Видно, что исходно было по две структуры из двух пар слоев с углами  $16^\circ$  и  $18^\circ$  градусов, но из полученного выше расчета можно сделать замену на четыре пары слоев с углом  $49.5^\circ$  градусов для равномерного распределения напряжения.

Для создания оптимальной равнонапряженной структуры можно не только путем изменения числа слоев, но и аккуратным подбором угла, что представлено в таблице 3.15.

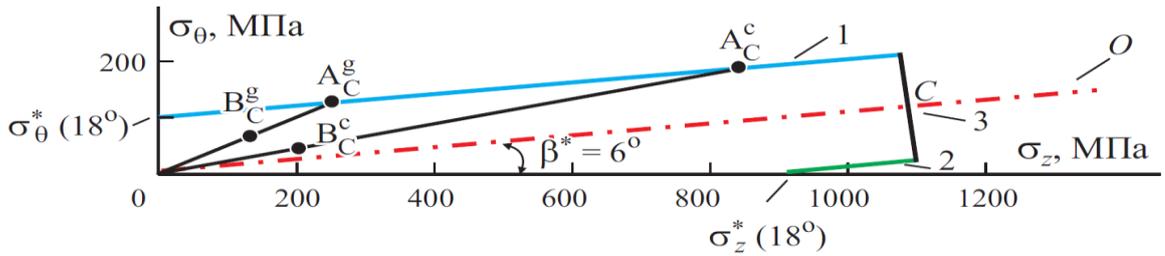


Рис. 3.15. Предельная поверхность при двухосном растяжении для пары слоев  $\pm 18^\circ$

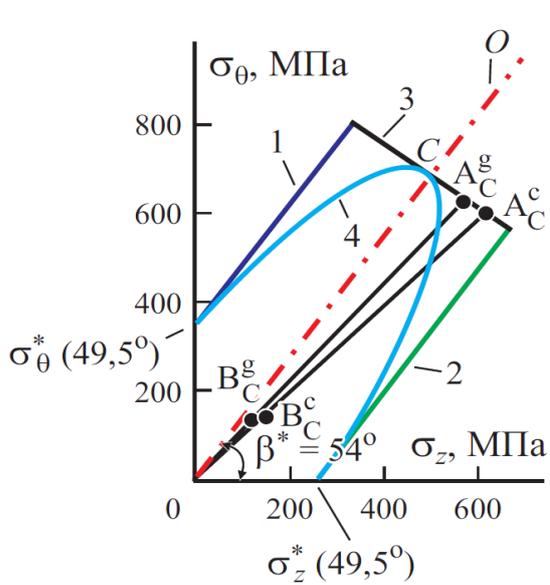


Рис. 3.16. Предельная поверхность для пары слоев при  $\pm 49.5^\circ$ ; прямые 1, 2 – перекашивание ромба (см. рис. 3.1); прямая 3 – разрыв волокон; 4 – эллипс

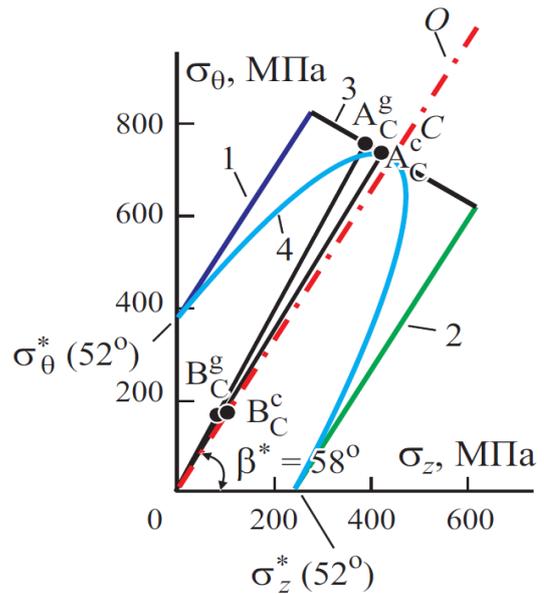


Рис. 3.17. Предельные поверхности для пары слоев с углом  $\pm 52^\circ$

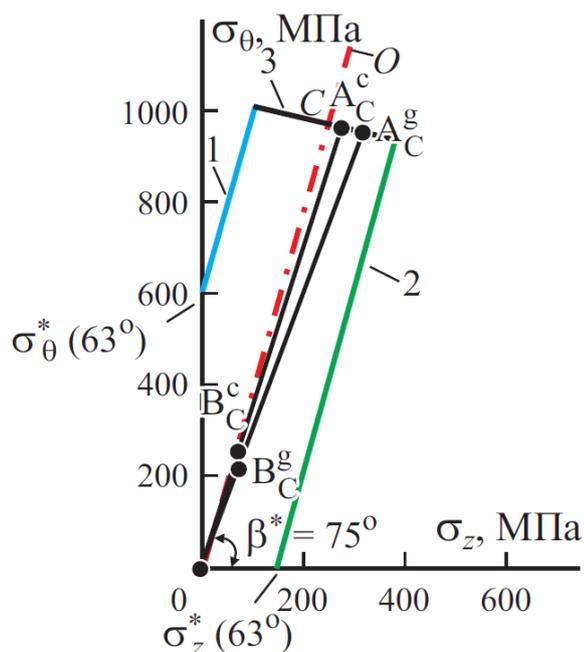


Рис. 3.18. Предельная поверхность для пары слоев при  $\pm 63^\circ$

**Оценка критического давления.** Для расчета критического давления необходимо знать напряжения и коэффициенты запаса для каждой пары слоев (рис. 3.15-3.18), а также минимальный коэффициент запаса (таблица 3.15), при условии, что разрушение начинается с момента разрушения самой нагруженной пары слоев. По таблице 6 для *A*-структуры армирования (начальная)  $p_A^* = p \times k_{A_{\min}} = 10 \times 1.2 = 12$  МПа. Для *B*-структуры  $p_B^* = 10 \times 1.7 = 17$  МПа, а для *C*-структуры  $p_C^* = 10 \times 1.7 = 17$  МПа, что выше *A*-структуры на 42% [15].

Следовательно, путем варьирования какого-либо из параметров для создания для равнонапряженной армированной структуры можно сильно увеличить критическое давление [24].

Высокомодульные волокна в материалах позволяют улучшить механические свойства. Согласно нитяной модели, в композите большую роль играют высокомодульные и высокопрочные волокна, что обеспечивает достижение оптимальной армированной структуры и повышение ее прочности за счет перераспределения нагрузки.

Использование нитяной модели может быть очень выгодным для высокомодульных волокон из углепластика, что видно из таблицы 3.15. Данный эффект достигается за счет схожести поведения композита с нитяной моделью при увеличении продольного модуля упругости. В этой модели матрица не берет на себя нагрузку, и ее роль по сравнению с волокнами незначительна.

Было показано, что прямая 3 отвечает за разрыв волокон, и при оптимизации структуры она пересекает луч нагружения, поэтому получается, что волокна начинают перераспределять нагрузку более согласованно, что вызывает повышение критического давления композита.

Было показано, что для волокон из углепластика нитяная модель достаточно эффективна при использовании ее для оптимизации свойств армированных структур. Данный подход позволяет достичь более высоких механических свойств и повысить критическое давление разрушения [132].

### 3.5. Разработка программы рационального выбора углов армирования с целью создания равнонапряженной волокнистой структуры

*Определение углов намотки и толщины слоев при комбинированной нагрузке.*

#### *Расчет*

1. В случае, когда окружное напряжение может повлечь нежелательные эффекты при действии внутреннего давления, зададим угол  $\alpha_1=90^\circ$ , а величины  $\alpha_2$ ,  $h_1$  и  $h_2$  найдем следующим образом [17]:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & A = h_1 + h_2 \sin^2 \alpha_2; \\
 2. \quad & B = h_2 \cos^2 \alpha_2 \Leftrightarrow 1. + 2. \Rightarrow A + B = h_1 + h_2 = h; \\
 3. \quad & C = h_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{3.}{2.} \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{M^*}{P^*R} = \operatorname{tg} \alpha_2 = t; \\
 \text{из } 2. \Rightarrow & h_2 = B(1+t^2) = \frac{B^2 + C^2}{B} = \frac{[P^{*2} + (M^*/R)^2]}{2\pi P^* R \sigma_0}; \\
 \text{из } 1. \Rightarrow & h_1 = A - h_2 \frac{t^2}{1+t^2} = A - \frac{C^2}{B} = \frac{1}{\sigma_0} \left( p^* R - \frac{M^{*2}}{2\pi P^* R^3} \right) \Rightarrow \\
 & h = h_1 + h_2 = A + B.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Например, рассмотрим:

$$\begin{aligned}
 R &= 200 \text{ мм}; P^* = 1000 \text{ кН}; p^* = 100 \text{ атм} = 10 \text{ МПа}; \\
 M^* &= 100 \text{ кН}\times\text{м}; \sigma_0 = 1000 \text{ МПа}; \\
 A &= \frac{P^*R}{\sigma_0} = 2 \text{ мм}; B = \frac{P^*}{2\pi R\sigma_0} \approx 0.8 \text{ мм}; C = \frac{M^*}{2\pi R^2\sigma_0} \approx 0.4 \text{ мм}; \\
 t &= 0.5; \alpha_2 = 0.464 \approx 27^\circ; h_1 = 1.8 \text{ мм}; h_2 = 1 \text{ мм}; h = 2.8 \text{ мм}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

2. В случае, когда осевая сила может повлечь нежелательные эффекты, зададим угол  $\alpha_1=0$ , а величины  $\alpha_2$ ,  $h_1$  и  $h_2$  найдем аналогично (3.39) с данными из (3.40):

$$\begin{aligned}
 1. \quad & A = h_2 \sin^2 \alpha_2; \\
 2. \quad & B = h_1 + h_2 \cos^2 \alpha_2 \Leftrightarrow 1. + 2. \Rightarrow A + B = h_1 + h_2 = h; \\
 3. \quad & C = h_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{1.}{3.} \Rightarrow \frac{A}{C} = \operatorname{tg} \alpha_2 = t = 5 \Rightarrow \alpha_2 = 1.37 \approx 79^\circ. \\
 \text{из } 1. \Rightarrow & h_2 = A(1+t^2)/t^2 = 2.08 \text{ мм}; \\
 \text{из } 2. \Rightarrow & h_1 = B - h_2 \frac{1}{1+t^2} = 0.72 \text{ мм} \\
 & h = h_1 + h_2 = A + B = 2.8 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

2.3. Рассмотрим три типа волокон: первый тип – с окружным напряжением под углом  $\alpha_1 = 90^\circ$ , второй тип – с осевым напряжением под  $\alpha_2 = 0$ , третий тип – с касательным напряжением под  $\alpha_3 = 45^\circ$ . Далее можно получить значения  $h_1, h_2, h_3$  (таблица 3.16) из условий равновесия по нитяной модели:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & h_1 + \frac{1}{2}h_3 = A; \quad 2. \quad h_2 + \frac{1}{2}h_3 = B; \quad 3. \quad \frac{1}{2}h_3 = C \Rightarrow \\
 & h_3 = 2C; \quad h_2 = B - C; \quad h_1 = A - C \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = A + B \quad (!)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Присутствие крутящего момента для оптимальной модели требует приложения нормальных напряжений. Например, можно создать напряженное состояние с намоткой  $\pm 45^\circ$  для нитяной модели с компонентами напряжений  $A=B=C$ .

Таблица 3.16. Толщины слоев и углы намотки по нитяной модели для данных (3.40)

$\pm\alpha_1^\circ$	$\pm\alpha_2^\circ$	$\pm\alpha_3^\circ$	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$h_3$ , мм
90	27	-	1.8	1.0	-
0	79	-	0.72	2.08	-
90	0	45	.6	0.4	0.8

90	0	60	1.31	0.57	0.92
90	0	30	1.76	0.12	0.92

4. Аналогично пункту 2 рассчитаем для дополнительного угла  $\alpha_3 = \alpha$  ( $\alpha_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 & 1. h_1 + h_3 \sin^2 \alpha = A; \quad 2. h_2 + h_3 \cos^2 \alpha = B; \quad 3. h_3 \sin \alpha \cos \alpha = C \Rightarrow \\
 & h_3 = \frac{C}{\sin \alpha \cos \alpha}; \quad h_2 = B - C \operatorname{ctg} \alpha; \quad h_1 = A - C \operatorname{tg} \alpha; \\
 & h_1 + h_2 + h_3 = A + B - C \left( \operatorname{tg} + \operatorname{ctg} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = A + B !!
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

5. Для любого набора углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , согласно нитяной модели, необходимо решать систему линейных уравнений с неизвестными  $h_1, h_2, h_3$ :

$$\begin{aligned}
 & 1. a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = A \leftrightarrow a_i = \sin^2 \alpha_i; \\
 & 2. b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 = B \leftrightarrow b_i = \cos^2 \alpha_i = 1 - a_i; \\
 & 3. c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3 = C \leftrightarrow c_i = \sin \alpha_i \cos \alpha_i = \sqrt{a_i b_i}; \\
 & 1. + 2. \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = A + B (!)
 \end{aligned}$$

Общее решение

$$\begin{aligned}
 \Delta &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1); \\
 h_1 \Delta &= A (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (B c_3 - b_3 C) + a_3 (B c_2 - b_2 C); \\
 h_2 \Delta &= a_1 (B c_3 - b_3 C) - A (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 C - B c_1); \\
 h_3 \Delta &= a_1 (b_2 C - B c_2) - a_2 (b_1 C - B c_1) + A (b_1 c_2 - b_2 c_1).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

С учетом  $b_i = 1 - a_i$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= c_1 (a_2 - a_3) - c_2 (a_1 - a_3) + c_3 (a_1 - a_2); \\
 h_1 \Delta &= A [(1 - a_2) c_3 - (1 - a_3) c_2] - a_2 [B c_3 - C] + a_3 [B c_2 - C]; \\
 h_2 \Delta &= a_1 [B c_3 - C] - A [(1 - a_1) c_3 - (1 - a_3) c_1] + a_3 [C - B c_1]; \\
 h_3 \Delta &= a_1 [C - B c_2] - a_2 [C - B c_1] + A [(1 - a_1) c_2 - (1 - a_2) c_1]; \\
 (h_1 + h_2 + h_3) \Delta &= A [c_1 (a_2 - a_3) + c_2 (a_3 - a_1) + c_3 (a_1 - a_2)] + \\
 &+ B [c_1 (a_2 - a_3) + c_2 (a_3 - a_1) + c_3 (a_1 - a_2)] = (A + B) \times \Delta; \\
 h_1 + h_2 + h_3 &= A + B !!
 \end{aligned}$$

Из уравнений системы можно увидеть, что для различно ориентированных с равным напряжением волокон композита толщины трех слоев  $h_1, h_2, h_3$  имеют одинаковую сумму, что определяется осевыми и окружными напряжениями, и прочностью вдоль волокон.

Анализ случаев 1-5 показывает, что вес рационально намотанной трубы будет зависеть только от приложенных нормальных напряжений. Дополнительный учет касательных напряжений лишь влияет на соотношение толщин различных слоев [56]. Однако стоит отметить, что такое значение оптимальной намотки получено с учетом ограничения нагрузки.

На рис. 3.19 представлен интерфейс программы по автоматизированному расчету несущей способности композитного баллона для быстрой (инженерной) оптимизации структуры армирования.

Расчет состоит из нескольких этапов:

1 этап. Задание исходных данных.

1.1. Упругие свойства однонаправленной ленты. Пересчет технических констант в тензорные.

1.2. Прочностные свойства (базовые).

1.3. Геометрические размеры (толщина стенки и радиус баллона).

1.4. Давление  $p=...$  и средние осевые и окружные напряжения.

1.5. Структура армирования парами слоев.

Рис. 3.19. Интерфейс программы по автоматизированному расчету несущей способности композитного баллона для быстрой (инженерной) оптимизации структуры армирования

2 этап. Расчет напряжений в парах слоев.

2.1. Вычисление модулей для каждой пары

2.2. Расчет модулей для всего пакета

2.3. Пересчет компонент матрицы податливости пакета из вычисленных модулей

2.4. Вычисление средних деформаций через средние напряжения из 1.4

2.5. Расчет напряжений в каждой паре через средние деформации из 2.4 и модули из пункта 2.1.

3 этап. Оценка несущей способности (критического давления).

3.1. Для различных углов армирования построить предельные поверхности по трем прямым.

3.2. Для каждой пары слоев (для каждого угла) в виде эллипса построить предельные поверхности, что является необходимым этапом в анализе прочности конструкций. Это позволяет определить, какой коэффициент запаса необходим для обеспечения безопасной работы материала при воздействии различных нагрузок.

3.3. Для начала необходимо вычислить напряжения в материале, исходя из заданных условий. Напряжения можно определить, используя коэффициенты запаса из пункта 2.5. Затем необходимо проанализировать пересечение луча нагружения, идущего от внешних сил, с прямыми (1, 2, 3) или с эллипсом 4.

3.4. Необходимо определить минимальный коэффициент запаса из вычисленных значений коэффициентов запаса. Также стоит учесть минимальный коэффициент запаса для всего пакета, чтобы гарантировать безопасную работу конструкции в целом.

3.5. Расчет несущей способности умножением минимального коэффициента запаса на принятое давление из 1.4.

4 этап. Оптимизация структуры армирования.

4.1. Оценка по нитяной модели, насколько отношение суммы квадратов синусов к сумме квадратов косинусов отличается от 2.

4.2. Из условия равенства этого отношения двум - нахождение числа слоев, которые должны «сменить ориентацию», например, с 30 на 90. Эти цифры (углы) зависят от начальной структуры армирования.

4.3. Из условия равенства этого отношения двум - нахождение угла, на который должно быть заменено какое-то число «неудачных» пар слоев.

4.4. Проверка эффективности оптимизации путем повторения расчетов по разделам 2 и 3.

4.5. Смена упругих свойств из 1.1 (например, от стеклопластика к углепластику) и проверка эффективности процедур 4.2-4.3.

Примеры расчета представлены ниже на рис. 3.20-3.21.

#### Начальные данные:

Характеристики баллона:

Толщина стенки баллона  $h = 8.0$  мм

Радиус баллона  $R = 150.0$  мм

Внутреннее давление баллона  $p = 10.0$  МПа

Константы материала:

Модуль упругости вдоль волокон  $E_1 = 45.0$  ГПа

Модуль упругости поперек волокон  $E_2 = 9.0$  ГПа

Модуль сдвига  $G_{12} = 7.0$  ГПа

Коэффициент Пуассона  $\nu_{12} = 0.3$

Прочность трубы с намоткой 0 град.  $\sigma_0 = 1200.0$  МПа

Прочность трубы с намоткой 45 град.  $\sigma_{45} = 100.0$  МПа

Прочность трубы с намоткой 90 град.  $\sigma_{90} = 300.0$  МПа

#### Результаты:

Средние напряжения в цилиндрической части баллона:

Осевые  $\langle \sigma_z \rangle = 93.75$  МПа

Окружные  $\langle \sigma_\theta \rangle = 187.5$  МПа

Компоненты тензора модулей упругости:

$E_{11} = 45.8$  ГПа

$E_{12} = 2.7$  ГПа

$E_{22} = 9.2$  ГПа

$E_{66} = 7.0$  ГПа

Компоненты тензора модулей упругости пакета:

$\langle E_{zz} \rangle = 27.2$  ГПа

$\langle E_{z\theta} \rangle = 4.5$  ГПа

$\langle E_{\theta\theta} \rangle = 24.3$  ГПа

Компоненты матрицы податливости пакета:

$\langle S_{zz} \rangle = 4e-05$  1/ГПа

$\langle S_{z\theta} \rangle = -1e-05$  1/ГПа

$\langle S_{\theta\theta} \rangle = 4e-05$  1/ГПа

Средние деформации:

Осевые  $\langle \epsilon_z \rangle = 0.00224$

Окружные  $\langle \epsilon_\theta \rangle = 0.0073$

Критическое давление  $p^* = 3.8$  МПа

SIN/COS = 0.85263

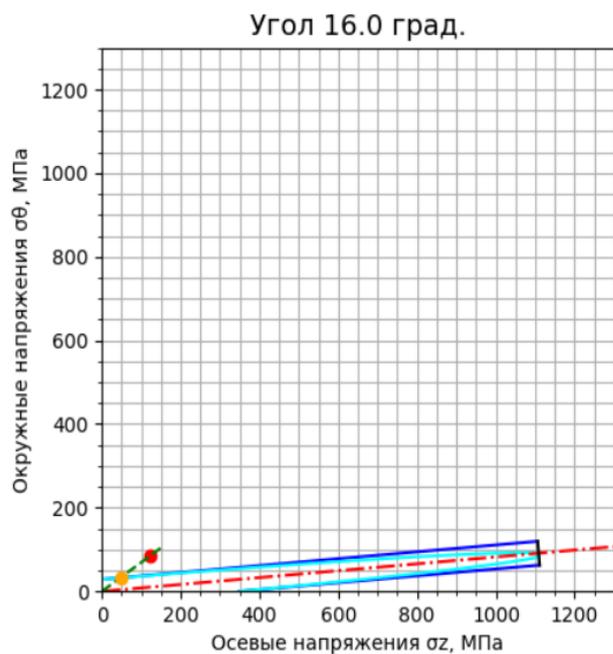
a)

b)

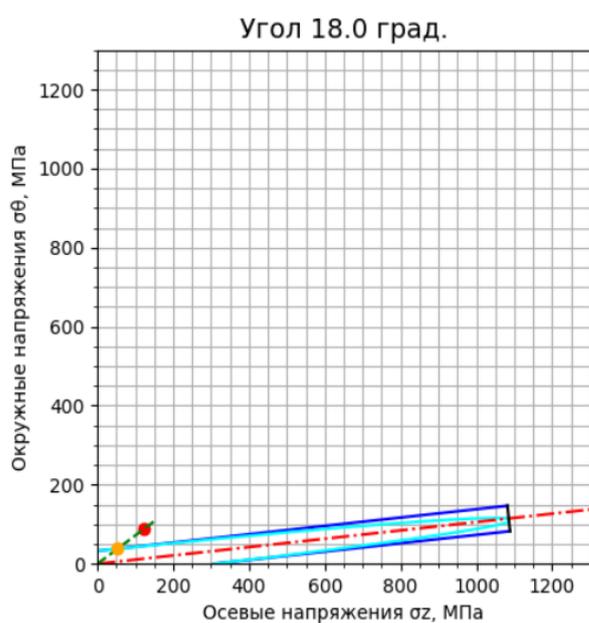
Углы, град.	Кол-во пар слоев	$E_{zz}$ , ГПа	$E_{z\theta}$ , ГПа	$E_{\theta\theta}$ , ГПа	$\sigma_z$ , ГПа	$\sigma_\theta$ , ГПа	Коэф. запаса
0.0	2.0	45824.8	2749.5	9165.0	123.0	73.0	4.11
16.0	2.0	41530.8	4258.2	10441.5	124.0	86.0	0.378
18.0	4.0	40467.9	4605.7	10809.5	124.0	89.0	0.428
52.0	2.0	18002.2	7807.8	26871.1	97.0	214.0	2.323
63.0	2.0	13204.4	6266.0	34752.5	75.0	268.0	3.537
90.0	4.0	9165.0	2749.5	45824.8	41.0	341.0	7.317

в)

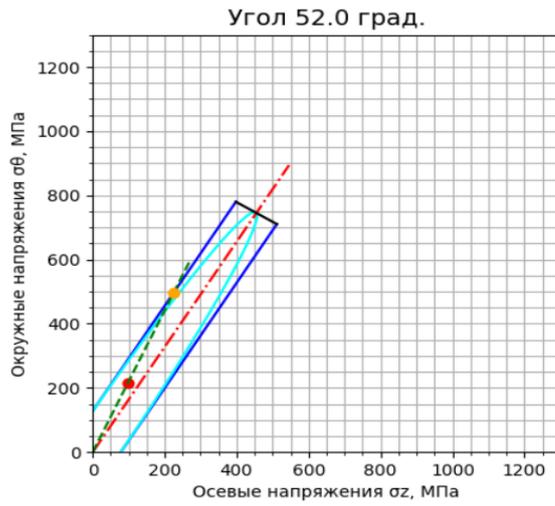
Рис. 3.20. Пример расчета несущей способности композитного баллона в программе



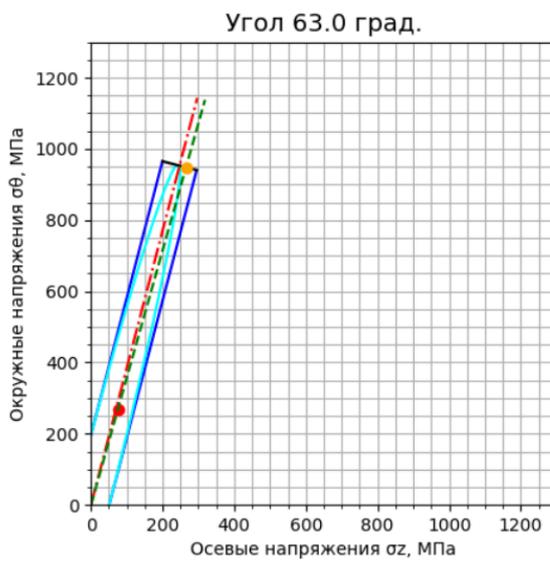
а)



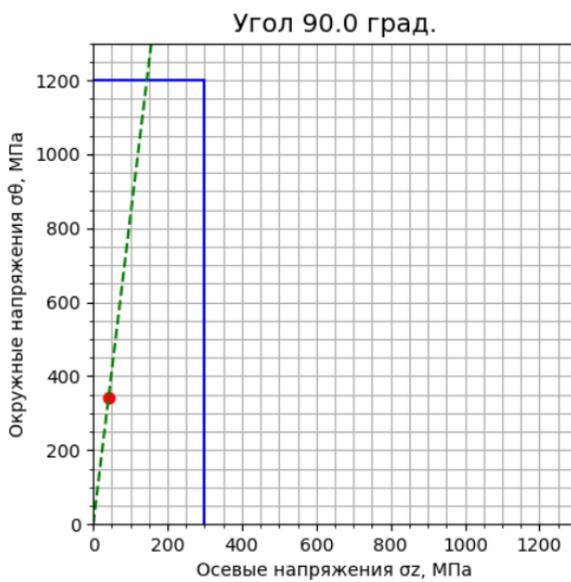
б)



в)



д)



е)

Рис. 3.21. Построение предельных поверхностей для разных углов в программе.

Проверка результатов

### 3.6. Верификация результатов расчета напряженно-деформированного состояния композитного сосуда давления

В качестве примера рассмотрим определение напряженно-деформированного состояния баллона давления, созданного методом непрерывной намотки двух двойных спиральных слоев стеклоленты, пропитанной связующим, на металлическую оправку толщиной 1 мм, имеет особую форму меридиана оболочки, которая определяется следующим уравнением:

$$\bar{y} = - \int_1^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^3 d\bar{r}}{\sqrt{\left[ \frac{\lambda \bar{r}^2 + \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2}}{\lambda + \sqrt{1 - \bar{r}_0^2}} \right]^2 - \bar{r}^6}}, \quad (3.44)$$

где  $\bar{y} = y/a$ ,  $\bar{r} = r/a$  - безразмерные координаты, отнесенные к величине радиуса экватора баллона.

Метод непрерывной намотки двойных спиральных слоев стеклоленты, пропитанной связующим, обеспечивает прочность и устойчивость баллона. Стеклолента является основным строительным материалом, который обеспечивает необходимую прочность и герметичность. Связующее вещество пропитывает стеклоленту и придает ей дополнительные жесткость и прочностные характеристики.

Металлическая оправка с толщиной 1 мм играет важную роль в структуре баллона, обеспечивая стабильность и защиту от внешних факторов. Она предотвращает деформацию и дает дополнительную жесткость всей конструкции.

В итоге, благодаря использованию метода непрерывной намотки двойных спиральных слоев стеклоленты на металлическую оправку толщиной 1 мм, баллон давления обладает высокой прочностью, устойчивостью и герметичностью. Он успешно выдерживает внутреннее давление и обеспечивает безопасность в процессе использования.

При  $\lambda = 0,2$  и относительном радиусе полюсного отверстия  $\bar{r}_0 = 0,147$  свойства материала несущего слоя, выполненного из стеклоленты, пропитанных эпоксидным связующим, приняты следующими:

$$E_1 = 5040 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, E_2 = 1000 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, G_{12} = 365 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \mu_{12} = 0,0397, \mu_{21} = 0,2$$

$$\bar{\sigma}_1 = 120 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \bar{\sigma}_2 = 2,75 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \bar{\tau}_{12} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Механические характеристики герметизирующего слоя следующие:

$$E_1 = 7100 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \mu = 0,3, \bar{\sigma}_1 = 120 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \sigma_T = 28 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \bar{\sigma}_0 = 45 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

На рис. 3.23 представлены результаты расчета, иллюстрирующие зависимости меридиональной и кольцевой деформаций от внутреннего давления для сечения  $\bar{r} = 0,7$ . Важно отметить, что эти кривые не имеют излома, который характерен для баллонов без металлического слоя. Точками на графике показаны экспериментальные результаты. Для измерения деформаций использовались тензодатчики сопротивления, которые позволяют фиксировать относительные удлинения до 5%. Перед намоткой стеклоленты тензодатчики были наклеены на металлическую оправку.

Из графиков (рис. 3.22) можно наблюдать, что разрушение связующего материала (нарушение сплошности композиционного материала) происходит при нагрузках, находящихся значительно далеко от разрушающей нагрузки. Это подтверждается началом нелинейного участка в зависимости деформаций от внутреннего давления. Однако исследования показывают, что деформации герметизирующей металлической оболочки остаются в пределах пропорциональности. Указанное явление, подобно оболочкам без герметизирующего слоя, не играет существенной роли для конструкций, предназначенных для одноразового использования. Однако для сосудов давления, работающих в условиях многократной нагрузки, растрескивание связующего материала приводит к ухудшению характеристик усталостной прочности и вызывает ряд других нежелательных явлений.

В связи с этим может быть поставлена задача об определении рационального соотношения толщин герметизирующего и несущего слоев  $\alpha = \frac{h_0}{h_a}$  из условия обеспечения заданного или минимально возможного коэффициента безопасности  $f$ . Одним из возможных вариантов выбора является определение коэффициента безопасности как отношения разрушающего давления к давлению, при котором

происходит исчерпание несущей способности связующего, т. е. считается, что при эксплуатационной нагрузке композиционный материал должен сохранять монолитность. При этом разрушающее давление находят непосредственно из равенства:

$$\frac{pa}{2} = \sigma_T h_0 + \bar{\sigma}_1 h_a \cos^2 \varphi_a, \quad (3.45)$$

а эксплуатационную нагрузку, определяют на основании решения системы для оптимального баллона:

$$\begin{aligned} \Delta N_\alpha &= B'_{11} \Delta \varepsilon_\alpha + B'_{12} \Delta \varepsilon_\beta; \\ \Delta N_\beta &= B'_{21} \Delta \varepsilon_\alpha + B'_{22} \Delta \varepsilon_\beta; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$B'_{11} = \frac{Eh_0}{1-\mu^2} + h_1 \left( \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + 2\bar{E}_1 \mu_{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi - G_{12} \sin^2 2\varphi \right);$$

$$B'_{12} = B'_{21} = \frac{E\mu h_0}{1-\mu^2} + h_1 \left[ (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \bar{E}_1 \mu_{12} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + G_{12} \sin^2 2\varphi \right];$$

где

$$B'_{22} = \frac{Eh_0}{1-\mu^2} + h_1 \left( \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + 2\bar{E}_1 \mu_{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi - G_{12} \sin^2 2\varphi \right);$$

$$\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}.$$

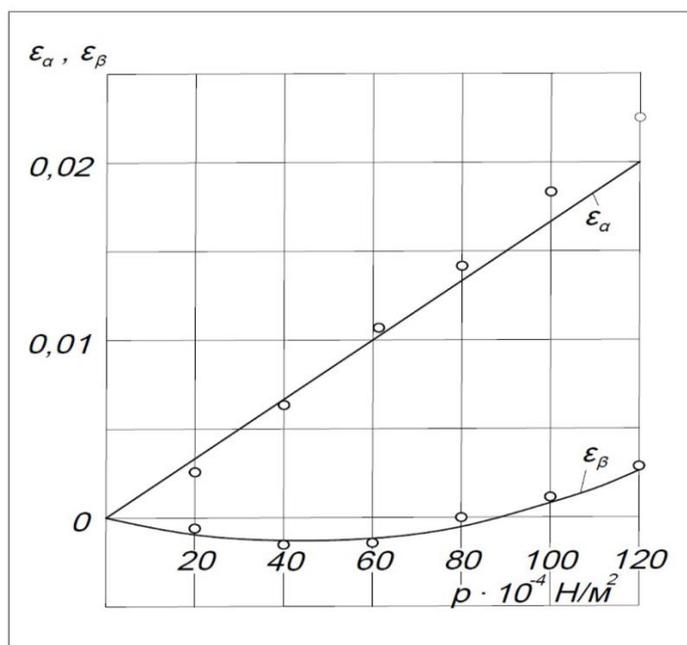


Рис. 3.22. Зависимость кольцевой  $\varepsilon_\beta$  и меридиональной  $\varepsilon_\alpha$  деформаций комбинированного баллона от давления в точке  $\bar{r} = 0,7$ : - - - теоретическое решение;  $\circ$  – экспериментальные точки [87]

При условии разрушения связующего давлением, используется соответствующий критерий прочности, например, критерий Хилла, который учитывает возможность разрушения как от нормальных, так и от сдвиговых нагрузок. Этот метод позволяет получить удовлетворительные результаты и простую аналитическую запись коэффициента безопасности. Применение условий прочности на основе максимальных напряжений при сдвиге или при растяжении поперек армирующих элементов также может быть осуществлено.

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2, \quad \tau_{12} = \bar{\tau}_{12}. \quad (3.47)$$

Не приводя весьма громоздких и достаточно простых преобразований, связанных с определением деформаций  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  из системы (3.46) для оптимального баллона и вычислением по ним с помощью следующих формул напряжений в ленте композиционного материала.

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \bar{E}_1^i (\varepsilon_1^i + \mu_{12}^i \varepsilon_2^i); & \varepsilon_1^i &= \varepsilon_\alpha \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_\beta \sin^2 \varphi_i; \\ \sigma_2^i &= \bar{E}_2^i (\varepsilon_2^i + \mu_{21}^i \varepsilon_1^i); & \varepsilon_2^i &= \varepsilon_\alpha \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_\beta \cos^2 \varphi_i; \\ \tau_{12}^i &= G_{12}^i \varepsilon_{12}^i; & \varepsilon_{12}^i &= (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \sin 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\bar{E}_{1,2}^i = \frac{\bar{E}_{1,2}^i}{1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i},$$

Выпишем значения коэффициентов безопасности для различных сечений контура оптимального баллона:

$$\begin{aligned} f_\sigma(r) &= \frac{\bar{p}}{p_\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} \frac{E_2 \sqrt{1 - \bar{r}_0^2}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\Delta_\sigma}{\Delta}; \\ f_\tau(r) &= \frac{\bar{p}}{p_\tau} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\tau}_{12}} G_{12} \sqrt{1 - \bar{r}_0^2} \frac{\Delta_\tau}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где  $f_\sigma, p_\sigma$  – коэффициент безопасности и эксплуатационное давление, соответствующие первому условию прочности (3.47);  $f_\tau, p_\tau$  – коэффициент безопасности и эксплуатационное давление, соответствующие второму условию прочности (3.49);  $\bar{p}$  – разрушающее давление

$$\Delta_{\sigma} = \alpha^2 \frac{\sigma_{\Gamma}}{\bar{\sigma}_1} \frac{E(1+\mu_{21})}{1+\mu} \bar{r}^4 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2) + \alpha \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2} \left[ \begin{array}{l} E_1 \frac{\sigma_{\Gamma}}{\bar{\sigma}_1} \sqrt{1-\bar{r}_0^2} \times (\bar{r}_0^2 - 2\bar{r}_0^2)^2 + \\ (\mu_{21} - \mu) (\bar{r}^4 - 2\bar{r}^2 \bar{r}_0^2 + 2\bar{r}_0^4) + \\ + E \frac{2(1-\mu_{21}\mu) \bar{r}_0^2 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2)}{1-\mu^2} \end{array} \right] +$$

$$+ 4(1-\mu_{21}) \sqrt{1-\bar{r}^2 \bar{r}_0^2} (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2) G_{12};$$

$$\Delta_{\tau} = 2\bar{r}_0 (\bar{r}^2 - 2\bar{r}_0^2) \left[ \alpha \left( \frac{E}{1-\mu} + \frac{E_2 - E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2} \sqrt{1-\bar{r}_0^2} \right) + \frac{E_2(1+\mu_{21})}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \right];$$

$$\Delta = \alpha^2 \frac{E^2}{1-\mu^2} \bar{r}^4 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2) + \alpha \frac{E \sqrt{1-\bar{r}_0^2} \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2}}{(1-\mu^2)(1-\mu_{12}\mu_{21})} \left\{ \begin{array}{l} \bar{r}^4 (E_1 + E_2 - 2\mu E_1 \mu_{12}) + \\ 4 \left[ \begin{array}{l} 4G_{12} (1-\mu_{12}\mu_{21}) \\ -(E_1 + E_2 - 2\mu E_1 \mu_{12}) \end{array} \right] \\ \bar{r}_0^2 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2) (1+\mu) \end{array} \right\} +$$

$$+ \frac{1-\bar{r}_0^2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ E_1 E_2 (\bar{r}^2 - 2\bar{r}_0^2) + 4G_{12} (E_1 + E_2 + 2E_1 \mu_{12}) \bar{r}_0^2 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2) \right];$$

$$\alpha = \frac{h_0}{h_1}.$$

Так как баллон является равнопрочным только при нагрузках, близких к разрушающим, для определения коэффициента безопасности необходимо установить зону появления первых трещин в связующем композиционного материала. При этом в качестве коэффициента безопасности баллона принимается максимальное значение  $f$ , получаемое из равенств (3.49).

Для рассмотренного баллона с несущим слоем стеклопластика и различными соотношениями толщин герметизирующего и армированного слоев, а также различными радиусами полюсного отверстия коэффициент безопасности показан на рис. 3.23.

Из представленного материала можно сделать вывод, что существует оптимальная величина соотношения толщин между герметизирующим и несущим слоями для заданного радиуса полюсного отверстия. Это соотношение обеспечивает минимальное значение коэффициента безопасности.

На рис. 3.24 мы можем наблюдать аналогичные зависимости для баллона с несущим слоем из углепластика с определенными характеристиками:

$$E_1 = 17000 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, E_2 = 800 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \mu_{12} = 0,0092, \mu_{21} = 0,21, G_{12} = 350 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \\ \bar{\sigma}_1 = 82,6 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \bar{\sigma}_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \bar{\tau}_{12} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Видно, что и в этом случае существует оптимальная величина соотношения толщин, при которой коэффициент безопасности достигает минимального значения.

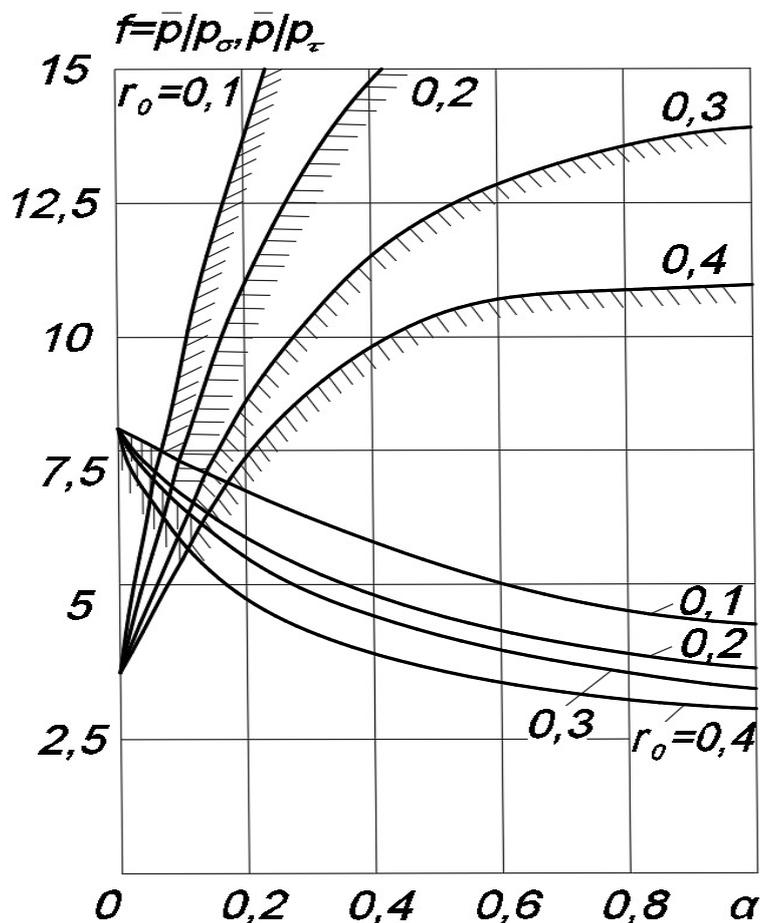


Рис. 3.23. Диапазон максимальных значений коэффициента безопасности комбинированного баллона с армированным слоем из стеклопластика [87]

Таким образом, для создания наиболее надежного изделия с заданным радиусом полюсного отверстия, необходимо учитывать соотношение толщин между герметизирующим и несущим слоями, чтобы обеспечить минимальное значение коэффициента безопасности. Это принципиально важно для обеспечения безопасности и функциональности таких изделий.

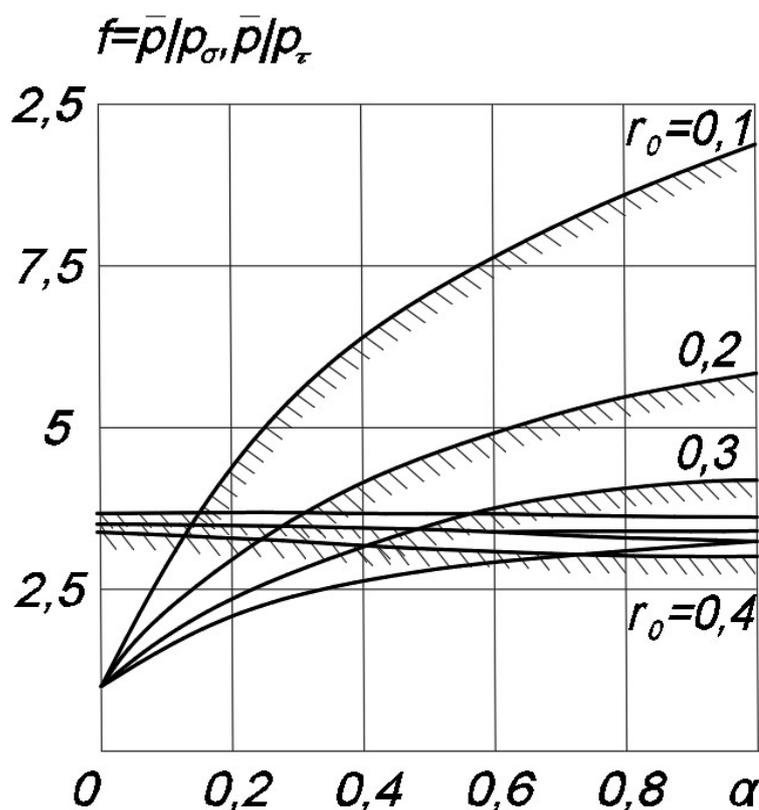


Рис. 3.24. Диапазон максимальных значений коэффициента безопасности комбинированного баллона с армированным слоем из углепластика [87]

При этом минимальная величина коэффициента безопасности для высокомодульного материала, как и следовало ожидать, оказывается существенно меньше, чем для стеклопластика.

### Выводы по главе 3.

1. Был показан более простой, по сравнению с традиционными для монослоев, метод на основе послойного метода для симметричных пар слоёв.
2. Показан алгоритм решения задачи в соответствии с нитяной моделью для упрощения моделирования оптимальной равнонапряженной структуры армирования.
3. Построены предельные поверхности для пар слоев с учетом разных типов разрушения, а также было показано, что возможно повышение расчетного критического давления на 41% при равнонагруженности всех пар слоёв в баллонах сжатого газа.

4. Доказано, что применение послойного метода расчета композитных конструкций сопряжено с двумя основными сложностями – экспериментальное определение технических упругих постоянных монослоя и громоздкость тензорных преобразований при повороте системы координат.

5. С помощью перехода к инварианту «след» - «trace», который определяется для углепластиков отношением  $\frac{E_1}{0,88}$ , а для стеклопластиков  $\frac{E_1}{0,71}$ , найден в эксперименте только модуль упругости вдоль волокон  $E_1$ , с приемлемой точностью восстановлены остальные технические и матричные упругие постоянные монослоя.

6. Показано, что поскольку продольный модуль упругости в однонаправленных композитах на порядок выше, чем поперечный, в стандартных тензорных преобразованиях можно пренебречь всеми матричными постоянными кроме  $E_{11}^0$ , что значительно упрощает вычисления.

7. Доказано, что упрощенные тензорные преобразования с достаточной точностью справедливы для углепластиков. Для стеклопластиков, у которых  $\frac{E_{11}^0}{E_{22}^0} \approx 5$ , упрощенные зависимости сильно отличаются от точных выражений, что делает упрощенный подход менее целесообразным.

8. Разработана программа по автоматизированному расчету несущей способности композитного баллона для быстрой (инженерной) оптимизации структуры армирования.

9. Верифицированы результаты расчета напряженно-деформированного состояния композитного сосуда давления.

## **ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ**

Данная глава посвящена анализу потери устойчивости композитных пластин и сосудов давления. В частности, наибольшее внимание будет уделено оценке устойчивости деформирования тонкостенных пластин и оболочек при плоском напряженном состоянии для идентификации параметров критериев прочности.

Данная глава посвящена получению критериев для оценки опасности расслоений при потере устойчивости при сжатии композитных труб и сосудов давления цилиндрической формы, а также сравнение данных методов. Для определения характерных размеров отслаиваемого слоя был получен энергетический критерий выщелкивания при минимальном критическом напряжении. Данный критерий, более того, может быть применен не только для выявления критических размеров технологических дефектов (например, непроклей), но и для расчета наиболее опасной глубины их залегания в композите. Результаты неразрушающего контроля также могут быть подтверждены расчетом энергетического критерия. Вышеупомянутые факторы повышают безопасность композитных труб и цилиндрических сосудов давления при их эксплуатации в ситуациях потери устойчивости сжимаемых слоев.

В энергетический критерий входит удельная работа расслоения, которая позволяет оценивать критические напряжения от внешнего давления на трубу и характеризовать масштабный эффект прочности. Реакция на внешние воздействия и возникающие в материале напряжения зависят не только от абсолютных размеров детали, но также от толщины отслаиваемого слоя.

### **4.1. Оценки устойчивости деформирования тонкостенных пластин и оболочек при плоском напряженном состоянии для идентификации параметров критериев прочности**

Рассмотрим простую модель деформирования, саморазвивающегося при одноосном растяжении, которая описывает процесс растяжения образца при одноосном нагружении. Гипотеза несжимаемости означает, что объем образца не

изменяется при деформации. Для пластической деформации, которая происходит из-за сдвигов, гипотеза неизменности объема ( $\nu = 0,5$ ) выполняется достаточно точно.

При продольном удлинении образца площадь поперечного сечения уменьшается из-за эффекта Пуассона, а локальное «истинное» напряжение, отнесенное к текущей площади сечения, возрастает. В определенный момент процесс становится неустойчивым, и возникает шейка - зона интенсивной пластической деформации. Такого рода модель предстает наглядным и достаточно простым отображением появления шейки при одноосном растяжении в цилиндрическом либо плоском образце [131].

Опишем для условий постоянной нагрузки  $P$  модель саморазвивающегося деформирования стержня. Начальная его длина будет обозначена  $L_0$ , а длина удлиненного изделия –  $L$ . При этом их площади сечения будут обозначены  $F_0$  и  $F$  соответственно. При применении условия сохранения объема с учетом технической деформации получим:

$$FL = F_0L_0; \quad \varepsilon = (L - L_0) / L_0 \Rightarrow L = L_0(1 + \varepsilon); \quad F = F_0 / (1 + \varepsilon). \quad (4.1)$$

Формула (4.1) в логарифмической шкале меры деформации будет иметь следующий вид:

$$e = \ln \left( \frac{L}{L_0} \right) \Rightarrow F = F_0 \left( \frac{L_0}{L} \right) = \frac{F_0}{\exp e}. \quad (4.2)$$

Выражая условное напряжение через начальное сечение:  $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ ,  $\sigma_e = \frac{P}{F}$ , из уравнения (4.1) следующее:

$$\sigma_e = \sigma_0 F_0 / F = \sigma_0 L / L_0 = \sigma_0 (1 + \varepsilon), \quad (4.3)$$

т.е. видно, что напряжение (истинное) увеличивается при продольной деформации.

Уравнение упруго-пластической деформации (в общем виде) в истинных напряжениях примет вид:

$$\sigma_e = \varphi(\varepsilon), \quad (4.4)$$

где  $\varphi(\varepsilon)$  – монотонно возрастающая функция (нелинейная). На экспериментальном графике растяжения  $\sigma_0 - \varepsilon$  (рис. 4.1, а) обычно откладывается условное напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_e L_0}{L} = \frac{\sigma_e}{(1+\varepsilon)} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}, \quad (4.5)$$

Условное напряжение сначала растет, а после достижения критической деформации  $\varepsilon^*$  потери устойчивости деформирования убывает, что видно по второй ветви графика после экстремума (рис. 4.1, а).

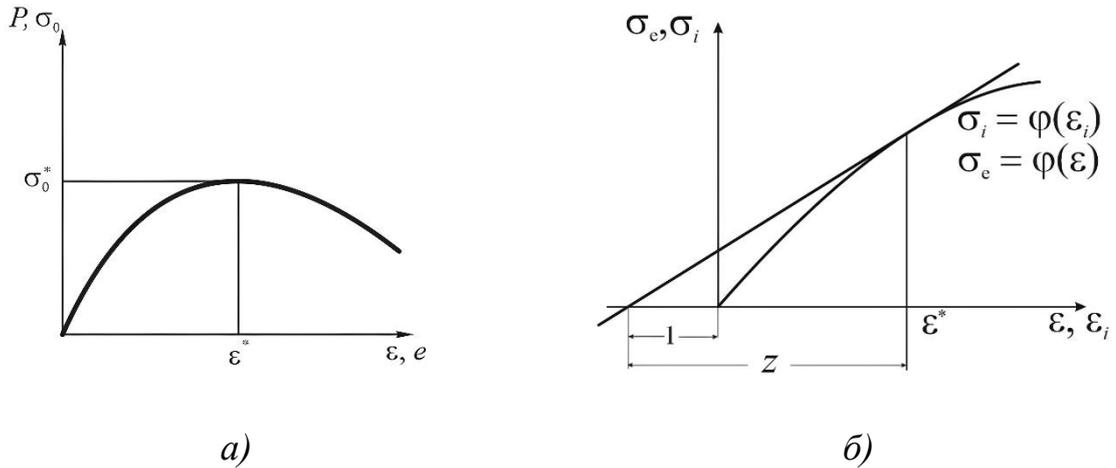


Рис. 4.1. а) иллюстрация неустойчивости деформирования; б) метод определения предельной деформации

Здесь неустойчивость системы с приравнением к 0 производной по деформации условного напряжения (4.5) проявляется следующим образом:

$$\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(\varepsilon)(1+\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(\varepsilon) = \frac{\varphi(\varepsilon)}{1+\varepsilon}. \quad (4.6)$$

На отрицательной части оси абсцисс в точке касания, обозначаемой  $\varepsilon$ , необходимо определить критическую деформацию  $\varepsilon^*$ . С этой целью следует необходимо отложить отрезок единичной длины и провести касательную к графику  $\sigma_e = \varphi(\varepsilon)$  (4.6) рис. 4.1 (б).

В качестве примера приведем степенную зависимость (4.7) для иллюстрации (4.4).

$$\sigma_e = \varphi(\varepsilon) = k\varepsilon^m; \quad (m < 1). \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в условие (4.6), находим:

$$km\varepsilon^{m-1} = \frac{k\varepsilon^m}{1+\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon^* = \frac{m}{1-m} \approx m + m^2 + o(m^2) \quad (\text{при } m \ll 1). \quad (4.8)$$

Взяв логарифмическую деформацию (4.2) и, аппроксимируя истинное напряжение степенной функцией, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= Ae^n = A \ln^n(\lambda); \quad \lambda = \frac{L}{L_0} \Rightarrow \sigma_0 = \sigma_e \frac{F}{F_0} = \frac{A}{\lambda} \ln^n \lambda; \\ \frac{d\sigma_0}{d\lambda} &= 0 \Rightarrow -\frac{\ln^n \lambda}{\lambda^2} + n \frac{\ln^{n-1} \lambda}{\lambda} \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \\ e^* &= \ln \lambda = n \quad (\approx \varepsilon^* \text{ при } n = m \ll 1).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Из данного уравнения очевиден тот факт, что исключительно показатель нелинейности деформирования будет определять критическую деформацию. В соответствии с формулой (4.8) при  $m=1$  неустойчивость не будет проявляться. Такой вывод был получен вследствие допущения однородной деформации и в целом использования упрощенной модели. Однако при этом и при упругой деформации может наблюдаться деформирование неравномерного типа, следствие наличия геометрических и структурных неоднородностей. Также заметим, что коэффициент Пуассона  $\nu$  можно принимать отличным от значения в 0,5, причиной чего является неизменность объема. При деформировании с уменьшением сечения наблюдается рост истинных напряжений. Однако это происходит не всегда. Так, в случае аустеников с отрицательными значениями  $\nu$ , пробок с  $\nu$  равным 0,5 или других необычных материалов упомянутый рост не будет наблюдаться.

Если стоит задача более детального описания неустойчивого деформирования, то на передний план выходят и вторичные процессы. К ним можно отнести, например, выполнение условия сохранения массы материала, саморазогрев, происходящий при пластической деформации, и так далее. Тогда в том числе в уравнении типа (4.1) будет возможность продемонстрировать в модели, что в случае ненулевого модуля упругости (коэффициент Пуассона не равен 0,5) наблюдается при постоянной массе материала изменение его плотности при деформировании.

*Гипотезы модели деформирования несжимаемого материала при пропорциональном двухосном растяжении*

В случае изотропных материалов описание напряженно-деформированного состояния имеет свою специфику. Оно осуществляется с применением тензора

напряжений с нормальными взаимно перпендикулярными компонентами напряжений  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$  на главной диагонали и трех главных компонент  $\varepsilon_1$ ;  $\varepsilon_2$ ;  $\varepsilon_3$  тензора деформаций.

В случае если стоит цель определения начала деформирования неустойчивого типа в рамках проведения анализа необходимо принять следующие допущения:

1. При нулевом значении  $\sigma_3$  напряженно-деформированное состояние наблюдается в тонкостенных оболочках и тонких пластинах.

2. Условие неизменности объема  $V$  соответствует коэффициенту  $\nu$ , равному 0,5. Действительно, из закона Гука:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \nu\sigma_2; \quad E\varepsilon_2 = -\nu\sigma_1 + \sigma_2; \quad E\varepsilon_3 = -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 0 \Leftrightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \nu = 0.5. \\ \Delta V = 0 &\Leftrightarrow (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 0(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

3. Для случая со сложным напряженным состоянием можно проследить связь по типу (4.4), (4.7), (4.9) между компонентами тензоров напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\varepsilon_i$ :

$$\sigma_i = \varphi(\varepsilon_i). \quad (4.11)$$

4. Условие несжимаемости может быть учтено для выражения интенсивности деформации в виде:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (4.12)$$

При одноосном растяжении из (4.12):

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon_1 \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \varepsilon_1.$$

При плоской деформации

$$\varepsilon_3 = 0; \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \varepsilon_1.$$

5. При простом нагружении двухосным растяжением (сжатием) напряжения [73] изменяются пропорционально, и интенсивность напряжений выражается в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_2 = \alpha\sigma_1 \Rightarrow \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_1 \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

При одноосном растяжении ( $\alpha=0$ ), разумеется:  $\sigma_i = \sigma_1$ .

6. Из закона Гука (4.10) при пропорциональном нагружении:

$$v = 0.5 \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{2-\alpha} = \frac{\varepsilon_2}{2\alpha-1} = \frac{-\varepsilon_3}{1+\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}.\quad (4.14)$$

Случай простого нагружения означает равенство отношений главных деформаций к соответствующим компонентам девиатора  $\bar{\sigma}$  напряжений. Показано, что на значение предельного напряжения, согласно литературным источникам (Мизес и Генки), не будет влиять шаровая часть  $\sigma$  тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_1}{\bar{\sigma}_1} &= \frac{\varepsilon_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\varepsilon_3}{\bar{\sigma}_3} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}; \\ \bar{\sigma}_1 &= \sigma_1 - \sigma = \frac{\sigma_1}{3}(2-\alpha); \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma = \frac{\sigma_1}{3}(2\alpha-1); \\ \bar{\sigma}_3 &= \sigma_3 - \sigma = -\sigma; \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \Rightarrow \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} = 2 \frac{\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}}{2-\alpha} \varepsilon_1.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Теперь можно выразить главные деформации через интенсивность:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1-0.5\alpha}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \varepsilon_i; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\alpha-0.5}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \varepsilon_i; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\alpha+1}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \varepsilon_i.\end{aligned}\quad (4.16)$$

*Возникновение неустойчивости деформирования при одноосном  
растяжении*

Что является условием возникновения неустойчивости при двухосном растяжении? Из рис. 4.2 видно, что если по осям были отложены интенсивности деформаций и напряжений, то ситуация аналогична одноосному случаю, т. е. равенство производной отношению интенсивности напряжений к определенной выше на рис. 4.1 (б) компоненте  $z$ . При этом устойчивое деформирование будет установлено до тех пор, пока работа приращений сил на виртуальных приращениях

перемещений будет иметь значения выше 0 (согласно постулату Друкера [78]). Отсюда, как будет далее продемонстрировано, будет следовать (4.17):

$$\sum_j \Delta P_j \Delta u_j > 0 \Rightarrow \left. \frac{\delta \varphi(\varepsilon_i)}{\delta \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon = \varepsilon^*} = \frac{\varphi(\varepsilon^*)}{z}. \quad (4.17)$$

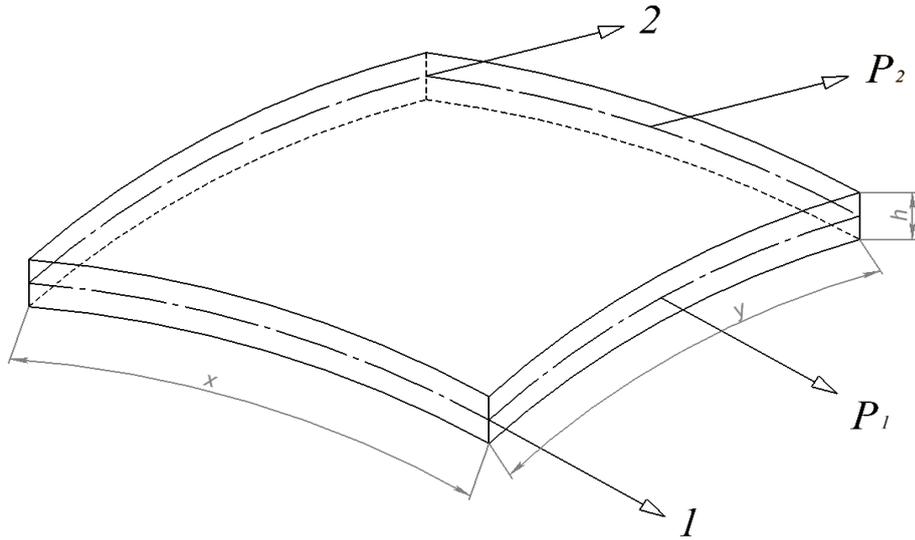


Рис.4.2. Схема элемента с размерами и приложенными силами

Необходимо отметить, что описание эффекта неустойчивости деформирования с помощью критерия неустойчивости является одним из способов описания подобных предельных состояний. Существует также разнообразие других критериев, таких как критерии прочности, энергетические критерии роста трещин и критерии пластичности.

*Критерии возникновения неустойчивого деформирования при разных соотношениях между главными напряжениями*

На рисунке (рис.4.2) показан элемент объекта с размерами \$x\$ и \$y\$, и толщиной \$h\$. Изображены оси 1 и 2, и вдоль них заданы силы \$P\_1\$ и \$P\_2\$. Эти силы выражаются через \$\sigma\_1\$, \$\sigma\_2\$: \$P\_1 = yh\sigma\_1\$; \$P\_2 = xh\sigma\_2\$. Их рост обеспечивается за счет пластического упрочнения (4.11), и в то же время наблюдается снижение за счет сокращения размера тех площадок, на которые оказывается действие. В случае устойчивой деформации возможно проводить увеличение значения силы \$dP\_i > 0\$. А в случае неустойчивой деформации дифференциал \$dP\_i = 0\$.

- 1) При \$\sigma\_1 > \sigma\_2\$ условие неустойчивости имеет вид:

$$\begin{aligned}
dP_1 = 0 &\Rightarrow d\sigma_1 \times yh + dy \times h\sigma_1 + dh \times y\sigma_1 = 0 \rightarrow (: \sigma_1 y h) \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + \frac{dy}{y} + \frac{dh}{h} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 &= 0 \Leftrightarrow (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0) \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1 &\Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Нахождение критической деформации требует знания связи интенсивности напряжений и деформаций, выражаемое нелинейной диаграммой деформирования (4.11). Рассмотрим данную зависимость в степенном виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_i = A\varepsilon_i^n &\Rightarrow \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = An\varepsilon_i^{n-1} \\
1)dP_1 = 0 &\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1; \\
\sigma_1 = \frac{\sigma_i}{f} &\Rightarrow d\sigma_1 = \frac{d\sigma_i}{f}; \quad f = \sqrt{1-\alpha+\alpha^2}; \\
d\varepsilon_1 = \frac{(2-\alpha)d\varepsilon_i}{2f} &\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_1 \Leftrightarrow \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \frac{2}{2-\alpha} = \frac{\sigma_i}{f} \Rightarrow \\
\frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{2-\alpha}{2f} &= \frac{1}{z} \quad (=1 \text{ при } \alpha = 0). \\
An\varepsilon_i^{n-1} \frac{2}{2-\alpha} &= A\varepsilon_i^n \frac{1}{f} \Rightarrow \\
z_1 = \frac{2n}{2-\alpha} \sqrt{1-\alpha+\alpha^2} &\Rightarrow \varepsilon_1^* = n \text{ при } \alpha = 0!
\end{aligned} \tag{4.19}$$

2) Условие неустойчивости проявляется при  $\sigma_1 < \sigma_2$  и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
dP_2 = 0 &\Rightarrow d\sigma_2 \times xh + dx \times h\sigma_2 + dh \times x\sigma_2 = 0 \Leftrightarrow (: \sigma_2 x h) \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_2}{\sigma_2} + \frac{dx}{x} + \frac{dh}{h} &= 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} = d\varepsilon_2. \\
d\varepsilon_2 = \frac{2\alpha-1}{2f} d\varepsilon_i; \quad d\sigma_2 = \frac{\alpha d\sigma_i}{f} &\Rightarrow \frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{2\alpha-1}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} = \frac{1}{z_2} \quad (=1 \text{ при } \alpha = \infty); \\
An\varepsilon_i^{n-1} \frac{2}{2\alpha-1} &= A\varepsilon_i^n \frac{1}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \Rightarrow \varepsilon_i^* = \frac{2n}{2\alpha-1} f \Rightarrow \varepsilon_2^* = n \text{ при } \alpha = \infty.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

В некоторых научных исследованиях [78, 120] показано, что существует необходимость оценки деформаций критического типа для методов получения металлических деталей с тонкими стенками глубокой вытяжкой и прокаткой.

В общем случае неустойчивое состояние из постулата Друкера [78] устанавливается при обращении суммы работ  $dP_1$  и  $dP_2$  на  $dx$  и  $dy$  в ноль.

$$\begin{aligned}
 dP_1 dx + dP_2 dy &= 0; \quad P_1 = \sigma_1 y h; \quad P_2 = \sigma_2 x h; \quad dx = x d\varepsilon_1; \quad dy = y d\varepsilon_2; \quad dh = h d\varepsilon_3. \\
 dP_1 &= d\sigma_1 y h + \sigma_1 h dy + \sigma_1 y dh; \\
 dP_2 &= d\sigma_2 x h + \sigma_2 h dx + \sigma_2 x dh \Rightarrow \\
 [dx(d\sigma_1 y h + \sigma_1 h dy + \sigma_1 y dh) &= -dy(d\sigma_2 x h + \sigma_2 h dx + \sigma_2 x dh)]: xyh. \\
 d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3 &= -d\varepsilon_2; \quad d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1 \Rightarrow \\
 d\sigma_1 d\varepsilon_1 + d\sigma_2 d\varepsilon_2 &= -\sigma_1 d\varepsilon_1 (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) - \sigma_2 d\varepsilon_2 (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) = \sigma_1 (d\varepsilon_1)^2 + \sigma_2 (d\varepsilon_2)^2. \\
 d\varepsilon_1 &= (2-\alpha)d\varepsilon_i / 2f; \quad d\varepsilon_2 = (2\alpha-1)d\varepsilon_i / 2f \Rightarrow \\
 d\sigma_i \left[ \frac{2-\alpha}{2f^2} + \alpha \frac{2\alpha-1}{2f^2} \right]_{-1} &= \sigma_i d\varepsilon_i \left[ \frac{(2-\alpha)^2}{4f^3} + \alpha \frac{(2\alpha-1)^2}{4f^3} \right] \Rightarrow \\
 \frac{1}{\sigma_i} \left( \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \right)^* &= \frac{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3}{4f^3} = \frac{1}{z_3} \Rightarrow \\
 z_3 &= \frac{4(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}{(1+\alpha)(4-7\alpha+4\alpha^2)} \leftrightarrow z_3 = 1 \text{ при } \alpha = 0; \infty.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Используем определяющее нелинейное уравнение для интенсивностей в простейшем степенном виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= \varphi(e_i) = Ae_i^n; \quad (n < 1); \\
 \frac{1}{\sigma_i} \left( \frac{d\sigma_i}{de_i} \right)^* &= \frac{Ane_i^{n-1}}{Ae_i^n} = \frac{n}{e_i} = \frac{1}{z} \Rightarrow \\
 e_i^* &= nz \quad (e_i = n \text{ при } \alpha = 0).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Мы получили совпадение для логарифмических деформаций с одноосным растяжением. Теперь можно исследовать зависимость  $\varepsilon^*$  от  $\alpha$ .

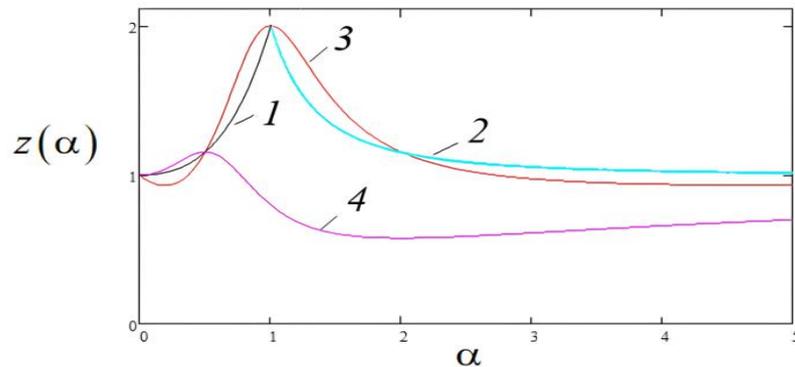


Рис. 4.3. Зависимости  $z$  (критической деформации) от отношения напряжений  $\alpha$ :  $z_1$  – (4.19),  $z_2$  – (4.20),  $z_3$  – (4.21),  $z_4$  – (4.28)

Есть ряд недостатков при использовании степенной зависимости (4.7), (4.22), например, невозможность оценить модуль Юнга при бесконечно малой деформации:

$$E = \left. \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = kn\varepsilon_i^{n-1} \Big|_{\varepsilon_i=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } n > 1 \\ \infty & \text{при } n < 1 \end{cases} = k \text{ при } n = 1.$$

В случае, когда  $n=1$  зависимость линейна, о потере устойчивости, о длине участка  $z$  и о поиске предельной деформации нет смысла рассуждать. При одноосном растяжении при технических деформациях  $\varepsilon_i^* = \frac{m}{1-m}$ , и при  $m=1$  нельзя оценить критическую деформацию.

На диаграмме деформирования можно выделить два участка – первый линейный и второй – нелинейный (4.22):

$$\sigma_i = \begin{cases} E\varepsilon_i & \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_Y \\ k(a + \varepsilon_i)^n & \text{при } \varepsilon_i > \varepsilon_Y \end{cases};$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=\varepsilon_Y} = km(a + \varepsilon_Y)^{m-1} = E \Rightarrow \quad (4.23)$$

$$k = Em^{-1}(a + \varepsilon_Y)^{1-m} \quad (\approx Em^{-1}a^{1-m} \text{ при } \varepsilon_Y \approx 0).$$

Учет условия (4.23) гладкости функции в точке перехода от линейного к нелинейному участку и разрыв производной не вносят вклад в анализ неустойчивости деформирования. Условие (4.23) можно использовать в случае малых значений предела упругости по сравнению с нелинейной деформацией, которое было использовано в работах [26, 78]. По соотношению (4.23) можно получить величины начальных напряжений при нулевых деформациях. Учет данных величин помогает корректно связать нелинейную диаграмму с модулем Юнга, в отличие от чисто степенного соотношения (4.22). Зависимости (4.19) – (4.21) критической деформации от  $\alpha$  приведены на рис. 4.3.

Проведем анализ экстремумов зависимости (4.21)  $z$  от  $\alpha$ :

$$z = \frac{4(\alpha^2 - \alpha + 1)^{3/2}}{(1 + \alpha)(4\alpha^2 - 7\alpha + 4)}. \quad \alpha = 0, \infty \Rightarrow z^* = 1; \quad \alpha = 1 \Rightarrow z^* = 2.$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0 \Rightarrow (4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 4)(2\alpha - 1) = (8\alpha^2 - 4\alpha - 2)(\alpha^2 - \alpha + 1) \Rightarrow$$

$$2\alpha^3 - 13\alpha^2 + 13\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1) \left( \alpha^2 - \frac{11}{2}\alpha + 1 \right) = 0$$

$$\alpha_1 = 1 \Leftrightarrow z^* = 2 = \max$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - 1} = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{4} \approx 5.31 \Leftrightarrow z^* \approx 0.93 = \min$$

$$\approx 0.19 \Leftrightarrow z^* \approx 0.93 = \min$$

*Определение условий неустойчивой деформации в тонкостенных цилиндрических и сферических оболочках*

Пластичные материалы при простом нагружении поведение хорошо аппроксимируется степенной зависимостью (4.9) с логарифмической мерой деформации.

По формуле (4.24) можно получить связь продольных напряжений трубчатых образцов и деформации при растяжении.

$$\sigma_1 = Ae_1^n = A \left( \ln \frac{L}{L_0} \right)^n = A \ln^n \lambda. \quad (4.24)$$

При неизменном объеме площадь образца выражается как  $F = F_0 (L_0 / L)$ , из чего можно показать связь растягивающей силы и  $\lambda$ :

$$P_1 = \sigma_1 F = AF_0 \frac{1}{\lambda} (\ln \lambda)^n;$$

$$\frac{dP_1}{d\lambda} = 0 \Rightarrow -\frac{\ln^n \lambda}{\lambda^2} + n \frac{\ln^{n-1} \lambda}{\lambda} \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$e^* = \ln \lambda = n \Leftrightarrow \sigma^* = An^n.$$

Для технических деформаций

$$L = L_0 (1 + \varepsilon); \quad \sigma_1 = k\varepsilon^m \Rightarrow$$

$$m\varepsilon^{m-1} (1 + \varepsilon) - \varepsilon^m = 0 \Rightarrow \varepsilon^* = \frac{m}{1 - m}.$$

Растяжение трубы по координате  $y$  под действием  $p$  внутреннего давления позволяет представить элемент трубы как кольцо с сечением в виде квадрата со стороной  $h$ . Можно рассчитать объем такого кольца, который равен  $2\pi R h^2$ , и при увеличении радиуса  $R$  получаем следующее:

$$e_2 = \ln \frac{R}{R_0}; \quad 2\pi R_0 h_0^2 = 2\pi R h^2 \Rightarrow h = h_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}}; \quad p = \frac{\sigma_2 h}{R} = A \frac{h_0 \sqrt{R_0}}{R^{3/2}} \ln^n \frac{R}{R_0}, \quad (4.25)$$

где  $R, R_0, h, h_0, p$  – радиусы до и после растяжения, толщина и внутреннее давление соответственно.

В экстремуме (максимуме)  $p(R)$  (4.25) можно определить критические напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dR} = A\sqrt{R_0} \left[ \frac{\ln^n(R/R_0)}{R^{3/2}} \right]' = 0 &\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{\ln^n(R/R_0)}{R^{5/2}} = n \frac{\ln^{n-1}(R/R_0)}{R^{3/2}} \times \frac{1}{R} \Rightarrow \\ \ln \frac{R^*}{R_0} = e^* = \frac{2}{3}n &\Leftrightarrow \sigma^* = A \left( \frac{2}{3}n \right)^n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Критическая деформация оказывается существенно ниже, чем при одноосном продольном растяжении.

Введем следующие обозначения: внутреннее давление –  $p$ , растяжение продольной силы –  $P$ , толщина стенки –  $h$ , радиус тонкостенной трубы –  $R$ ,  $x$  – продольный размер элемента вдоль оси 1,  $y$  – окружной размер элемента вдоль оси 2 (см. рис. 2). Проявление неустойчивости деформирования (4.21) описывается с помощью:

$$\begin{aligned} dPdx + dp\pi R^2 dx + dp2\pi RxdR = 0; \quad \sigma_1 = \frac{P}{2\pi Rh} + \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{h}; \\ \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2\pi pR^2}{P + \pi pR^2} \quad (= 2 \Leftrightarrow P = 0); \Rightarrow P = 2\pi Rh(\sigma_1 - \sigma_2/2); \quad p = \sigma_2 h/R; \\ dP = 2\pi [Rh(d\sigma_1 - d\sigma_2/2) + dRh(\sigma_1 - \sigma_2/2) + Rdh(\sigma_1 - \sigma_2/2)]; \\ dp = d\sigma_2 h/R + \sigma_2 dh/R - \sigma_2 h dR/R^2 \Rightarrow \\ 2\pi dx [Rh(d\sigma_1 - d\sigma_2/2) + dRh(\sigma_1 - \sigma_2/2) + Rdh(\sigma_1 - \sigma_2/2)] + \\ + (d\sigma_2 h/R + \sigma_2 dh/R - \sigma_2 h dR/R^2)(\pi R^2 dx + 2\pi RxdR) = 0 \Leftrightarrow (: \pi xRh) \Rightarrow \\ d\varepsilon_1 = \frac{dx}{x}; \quad d\varepsilon_2 = \frac{dR}{R}; \quad d\varepsilon_3 = \frac{dh}{h} \Leftrightarrow d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \\ d\varepsilon_1 [(2d\sigma_1 - d\sigma_2) + d\varepsilon_2(2\sigma_1 - \sigma_2) + d\varepsilon_3(2\sigma_1 - \sigma_2)] + \\ + (d\sigma_2 + \sigma_2 d\varepsilon_3 - \sigma_2 d\varepsilon_2)(d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2) = 0 \Rightarrow \\ d\sigma_1 d\varepsilon_1 + d\sigma_2 d\varepsilon_2 = \sigma_1 (d\varepsilon_1)^2 + 2\sigma_2 d\varepsilon_2 (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Теперь выразим напряжения и деформации через интенсивности и используем условие (4.16) пропорциональности нагружения и равенства отношений деформаций к соответствующим компонентам девиаторов напряжений:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\sigma_i}{f} d\varepsilon_i \left[ \frac{(2-\alpha)}{2f} + \alpha \frac{(2\alpha-1)}{2f} \right]_{|_1} = \\
& = \frac{\sigma_i}{f} (d\varepsilon_i)^2 \left[ \frac{(2-\alpha)^2}{4f^2} + 2\alpha \left( \frac{(2-\alpha)(2\alpha-1)}{4f^2} + \frac{(2\alpha-1)^2}{4f^2} \right) \right] \Rightarrow \\
& \frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{1}{z_4} = \frac{4-4\alpha+\alpha^2+4\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha}{4f^3} \Rightarrow \\
& z_4 = \frac{4(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}{4\alpha^3+3\alpha^2-6\alpha+4} \left( =1 \leftrightarrow \alpha = \frac{0}{\infty} \right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

График последней зависимости (4.28) построен на рис. 4.3, где по кривой 4 видно более низкое значение критической деформации для трубки, чем для пластинки с кривой 3. Данный эффект также проявляется и при сравнении растяжения трубки (п. 4.1) с внутренним давлением (п. 4.2). Изложенное выше замечание качественно коррелирует с экспериментальными данными С. П. Тимошенко над отоженной изотропной медью. Было показано, что трубчатые, запаянные с концов образцы при деформации на растяжение 2-3% подвергаются разрушению, а плоские – при 10-20%.

Экстремум функции  $z$  (4.28) от  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{dz}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \\
& (2\alpha-1)(4\alpha^3+3\alpha^2-6\alpha+4) = 4(\alpha^2-\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-1) \Rightarrow \\
& \alpha^3 - \frac{5}{2}\alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0; \quad z_1 = 1 \\
& \alpha_{2,3} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \left\{ \begin{array}{l} 2.0 \leftrightarrow z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58 \\ 0.5 \leftrightarrow z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15 \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Получается «красивый» результат - возможность определения критического соотношения между напряжениями, которые обеспечивают минимальную и максимальную предельную деформацию при двухосном растяжении (см. рис. 4.3).

Запишем условие неустойчивого деформирования для оболочки сферической формы с радиусом  $R$  и толщиной  $h$  под действием  $p$ :

$$\begin{aligned}
dPdR &= 0; \quad P = 4\pi pR^2 = 8\pi\sigma_2 hR \\
\sigma_1 = \sigma_2 &= \frac{pR}{2h} = \sigma_i; \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \Rightarrow f = 1; \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_3; \\
dP &\sim d\sigma_2 hR + \sigma_2 dhR + \sigma_2 h dR \Leftrightarrow (:Rh) \Rightarrow \\
d\sigma_2 &= \sigma_2 (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) = 3\sigma_2 d\varepsilon_2 \Rightarrow \\
\frac{1}{\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2} &= \frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = 3 = \frac{1}{z} \Rightarrow z = 3.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

В случае двухосного растяжения изначально при деформировании неустойчивого типа ожидается необходимая предельная деформация более высокого порядка. При этом нельзя забывать о том, что в случае и трехосного, и двухосного напряжения наблюдается затрудненная деформация пластического типа. Вследствие этого вязкость разрушения снижается, и это опасно ввиду возможности появления менее желательных видов разрушения. Примером может служить увеличение хрупкой трещины.

#### 4.2. Энергетический критерий расслоения и масштабный эффект прочности

Вопросы устойчивости элементов конструкций с дефектами (трещинами, расслоениями, непроклеями и т.п.) представляют значительный прикладной интерес в связи с использованием новых конструктивных решений и материалов со слоистой структурой [61, 65, 81, 100-101, 119, 125-128, 139-140]. Примером могут служить трехслойные и многослойные несущие и ограждающие панели. В слоистых композиционных материалах такие дефекты часто оказываются неизбежными ввиду особенности технологического процесса, который сопровождается возникновением и развитием остаточных напряжений на границах слоев.

Технологические дефекты и местные нарушения сплошности в таких конструкциях приводят, как правило, либо к развитию трещин, либо к снижению жесткости, устойчивости. Нормы дефектности конструкций, а также технические условия на неразрушающие методы контроля должны быть основаны на решениях

соответствующих задач механики для конструктивных элементов, содержащих дефекты.

В терминах критических напряжений нельзя сформулировать критерии для таких видов разрушения. Можно ввести коэффициент интенсивности напряжений  $K$  для оценки случаев, когда напряжения на концах трещины становятся бесконечно большими. В моделировании продольной трещины «математическим разрезом» при нагружении в поле напряжений не вносятся дополнительных вкладов, однако происходит дальнейшее распространение трещин расщепления. Из механики можно показать, что энергетический и силовой подходы дают равносильные результаты, и что есть прямая связь между значениями критической скорости высвобождения энергии  $G_c$  и критическим коэффициентом интенсивности напряжений  $K_c$ :  $G_c = EK_c^2$ . Беря во внимание данный факт, можно показать, что для композитов с линейной деформацией вдоль их волокон для характеристики вышеприведенных механизмов разрушения будут применяться энергетические критерии [96].

С целью вывода **общего термодинамического критерия разрушения** требуется только сделать значение притока энергии  $dA$  от механической работы при воздействии на тело и сумму энергий разрушения  $dU$ , диссипации  $dW$  и упругой энергии  $dT$  равными:

$$dA \geq dU + dW + dT. \quad (4.31)$$

Можно увидеть, что  $W = \gamma S$ , где  $\gamma$  – удельная работа расслоения, тогда дифференциал  $dW = \gamma dS$ .

Энергетический критерий также может быть выражен в разностной форме, где необходимо провести сравнение упругих энергий в начальный  $U_0$  и конечный  $U_1$  момент времени. Более того, можно пренебречь различными диссипативными эффектами в образце, такими как тепловые эффекты, кинетическая энергия осколков, энергия волн и др. В таком случае уравнение (4.31) показывает, что в случае разрушения необходимым условием будет повышение значения энергии в самом начале на значение работы разрушения  $W$ , которое пропорционально

области разрушения. Это позволит определить нижнюю оценку для напряжений критического вида, так как вышесказанное условие является только необходимым, но не полной мере достаточным. При малых временах разрушения можно утверждать, что в жесткой системе нагружения захваты не смещаются, и можно не учитывать дополнительную компоненту работы  $A$ . Учитывая все это, выведем значения напряжений критического вида из следующего условия:

$$U_0 = U_1 + W. \quad (4.32)$$

В модели будет рассматриваться хрупкий стержень, площадь сечения которого будет равна  $S$ , а длина –  $L$ . Напряжение  $\sigma$  будет оказывать равномерное воздействие. Внутренняя упругая энергия примет значение  $U_0 = \sigma^2 LS / (2E)$ , где  $E$  – это модуль Юнга в сторону растяжения. При нулевом  $A$  разрушение за время  $\tau$  будет идти с работой разрушения  $W = \gamma S$ . Допустим, что  $U_0 = W$  в (4.32), следовательно, вся энергия перешла в работу разрушения, тогда получим оценку прочности [133, 134].

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{L}}, \quad (4.33)$$

Отметим, что здесь оценка прочности является справедливой при  $L \leq \tau c$ , где  $c$  – скорость распространения упругих волн. Видно, что из того, что  $U_0$  прямо пропорционально объему образца и что процесс разрушения определяется поверхностными эффектами, то прочность обязательно будет зависеть от некоторых параметров тела (4.33).

Данное утверждение можно доказать даже в бытовых экспериментах. Например, при фиксированной скорости вращения кофемолки (или камнедробилка) может измельчить частицы до некоторого ограниченного определенного размера. Накопленная кинетическая пропорциональна  $d^3 V^2$ , где  $V$  – скорость,  $d$  – размер частицы. Тогда можно определить работу разрушения, которая пропорциональна  $k\gamma d^2$ , что показывает невозможность размолоть в кофемолке (или камнедробилке) частицы меньше характерного ограниченного снизу размера  $d > k\gamma / V^2$ , зависящем от  $V$ .

Важно помнить, что пренебрежение масштабными эффектами при разрушении расслоением невозможно для точной оценки прочности конструкций

из малых композитных образцов. В силу этого энергетический подход становится более выгодным с точки зрения неявного учета масштабного эффекта в  $\gamma$  при переходе от образцов к конструкциям. В силовом же подходе критические нагрузки оцениваются через  $\sigma^{\max}$  и сравнение с  $\sigma^*$  (предел прочности).

**Устойчивый рост расслоений.** Согласно дифференциальному критерию Гриффитса после выпучивания слоя увеличение расслоения обеспечивается достижением критического значения ( $\gamma$ ) скорости высвобождения упругой энергии  $G$  (4.34), при этом  $\gamma$  – удельная работа расслоения

$$G = -\frac{dU}{dS} = \gamma. \quad (4.34)$$

Следует отметить, что увеличение области расслоения после выпучивания может быть как неустойчивым, так и устойчивым. Первый может происходить без нагнетания внешней нагрузки, тогда как второй будет зависеть от значения второй производной упругой энергии. При выполнении неравенства (4.35) будет достигнуто условие устойчивого расслоения.

$$\frac{dG}{dl} \leq 0. \quad (4.35)$$

В литературе похожие задачи по расслоению пластин и оболочек очень подробно были изложены [42-44, 50, 89].

### **4.3. Расслоение при сжатии плоского композитного элемента с выщелкиванием слоя**

В случае сжатия слоистых стержней и пластин процесс разрушения может протекать по разным механизмам:

- 1) потеря устойчивости всего стержня (по Эйлеру);
- 2) выщелкивание и отслоение слоя (характерной толщины);
- 3) расщепление на части, сопровождаемое выпучиванием слоев и далее образованием кинка, т. е. полосы сдвига [95]. Ключевое значение при оценке критических напряжений имеет определение того, какой именно механизм разрушения был запущен, и какой из механизмов обладает наименьшей нагрузкой.

Однако получения более полной картины разрушения важно также учесть начальные трещины расслоения в системе.

**Энергетический критерий.** Для выщелкивания слоя (рис. 4.4) с параметрами пластины  $h$ ,  $L$  и  $w$  из условия (4.32) очевидно, что после выщелкивания упругая энергия включает в себя энергию сжатия  $U_c$  и изгиба  $U_b$

$$U_0 = U_1 + W; \quad U_1 = U_c + U_b. \quad (4.36)$$

Изначально  $U_0$  слоя при действии напряжения  $\sigma$  при сжатии равна

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma^2 w h L / E. \quad (4.37)$$

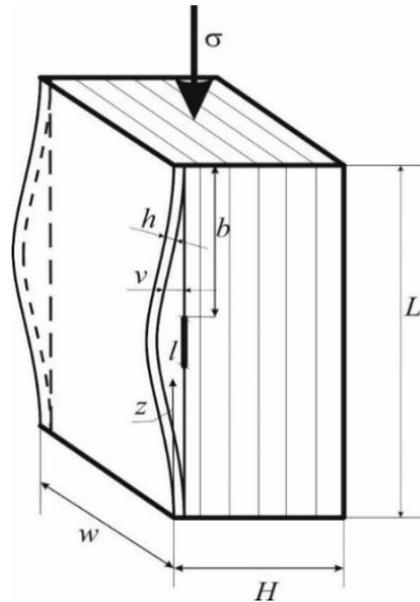


Рис. 4.4. Механизм выщелкивания слоя

При значениях  $H - h \gg h$  в оставшейся части стержня изменением упругой энергии незначительно, и им можно пренебречь. Когда происходит отслоение, то сжимающее напряжение становится равным эйлеровому напряжению критического типа

$$\sigma_c = \eta E h^2 / L^2 \Rightarrow U_c = \frac{1}{2} \sigma_c^2 w h L / E, \quad (4.38)$$

где  $\eta = \pi^2 / 12 = 0.822$  – свободное опирание концов;  $\eta = \pi^2 / 3 = 0.329$  – жесткое защемление концом стержня;  $\eta = 1.68$  – защемление с одного конца. Величина  $\eta$  мало влияет на критическое напряжение, что мы покажем ниже.

Упругая энергия  $U_c$  сжатия может быть рассчитана по формуле (4.38), однако для расчета энергии изгиба  $U_b$  необходимо сделать некоторые допущения. Прогиб

слоя можно описать по формуле  $v = v_0 \sin^2(\pi z / L)$ ,  $z \in [0, L]$  где значение  $z$  для заземленных концов. Рассмотрев другие граничные условия, можно заключить, что результаты получаются идентичными с точностью до значения  $\eta$ . Запишем уравнение равновесия продольного изгиба, где происходит замена кривизны на вторую производную от прогиба  $v$ , что принято в силу малых углов поворота сечений и прогибов.

$$EI \frac{1}{\rho} = M(z) \Rightarrow EIV'' = \sigma_e whv(z); \quad I = \frac{wh^3}{12}. \quad (4.39)$$

В силу того, что выше была введена формула для описания формы прогиба, упругую работу будем считать через кривизну, хотя еще можно было бы получить ее и через вычисление интеграла от работы момента, что, однако, является более сложным.

$$\begin{aligned} U_b &= \int_0^L \frac{M^2(z)}{2EI} dz = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dz = \frac{2\pi^4 v_0^2 EI}{L^4} \int_0^L \left( \cos \frac{2\pi z}{L} \right)^2 dz = \\ &= \frac{Ewh^3}{12} \cdot \frac{\pi^4 v_0^2}{L^3} = \sigma_e (\sigma - \sigma_e) whL / E. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Последняя формула в (4.40) была получена исходя из допущения, что концы слоя остаются зафиксированными, когда выщелкивание происходит за очень малое время, а следовательно, из-за нулевого перемещения концов слоя сила не будет совершать работу. В данном случае под действием сжимающего напряжения от исходного значения  $\sigma$  до эйлерова  $\sigma_e$  (4.38) происходит компенсация перемещения концов при изгибе путем удлинения стержня.

Далее необходимо определить амплитуду прогиба  $v_0$ . Допустим, что для концов элемента длины  $dz$  в случае малых отклонений одного из них на значение  $dv$  эти концы сблизятся на  $\delta(dz) = dz - \sqrt{dz^2 - dv^2} = dz \left( 1 - \sqrt{1 - v'^2} \right) \approx \frac{1}{2} v'^2 dz$ . С учетом

формы прогиба  $v'^2 = \frac{\pi^2}{L^2} v_0^2 \sin^2 \frac{2\pi z}{L}$ . Можно получить формулу для сближения концов

изогнутого слоя:  $\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dz = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 v_0^2}{L}$ , однако на значение  $\Delta$  произойдет

сокращение смещения от деформации сжатия за счет снижения сжимающего

напряжения с  $\sigma$  до  $\sigma_e$ . После осуществления выщелкивания же перемещение концов станет нулевым, и в таком случае будет верным равенство. И уже из него возможно выразить амплитуду прогиба  $v_0^2 = 4L^2(\sigma - \sigma_e)/(\pi^2 E)$ . После учета (4.37), (4.38), (4.40) и  $W = \gamma wL$  уравнение (4.36) становится квадратным  $\sigma^2 Lh = \sigma_e^2 Lh + 2\sigma_e(\sigma - \sigma_e)Lh + 2E\gamma L$ , корнями которого является напряжение, возникающее в случае выщелкивания слоя неизвестной толщины  $h$

$$\sigma = \sigma_e + \sqrt{2E\gamma/h}. \quad (4.41)$$

**Характерная толщина слоя.** Слагаемое, приведенное первым в (4.41), при понижении значения толщины  $h$  уменьшается, тогда как второе слагаемое увеличивается. На рис. 4.5 представлен вид зависимости из уравнения (4.41), откуда можно увидеть существование характерной толщины слоя  $h^*$  и возможность получить минимальное критическое напряжение  $\sigma_{\min}$  из производной  $\partial\sigma/\partial h = 0$

$$h^* = \left( \frac{\gamma L^4}{8\eta^2 E} \right)^{1/5} \quad (4.42)$$

и для определения минимального критического напряжения при выщелкивании слоя подставим (5.12) в (5.11)

$$\sigma_{\min} = \frac{5}{2} \left( \frac{\eta E^3 \gamma^2}{2L^2} \right)^{1/5}. \quad (4.43)$$

Для  $E = 45$  ГПа,  $\gamma = 4$  кН/м,  $L = 100$  мм,  $\eta = 0.822$ , указанных на рис. 4.5 из формул (4.42), (4.43) можно рассчитать значения, хорошо коррелирующие с экспериментальными данными,  $h^* = 4.4$  мм,  $\sigma_{\min} = 900$  МПа.

Критическое напряжение (иначе прочность) из уравнения (4.43) будет зависеть от длины образца нелинейно, что важно помнить при проведении экспериментов на выщелкивание при наименьшем напряжении (4.43), а также при создании материалов и сжимаемых композитных деталей, учитывая их характерный размер (4.42). Это необходимо при проверке материалов на опасные дефекты, которые характеризуются не только своими размерами, но и глубиной

залегания. И из (4.42) было получена глубина  $h^*$  залегания наиболее опасного непрочлея.

*Примечание:* Речь идет о нахождение минимума степенной функции  $f$  от нескольких переменных:  $f(h, E, \gamma, C) = ah^k E^{n_1} \gamma^{n_2} C^{n_3} + bh^{-s} E^{m_1} \gamma^{m_2} C^{m_3}$ , где  $a, b$  – константы. При этом показатели  $n_i, m_i$  принимают любые значения,  $k, s > 0$ , необходимо в задачах о расслоении с выщелкиванием слоев. Для условия  $\partial f / \partial h = 0$  минимум достигается при  $h^* = \left[ (ak)^{-1} bs E^{m_1 - n_1} \gamma^{m_2 - n_2} C^{m_3 - n_3} \right]^{s+1/k}$  и выглядит как  $f_{\min}(h^*) = AE^{l_1} \gamma^{l_2} C^{l_3}$ , где  $A = (sb / (ka))^{k/(k+s)} + (sb / (ka))^{s/(k+s)}$ ;  $l_i = (km_i + sn_i) / (k + s)$ , с преобразованием каждого слагаемого к одинаковым показателям степеней.

На рис. 4.6 показаны результаты. При критическом напряжении  $\sigma_c$ , возникает локальное разрушение одного из видов: микроволновое гофрирование, кинк, смятие по торцу (прямая 1, рис. 4.6). На кривой 3, рис. 4.6 продемонстрирована при макропотере устойчивости зависимость напряжения критического типа от длины стержня. Формула Эйлера (4.38), которую часто используют для упрощения, по сути своей плохо согласуется с экспериментальными данными. Было осуществлено несколько попыток исправить ее (Карман, Энгессер, Шенли, Ясинский, Работнов, Ванько и др.), что не было разобрано в рамках данной работы.

Зависимость, соответствующая кривой 3, может быть получена с помощью экспериментов или моделей. Беря во внимание только зависимости 1 и 3 рис. 4.6, то для случая сжатия композитов возможно переоценить их несущую способность, что может быть опасно для дальнейшей эксплуатации. Анализируя кривую 2 рис. 4.6 (4.43), можно вносить корректировки в расчет при промежуточных значениях длины элемента (в стадиях между локальным разрушением и макрорывучиванием).

**Множественное расслоение.** Если композитные изделия не имеют дефектов, то в процессе их сжатия можно видеть расслоение на большое количество слоев, при этом все они будут иметь практически равный показатель толщины. Энергетический подход дает возможность продемонстрировать такой эффект. Выщелкивание слоев вызывает расслоение за счет накопленной упругой

энергии, то есть энергия  $n$ -слоев затрачивается на  $n-1$  расслоение, что понижает критическое напряжение. Расслоение приводит к образованию в зависимости от материала слоев определенной толщины. Для этого при расчете вводится параметр, характерный размер, который выражается через толщину слоя (4.42). Это важно для нахождения непрочных, которые могут являться опасными для материала, что зависит от их размера и глубины залегания.

Здесь необходимо учесть случай, когда наблюдается расслоение на  $n$  равных по толщине слоев для стержня с толщиной  $H$ , и при этом в (4.36) выражения для величин преобразуются:

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma^2 wHL / E; U_c = \frac{1}{2}\sigma_e^2 wHL / E; U_b = \sigma_e (\sigma - \sigma_e) wHL / E; W = \gamma wL(n-1); \sigma_e = \eta EH^2 / (nL)^2,$$

откуда

$$\sigma_n = \sigma_e + \sqrt{2E\gamma(n-1) / H}. \quad (4.44)$$

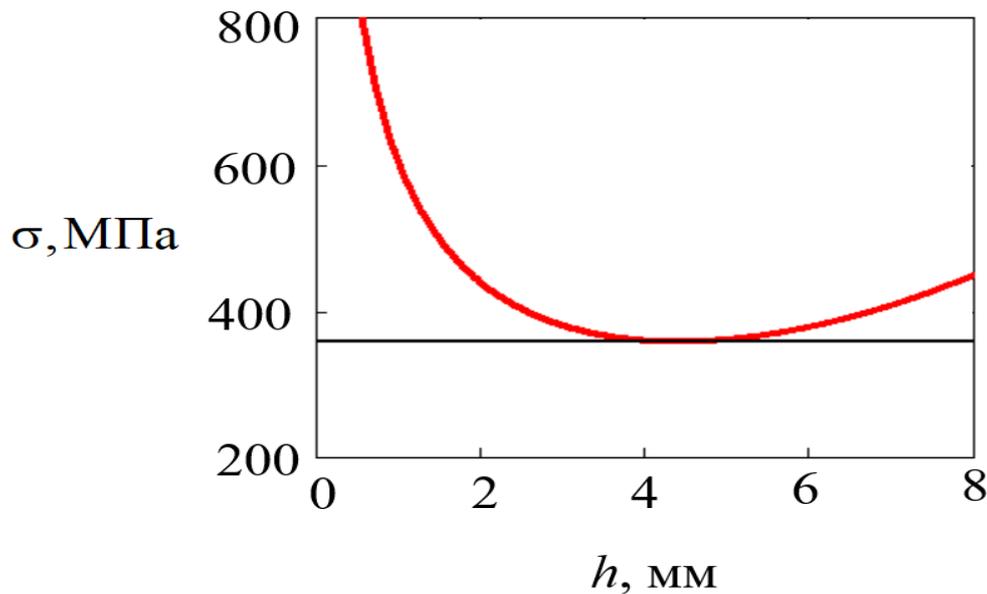


Рис. 4.5. График критического напряжения (4.41) от толщины выщелкиваемого слоя [133]

При устремлении  $n \rightarrow \infty$ , и  $(n-1)/n \rightarrow 1$  уравнение (4.44) вырождается в (4.41), (4.43) для выщелкивания одного слоя характерной толщины  $h^*$  (4.42).

В научной литературе по теме [95] продемонстрировано, что значения для критических напряжений при таком виде разрушения, как расслоение, не становятся меньше, нежели при  $n = 2$ . И в таком случае критические напряжения



разрушения необходимо определять наименьшее напряжение для каждого механизма (критическое напряжение), и сравнить их друг с другом.

В случае механизма 1  $\sigma_e$  выражается как:

$$\sigma_e = \frac{\eta E h^2}{l^2}; \left( \eta = \frac{\pi^2}{3} \right). \quad (4.45)$$

Для механизмов 3 и 4 выражение (4.41) немного изменяется:

$$\sigma = \frac{\eta E h^2}{L^2} + \sqrt{\frac{2E\gamma}{Lh}(L-l)}; \left( \eta = \frac{\pi^2}{12} \right). \quad (4.46)$$

$$\sigma = \frac{\eta E h^2}{(l+b)^2} + \sqrt{\frac{2E\gamma b}{(l+b)h}}; (\eta = 1.68). \quad (4.47)$$

Для механизма 2, который является одним из наиболее интересных, выражения для  $U_0$ ,  $U_c$ ,  $U_b$  остаются неизменными с заменой  $L$  на  $l_1 = l + 2\xi$ . Формула (4.41) преобразуется:

$$\sigma = \frac{\eta E h^2}{l_1^2} + 2\sqrt{\frac{\gamma E \xi}{l_1 h}} = \frac{A}{(1+x)^2} + B\sqrt{\frac{x}{1+x}}; A = \frac{\eta E h^2}{l^2}; \left( \eta = \frac{\pi^2}{3} \right); B = \sqrt{\frac{2\gamma E}{h}}; x = \frac{2\xi}{l}. \quad (4.14)$$

В литературе [95] приведен содержательный анализ механизмов выщелкивания слоев. При  $x=0 \Rightarrow \sigma = \sigma_e = A$ ;  $x \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow B$ . Равенство  $\partial\sigma / \partial x = 0$  (4.48) приводит к уравнению (4.49):

$$(1+x)^3 = ax; a = (2A/B)^2 \quad (4.49)$$

по которому можно найти длину дополнительного отслоения  $2\xi^*$  при минимальном критическом напряжении. Для описания процесса расслоения важно также учитывать свойства композита. В эксперименте, как правило, осуществляется механизм, для которого проявляется наименьшее напряжение. Стоит отметить, что уравнению (4.49) безразмерный параметр  $a$  зависит как от свойств  $(E, \gamma, l/h)$ , так и от абсолютных размеров композита  $(l, h)$ , из чего можно заключить, что изменение механизма разрушения и значений критических напряжений может происходить в связи с масштабным эффектом. Это важно учитывать при моделировании экспериментов на материалах с искусственными расслоениями, полученными путем введения пленки из фторопласта.

**Устойчивость роста расслоения.** Получить критические напряжения можно не только до выщелкивания, но и после него для ситуации увеличения расслоения над непроклеем длины  $l$ . В таком случае упругая энергия расслоения:

$$U_1 = \frac{1}{2} [\sigma^2 (L-l) + \sigma_e^2 l + 2\sigma_e (\sigma - \sigma_e) l] wh / E. \quad (4.50)$$

При  $H \gg h$  можно пренебречь изменением энергии в оставшейся части стержня при расслоении. Тогда из формулы (4.50) и критерию по Гриффитсу (4.34) придем к выражению

$$-\frac{dU_1}{wdl} = \gamma \quad (4.51)$$

и при  $\sigma_e = \eta Eh^2 / l^2$  получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 - 3\sigma_e^2 + 2\sigma_e \sigma &= 2E \gamma / h; \\ \sigma_{crit} &= 2\sqrt{\sigma_e^2 + \frac{E\gamma}{2h}} - \sigma_e. \end{aligned} \quad (4.52)$$

При длинных расслоениях из уравнения (4.52):  $\sigma_e \approx 0 \Rightarrow \sigma_{crit} \approx \sqrt{2E\gamma h^{-1}}$ .

Можно также рассмотреть другой предельный случай, когда  $\gamma \approx 0 \Rightarrow \sigma_{crit} \approx \sigma_e$ .

По формуле (4.52) можно найти начало роста расслоения. Устойчивость же этого роста определяется знаком производной  $\frac{\partial \sigma}{\partial l}$ .

*Замечание про термины.* Важно отметить, что в русском языке обозначают некоторые термины при описании того или иного явления и понятия. Так, термин «потеря устойчивости» отражает следующее: а) бифуркацию (т. е. возникновение нетривиальных форм равновесия), выщелкивание, выпучивание (англ. *buckling*); б) начало роста параметра разрушения (англ. *critical condition, threshold stress at crack start*); в) начало без роста нагрузки роста неустойчивого типа параметра разрушения (*instability*). Соответственно, и задача о выщелкивании может быть записана в рамках трех подходов. С одной стороны при подходе а) записывается критерий (4.51), с другой стороны при выборе варианта б) приходим к уравнению (4.52), а в случае в) выводим выражение для критической длины расслоения (4.53).

Из уравнения (4.52) можно получить наиболее опасную длину расслоения с учетом  $\partial \sigma / \partial l = 0$

$$l_*^4 = 6\eta^2 E h^5 \gamma^{-1}, \quad (4.53)$$

При выщелкивании  $l < l_*$ , и длина расслоения будет скачком увеличиваться до  $l_*$ , и после этого возрастание будет возможно только при увеличении нагрузки. Минимальное напряжение для увеличения расслоения на глубине  $h$  можно записать как

$$\sigma' = \sigma_* = \sqrt{2E\gamma/h} \quad (4.54)$$

данная величина может быть критерием для оценки напряжений, входящих в допустимый интервал, если при этом известна глубина дефекта.

#### 4.4. Расслоение кольца (баллона) с выщелкиванием внутреннего слоя

Возьмем кольцо баллона с радиусом  $R$ , в котором равномерно распределено сжимающее напряжение  $\sigma$  в слое  $h \ll R$ . Полная толщина кольца  $H \gg h$ , из чего следует, что при отслоении тонкого слоя значение полной энергии остается практически неизменным, и на расслоение с выщелкиванием затрачивается упругая энергия. Вышеизложенная модель отличается от модели расслоения, приведенной в 4.3 по нескольким причинам: 1) при значительных прогибах (рис. 4.7, 4.8) необходима подстановка точного выражения для кривизны с решением в эллиптических интегралах; 2) в формуле (4.36) для энергетического критерия при больших прогибах можно пренебречь значениями остаточных после выщелкивания сжимающих напряжений.

**Энергетический критерий расслоения.** В начале процесса расслоения с напряжением слоя  $\sigma$  и параметрами  $2\varphi$ ,  $h$  – толщина,  $w$  – ширина упругая энергия аналогична (4.37):

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{E} R h w \varphi. \quad (4.55)$$

При этом работа расслоения  $W$  прямо пропорциональна удельной работе расслоения  $\gamma$ :

$$W = 2\gamma R \varphi w. \quad (4.56)$$

После выщелкивания для  $U_0$  (4.55) должно выполняться следующее условие для  $U_0$  (4.55):

$$U_0 \geq U_b + W. \quad (4.57)$$

Дальнейшая трудность заключается в определении упругой линии слоя (рис. 4.7) и расчете упругой энергии  $U_b$ .

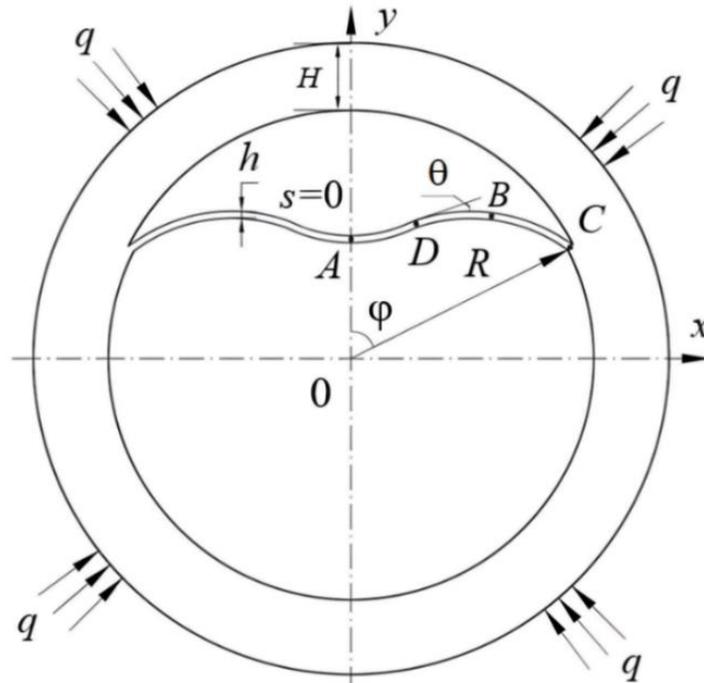


Рис.4.7. Форма изгиба внутреннего слоя после расслоения с выщелкиванием [123]

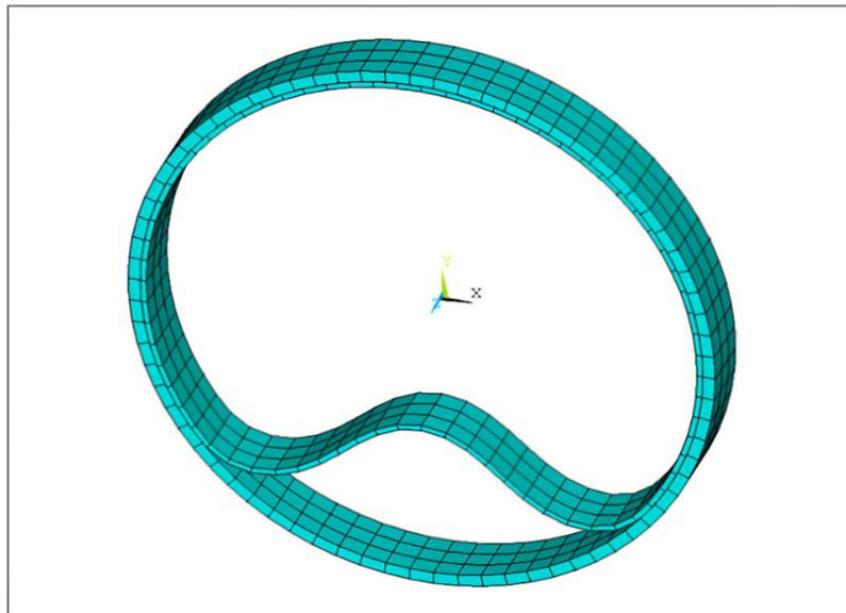


Рис. 4.8. МКЭ-модель отслоения внутреннего слоя в кольце в среде ANSYS [125]

**Расчет энергии изгиба слоя после выщелкивания.** После завершения процесса выщелкивания (с внутренней поверхности кольца) со введением локальной кривизны  $1/\rho$  уравнение равновесия примет следующий вид:

$$EI \left( \frac{1}{\rho(s)} + \frac{1}{R} \right) = M(s). \quad (4.58)$$

После интегрирования получим энергию изогнутого слоя. Локальная кривизна здесь будет определяться жесткостью сечения на изгиб  $EI$  и моментом:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_s \frac{M}{\rho} ds = \frac{1}{2} \int_s \frac{M^2(s)}{EI} ds = \frac{1}{2} EI \int_{-R\phi}^{R\phi} \left( \frac{1}{\rho(s)} + \frac{1}{R} \right)^2 ds; \quad (4.59)$$

$$I = \frac{wh^3}{12}; \quad \frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\theta(s)}{ds},$$

где  $R$  – внутренний радиус трубы;  $I$  – момент инерции сечения слоя;  $M$  – текущий изгибающий момент;  $\theta$  – угол наклона касательной к упругой линии изогнутого слоя по отношению к горизонтальной оси  $x$ ;  $s$  – длина дуги, от точки  $A$  от середины слоя на оси  $y$ , где угол  $\theta$  равен 0. В такой точке создается продольная сила  $P$  и неизвестный момент, который определяет кривизну слоя.

**Решение в эллиптических интегралах.** Вычисления в эллиптических интегралах (4.58) производят после введения эллиптического угла  $\psi$  [133]:

$$\sin \frac{\theta}{2} = m \sin \psi; \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (4.60)$$

Для решения необходимо продифференцировать уравнение (4.58) с производной по углу  $\theta$ , а не  $s$ , чтобы провести разделение переменных.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{R} &= -\frac{P}{EI}(y-0A); \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta \Rightarrow; \\ \frac{d^2\theta}{ds^2} &= -\frac{P}{EI} \frac{dy}{ds} = -k^2 \sin \theta; \quad k^2 = \frac{P}{EI}; \quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\theta}{dsd\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left( \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right) \Rightarrow \\ \frac{d}{d\theta} \left( \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right) &= -2k^2 \sin \theta \Rightarrow \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d\theta}{ds} \right)_A^2 = -2k^2 \int_{\theta_A}^{\theta} \sin \theta d\theta = \\ &= 2k^2 (\cos \theta - \cos \theta_A) = -4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = -4k^2 m^2 \sin^2 \psi. \end{aligned} \quad (4.61)$$

При получении формулы (4.61) считалось, что в точке  $A$  при  $s=0 \leftrightarrow \theta_A=0 \Rightarrow \psi_A=0$ . В уравнении ниже обозначим кривизну в  $A$ :

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_A^2 = 4k^2 m^2 \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 4k^2 m^2 \cos^2 \psi \Rightarrow$$

$$ds = \frac{d\theta}{2km \cos \psi} = \frac{1}{k} \frac{d\psi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{k} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}}. \quad (4.62)$$

В (4.62) учтено, что из замены переменных (4.60)

$$\cos \frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right) = m \cos \psi d\psi \Rightarrow d\theta = \frac{2m \cos \psi}{\cos \frac{\theta}{2}} d\psi \Rightarrow \quad (4.63)$$

$$s = \frac{1}{k} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}}.$$

Из (4.62), (4.63) получаем, что для определения положения изогнутого слоя необходимо свести все к эллиптическим интегралам первого рода

$$ks = F_m(\psi) - F_m(\psi_A) = F_m(\psi).$$

$$F_m(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}}; \quad F_m = F_m\left(\frac{\pi}{2}\right); \quad (4.64)$$

$$\sin \theta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{dx}{ds} \Rightarrow x = \frac{2}{k} E_m(\psi) - s; \quad y - OA = \frac{2m}{k} (1 - \cos \psi)$$

и второго рода:  $E_m(\psi) = \int_0^{\psi} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi} d\psi; \quad E_m(\pi/2) = E_m.$

### Связь неизвестных параметров с угловым размером расслоения.

С целью нахождения связи  $k, m, \varphi, \psi_C$  существует необходимость применения для половины слоя  $ABC$  граничных условия решения (4.63) – (4.64):

1. На рис. 4.7 продемонстрировано произошедшее после выщелкивания равновесие слоя, когда определяются базовые значения углов для наклона касательной:  $\theta_A = 0 \Rightarrow \psi_A = 0$ . При этом вместе с ростом параметра  $s$  растет и эллиптический угол  $\psi$ . В точке перегиба  $D$  производная  $d\theta/ds$  принимает нулевое значение  $\Rightarrow \cos \psi_D = 0$ , значит  $\psi_D = \pi/2 \leftrightarrow \psi_B > \psi_D$ ,  $\theta_B = 0 \Rightarrow \sin \psi_B = 0 \Rightarrow \psi_B = \pi; \Rightarrow \psi_C > \psi_B \Rightarrow \sin \psi_C < 0$ . В точке  $C$ :  $\theta_C = -\varphi$ , кривизна отрицательна и равна кривизне трубы

$$\sin \psi_C = \frac{1}{m} \sin \frac{\theta_C}{2} = -\frac{1}{m} \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_C = 2km \cos \psi_C = -\frac{1}{R}. \quad (4.65)$$

2. Решение (4.64) определяет условие нерастяжимости дуги  $ABC$   $l = R\varphi$  и ее длину, а также связь  $m$ ,  $k$ ,  $\varphi$ ,  $\psi_C$

$$l = \frac{1}{k} F_m(\psi_C) \Rightarrow k = \frac{F_m(\psi_C)}{R\varphi}. \quad (4.66)$$

3. Еще одно уравнение связи неизвестных может быть определено выражением (4.64) для координаты  $x_C$ .

$$x_C = R \sin \varphi = \frac{2}{k} E(\psi_C) - R\varphi. \quad (4.67)$$

Далее из (4.65) – (4.67), исключим  $k$ ,  $R$  и  $\varphi$ , и получим:

$$[2E(\psi_C) - F(\psi_C)] \cos \psi_C = \sin \psi_C \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi_C}. \quad (4.68)$$

Выражение (4.68) используется далее с целью получения упругой энергии для вычисления  $g(m)$  в (4.71) – (4.72).

**Упругая энергия изгиба. Расчет.** Для того, чтобы рассчитать упругую энергию изгиба, необходимо произвести в (4.59) замену  $ds$  на  $d\psi$  из (4.62) и далее проинтегрировать по эллиптическим углам с целью дальнейшего решения с использованием эллиптических интегралов.

$$\begin{aligned} U_b &= EI \int_0^{R\varphi} \left( \frac{1}{\rho(s)} + \frac{1}{R} \right)^2 ds = \frac{EI}{R^2} \int_0^{R\varphi} (2kRm \cos \psi + 1)^2 ds = \\ &= \frac{EI}{R^2} (J_1 + J_2 + J_3); \quad ds = \frac{d\theta}{2km \cos \psi} = \frac{d\psi}{k \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Выражение (4.69) представляет три интеграла  $J_i$  с интегрированием по углу  $\psi$

$$\begin{aligned} J_1 &= 4kR^2 \int_0^{\psi_C} \frac{m^2 \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} = \\ &= 4kR^2 \int_0^{\psi_C} \left[ \frac{m^2 - 1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} \right] d\psi = 4kR^2 \left[ (m^2 - 1) F_m(\psi_C) + E_m(\psi_C) \right]; \\ J_2 &= 4Rm \int_0^{\psi_C} \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} = 4R \int_0^{m \sin \psi_C} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = 4R \arcsin(m \sin \psi_C); \\ J_3 &= \int_0^{R\varphi} ds = R\varphi. \end{aligned}$$

Формула для энергии изгиба представлена ниже и включает в себя  $g(m)$ :

$$U_b = \frac{EI}{R^2}(J_1 + J_2 + J_3) = \frac{Ewh^3}{3R} \varphi g(m); \quad (4.70)$$

$$\varphi g(m) = kR \left[ E_m(\psi_c) - (1 - m^2) F_m(\psi_c) \right] + \arcsin(m \sin \psi_c) + \frac{\varphi}{4}.$$

В таблице 4.1 при разных  $m$  приведены значения  $\varphi$  и  $g(m)$ . Взаимосвязь между значениями  $\varphi$  и  $g(m)$  показана на рис. 4.9, из которого видно, при значениях угла отслаивания  $\varphi$  ( $\varphi < 30^\circ$ )  $g(m)$  не изменяется, и  $g(0) = 2.5238$ .

Таблица 4.1. Значения функции  $g(m)$  для выражения (4.70)

$m$	$g(m)$
0,0	2,52
0,1	2,53
0,2	2,54
0,3	2,55
0,4	2,56
0,5	2,58
0,6	2,61
0,7	2,68
0,8	2,88

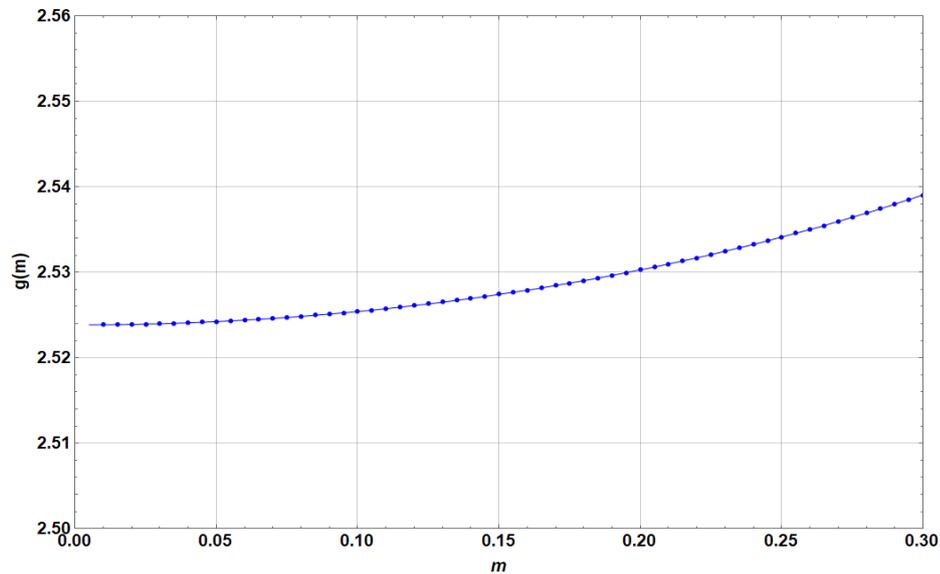


Рис. 4.9. Зависимость  $g(m)$  при различных значениях  $m$

График зависимости угла  $\varphi$  от  $g(\varphi)$  представлен на рис. 4.10.

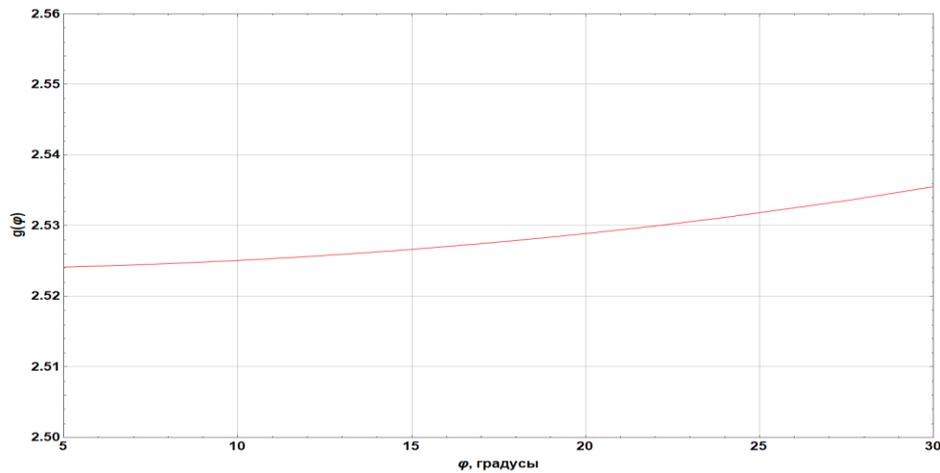


Рис. 4.10. Зависимость угла  $\varphi$  от  $g(\varphi)$

**Определение наиболее опасной толщины выщелкиваемого слоя и критических напряжений.** Далее можно найти значения для критических напряжений для слоя толщиной  $h$  при процессе выщелкивания согласно формуле для энергетического критерия (4.57) и уравнениям (4.55), (4.56), (4.70):

$$\frac{\sigma_c^2}{E^2} = \frac{h^2}{3R^2} g(m) + \frac{2\gamma}{Eh}. \quad (4.71)$$

В уравнении (4.71) рост первого слагаемого происходит с увеличением толщины, а второе начинает убывать (рис. 4.11). Тогда из формулы (4.71) можно определить для минимального критического напряжения  $\sigma_{\min}$  величину толщины  $h^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_c}{dh} = 0 &\Rightarrow \frac{2h}{3R^2} g(m) = \frac{2\gamma}{Eh^2} \Rightarrow h^* = \left( \frac{3R^2\gamma}{Eg} \right)^{1/3} \Rightarrow \\ \sigma_{\min} &\approx 1.8 \left( \frac{E^2\gamma}{R} \right)^{1/3}; \quad g(m) \approx 2.52 \div 2.58. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Формула (4.72) была выведена из уравнения для энергетического критерия (4.57). В это уравнение входило значение работы разрушения, которое, в свою очередь, выражалось в  $\text{Н/м}=\text{Дж/м}^2$ , в отличие от размерности напряжений. При этом масштабным эффектом, отраженным в (4.72), принято называть проявление зависимости прочности (критического напряжения) от внутреннего радиуса трубы. Из формулы (4.72) можно определить глубину залегания технологического дефекта, который может быть наиболее опасным для материала по характерной толщине отслоения.

Зависимость  $g(m)$  от  $m$  проявляется слабо [66, 68-69, 125], следовательно и от угла  $\varphi$ . Далее с учетом этого факта будет принято усредненное значение  $g$  равное  $g=2.55$ , либо можно принять его равным минимальному значению  $g(0)=2.52$ . Видно, что значения углов для данных  $g$  соответствуют минимальным углам, то есть не более  $30^\circ$  (на рис. 4.8), на котором показано намеренно увеличенное расслоение, являющимся в реальной модели еще меньшим.

Из уравнения (4.71) видно, что слагаемые имеют разные степени, однако после подстановки критической толщины  $h^*$  степени становятся одинаковыми.

Практическую применимость соотношения (4.72) можно показать при расчете. Так, пусть  $R=200 \text{ мм}=0.2 \text{ м}$ , и тогда средний модуль  $E=45 \text{ ГПа}$  и  $\gamma=4 \text{ кДж/м}^2$ , как в п. 5.2. При этом изменение  $\gamma$  в 8 раз приводит к изменению критической толщины слоя и напряжения только в 2 раза со значениями в рамках допустимого интервала. Из уравнения (4.72) можно рассчитать значения близкие к реальным значениям толщины полоски, при которой получают минимальные значения критического напряжения и напряжения при расслоении:

$$\begin{aligned} h^* &= \left( \frac{3R^2\gamma}{Eg} \right)^{1/3} \approx \sqrt[3]{\frac{3 \times 4 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^3}{2.52 \times 4.5 \times 10^{10}}} \approx 1.6 \text{ мм}; \\ \sigma^* &= 1.8 \left( \frac{E^2\gamma}{R} \right)^{1/3} \approx 1.8 \sqrt[3]{\frac{45^2 \times 10^{21} \times 4}{0.2}} \approx 618 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

**Влияние размеров и расположения непрочлея на критическое напряжение.** Отметим, что подвергаться выщелкиванию внутренний слой может в следующих ситуациях:

1) Внешнее давление может создаваться стягивающими кольцами в случае нагнетания его в баллоне для сжатого газа или композитной трубе. Кольца создают напряжение сжатия в стенках баллона или трубы, что помогает выдерживать материалу большее внутреннее давление. В случае использования баллона в глубоководных условиях напряжения внутри могут создаваться не только с помощью внешнего давления, но и путем температурных и усадочных напряжений. Для данной ситуации также справедлив вышеописанный анализ.

2) Проявление выщелкивания может происходить при намотке с большим натягом композитной ленты на полимерный или металлический лейнер. В данном сценарии можно для условия выщелкивания из (4.57) принять, что  $U_0 = U_b$ . Более того, в данной случае можно пренебречь энергией расслоения.

3) При существовании непроклея на глубине  $h_0$  с угловым размером  $\varphi_0$  ситуация становится более сложной, однако может реализоваться простая ситуация с выщелкиванием над непроклеем (см. случай 2).

4) На самой опасной характерной глубине  $h^*$ , в таком случае как следствие см. (4.72).

5) В случае образования дефекта на глубине  $h_0$ , выражение для  $W$ . Это коррелирует с пропорциональным уменьшением удельной работы расслоения  $\gamma$ .

$$W_0 = 2\gamma R(\varphi - \varphi_0)w = W \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi}\right) \Leftrightarrow \gamma \rightarrow \gamma \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi}\right). \quad (4.74)$$

Важно подчеркнуть, что именно непроклеи от внутренней поверхности на глубине  $h^*$  (4.72) является самым опасным для материала. В случае, когда глубина порядка  $h_0 \neq h^*$ , то могут осуществляться различные механизмы разрушения. Один из них может протекать как с увеличением, так и без увеличения длины расслоения. Другой происходит на наиболее опасной глубине  $h^*$  и при меньшем напряжении произойдет расслоение и выщелкивание. Согласно (4.72), (4.74) расслоение вне непроклея произойдет при выполнении неравенства:

$$1.8 \left(\frac{E^2 \gamma}{R}\right)^{1/3} \leq \sqrt{\frac{h_0^2 E^2}{3R^2} g(m) + \frac{2\gamma E}{h_0} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi}\right)}.$$

В настоящее время вопросы потери устойчивости представляют прикладной интерес в связи широким распространением композитных сосудов давления и емкостей различного назначения. На рис. 4.12 представлены варианты экспериментальных исследований для кольцевых образцов, зиготовленных из ПКМ [125; 139; 140].

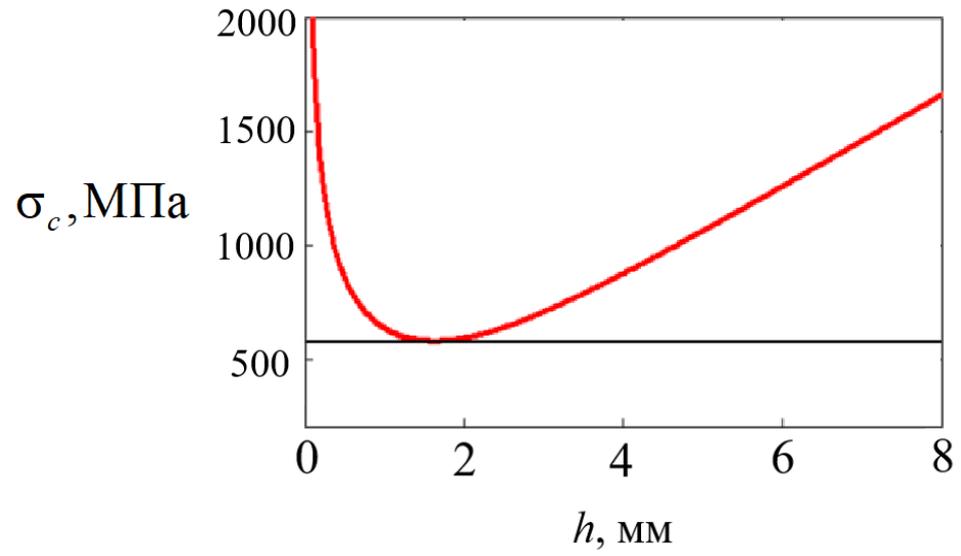
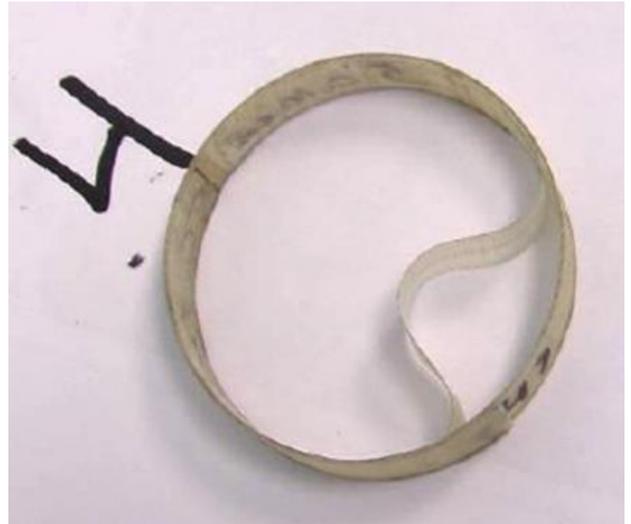


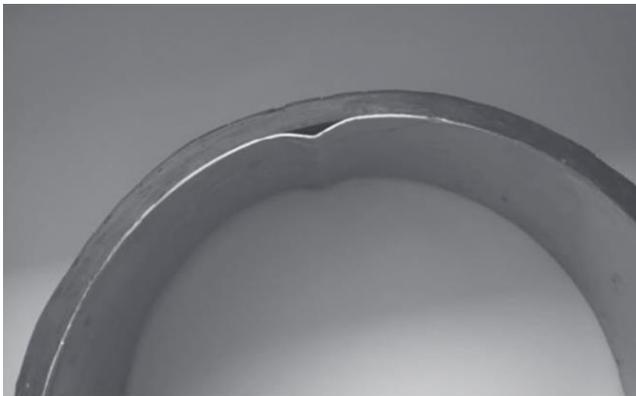
Рис. 4.11. Иллюстрация зависимости (4.71), где по оси абсцисс толщина слоя, а по оси ординат критическое напряжение



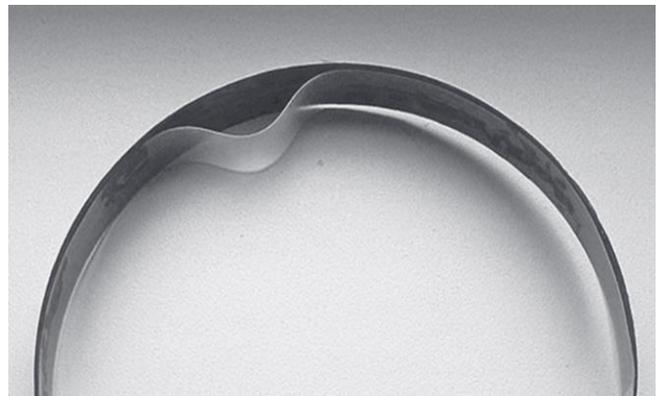
а)



б)



в)



г)



д)

Рис. 4.12. Эксперименты по потере устойчивости кольцевых образцов из пластика – а); композита – б); потеря устойчивости внутренней оболочки из стали – в) и полипропилена – г) (наружный слой – углепластик); д) – carbon fiber/PETG

#### Выводы по главе 4.

1) Продемонстрировано, что серьезными проблемами в изготовлении изделий чревато возникновение неустойчивости пластической деформации при применении метода глубокой вытяжки. С целью оценки поведения деформирования пластического саморазвивающегося типа, которое напрямую зависит от отношения главных напряжений, приняты устоявшиеся рассуждения о нелинейной диаграмме деформирования и несжимаемости. Также продемонстрирована возможность оценки предельных состояний материала с применением иных критериев в контексте как нелинейной, так и линейной механики разрушения (рост трещин, их зарождение, оценка пределов пластичности и прочности).

2) Неустойчивости деформирования, возникающие в материале, можно объяснить при помощи того экспериментального парадоксального факта, который состоит в том, что при одноосном растяжении трубчатых образцов предельная деформации способна кратно превышать предельную деформацию в случае одноосного окружного растяжения. При этом такое явление наблюдается при двойниковании и также при высокой скорости деформации, когда происходит «раздувание» сферической либо цилиндрической оболочки внутренним давлением.

3) Было показано, что можно использовать энергетический критерий для оценки критических напряжений в процессах расслоения при действии сжимающих напряжений в плоских материалах и трубах из армированных пластиков с выщелкиванием слоев.

4) Была введена удельная работа в вышеуказанный критерий, что позволило выделить характерный размер выщелкиваемого слоя, а также проиллюстрировать масштабный эффект, который заключается в связи абсолютных размеров композита и критических напряжений. Более того, добавление удельной работы позволило оценить глубину залегания непроклеев в материале, а также их критические размеры.

5) Проведен анализ потери устойчивости слоев в композитных пластинах и сосудах давления и оценены значения характерной толщины выщелкиваемого слоя, реализующей минимальное критическое напряжение, а также оценены сами значения критического напряжения при расслоении. Критическое напряжение – примерно 618 МПа; характерная толщина полоски при расслоении при воздействии минимального напряжения – примерно 1,6 мм.

6) Получены численные оценки условий потери устойчивости деформирования металлического лайнера при двухосном растяжении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе диссертационной работы были обоснованы новые методы рационального проектирования структуры армирования композитных сосудов давления и получены следующие результаты:

— обоснованы упрощенные, инженерные методы расчета и оптимизации структуры армирования волокнистых композитов, в частности, намоточных труб и сосудов давления;

— для расчетов на прочность композитных элементов конструкций предложено использовать критерии, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов, которые позволяют более правильно интерпретировать экспериментальные данные, чем традиционные тензорно-полиномиальные критерии, описывающие гладкие предельные поверхности в пространстве напряжений;

— разработана простая методика решения обратной задачи подбора равнонапряженной структуры армирования на основе нитяной модели в комбинации с послойным методом для пар слоёв, которая позволяет избежать громоздких вычислительных процедур, характерных для традиционных методов оптимального проектирования;

— рассмотрены примеры выбора рациональной структуры армирования цилиндрической части баллона, позволяющего повысить расчетное критическое давление газа в баллоне примерно на 40%;

— разработана компьютерная программа для выбора рациональной структуры армирования с учетом деградации свойств слоев в процессе докритического разрушения путем подбора структуры по нитяной аналогии с последующей проверкой послойным методом;

— проведен анализ внутренней потери устойчивости слоёв в композитных сосудах давления, и оценены критическое напряжение и характерная толщина выщелкиваемого слоя, определяющая наиболее опасную глубину расположения расслоений;

— новая комплексная методика рационального проектирования структуры армирования использована на ряде предприятий при создании расчетных программ. Соответствующие акты внедрения представлены в качестве Приложения к диссертации.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Расчет предельных напряжений и проектирование рациональных структур армирования проще и надежнее проводить на основе анализа симметричных пар слоев, а не с помощью традиционного послойного метода для монослоев.

2. Критерии прочности для пар слоев, полученные по модели ромба из нерастяжимых волокон, дают достаточно адекватную оценку критических давлений в намоточных, композитных баллонах.

3. С помощью использования инварианта «trase», который определяется для углепластиков отношением  $\frac{E_1}{0,88}$ , а для стеклопластиков  $\frac{E_1}{0,71}$ , можно с приемлемой точностью оценивать остальные упругие постоянные монослоя и пар слоёв только через измеренный в эксперименте модуль упругости вдоль волокон  $E_1$ .

4. Методология проектирования структуры армирования и оценки опасности дефектов типа расслоений должна включать анализ особых механизмов разрушения с помощью специальных энергетических критериев, включающих характеристики межслойной трещиностойкости композитов.

**Рекомендации для дальнейшей разработки темы.** Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем для расчета композитных сосудов давления и гибких шлангов (с учетом возможного изменения углов армирования при нагружении) с помощью разработанной методики проектирования и программы по автоматизированному расчету несущей способности композитного баллона для быстрого (инженерного) алгоритма оптимизации структуры армирования с учетом деградации свойств слоев в процессе докритического разрушения.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Geng P., Wang Q., Xing J. Analytical model for stress and deformation of multiple-winding-angle filament-wound composite pipes/vessels under multiple combined loads // *Appl. Math. Modelling*. 2021. Vol. 94. P. 576 -596.
2. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Third Edition. CRC Press. Taylor & Francis Group. 2012. 653 p.
3. Guo Z., Li Z., Cui J., Li Y., Luan Y. The effect of winding patterns on the mechanical behavior of filament-wound cylinder shells // *Multidiscipline Modeling Mater. Struct.* 2019. Vol. 16. No. 3. 508-518 pp.
4. Hoos K., Iarve E.V., Braginsky M., Zhou E., Mollenhauer D.H. Static strength prediction in laminated composites by using discrete damage modeling // *J. Compos. Mater.* 2017. Vol. 51. P. 1473-1492.
5. Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y. Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks // *Composites: Part B*. 2016. Vol. 85. P. 41-49.
6. Hwu C. *Anisotropic elastic plates*. Springer. 2010. 674 p.
7. ISO 11119-3:2020. Gas cylinders – design, construction and testing of refillable composite gas cylinders and tubes – Part 3: Fully wrapped fibre reinforced composite gas cylinders and tubes up to 450 l with non-load-sharing metallic or non-metallic liners or without liners. 2021. 58 p.
8. Jones R.M. *Mechanics of composite materials* / R. M. Jones. – 2nd ed. – Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. 519 p.
9. Kozlov M.V., Sheshenin S.V. Modeling the progressive failure of laminated composites // *Mech. Compos. Mater.* 2016. Vol. 51. P. 695-706.
10. Lapczyk I., Hurtado J.A. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials // *Composites: Part A*. 2007. Vol. 38. P. 2333-2341.
11. Heidari-Rarani M., Ahmadi-Jebeli M. Finite element modeling of failure in IV type composite pressure vessel using WCM plug-in in ABAQUS software // *Modares Mech. Eng.* 2018. Vol. 18. No. 4. P. 191-200.

12. Mahdy W., Kamel H. Design of optimum filament wound pressure vessel with integrated end domes // Int. Conf. Aerospace Sciences and Aviation Technology 16 (AEROSPACE SCIENCES). 2015.
13. Masakazu K., Iwasaki K., Reis P., Butter Bez C., De Medeiros R. Methodology for composite pressure vessel optimization based on CLT // 5th Brazilian Conference on Composite Materials (BCCM5). 2021.
14. Hwang T. K., Hong C. S., Kim C. G. Probabilistic deformation and strength prediction for a filament wound pressure vessel // Composites: Part B. 2003. Vol. 34. No. 5. P. 481-497.
15. Polilov A.N., Sklemina O.Y., Tatus N.A. Design method of reinforcement structure with symmetric pairs of layers by the example of composite gas tank. Mechanics of Composite Materials. 2021. Vol.57. No 6. P. 769-784. DOI: 10.1007/s11029-022-09998-x.
16. Polilov A.N., Sklemina O.Yu. Delamination of Composites and the Scale Effect of Glued Joint Strength // Polymer Science, Series D. 2023, Vol. 16, No 1. P. 104-110. DOI: 10.1134/s1995421223010240.
17. Polilov A.N., Sklemina O.Yu. Peculiarities of composite tubes structure design on the basis of thread model // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2021. No 6. 204-210 pp. DOI: 10.47367/0021-3497\_2021\_6\_204.
18. Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Y., Tatus N.A. Strength criteria of obliquely wound composite tubes under biaxial tension // Strength of Materials. 2021. Vol. 53. No 5. P. 765-774. DOI: 10.1007/s11223-021-00342-7.
19. Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Yu., Tatus N.A. Evaluation of the strength of a composite cylinder for compressed gas // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. Vol. 51. No 1. 46-54 pp. DOI: 10.3103/S1052618822010083.
20. Rand O., Rovenski V. Analytical methods in anisotropic elasticity with symbolic computational tools. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser. 2005. 451 p.

21. Rao S.S., Alazwari M.A. Failure modeling and analysis of composite laminates: Interval-based approaches // *J. Reinf. Plastics Compos.* 2020. Vol. 39. 817-836 pp.
22. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // *J. Appl. Mech.* 1980. Vol. 47. P. 329 -334.
23. Малмейстер А. К. Геометрия теорий прочности // *Механика полимеров.* 1966. № 4. С. 519 -534.
24. Sklemina O.Y., Polilov A.N. Method of structure reinforcement optimizing for composite gas tank // *AIP Conference Proceedings.* 2023. Vol. 2697. No 1. DOI: 10.1063/5.0136651.
25. Sklemina O.Yu., Tatus N.A., Polilov A.N. Analytical and finite element method of calculation of multishell gas tanks // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2020. Vol. 747. No 1. DOI:10.1088/1757-899X/747/1/012131.
26. Swift H.W. Plastic instability under plane stress // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1952. Vol. 1. No. 1. P. 1–18.
27. Talreja R. Damage analysis for structural integrity and durability of composite materials // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures.* – 2006. – Vol. 29, No. 7. P. 481-580.
28. Tsai S.W. A general theory of strength for anisotropic materials / S. W. Tsai, E. M. Wu // *Journal of Composite Materials.* 1971. No 5. 58–80 pp.
29. Tsai S.W., José Daniel D. Melo, Sangwook Sihn, Albertino Arteiro, Robert Rainsberger. *Composite Laminates. Theory and practice of analysis, design and automated layup* / Stanford University Composites Design Group. 2017. 373 p.
30. Zhu H., Guo Z. X., Zhu M., Cui J. J., He Q., Li YC. A progressive FE failure model for laminates under biaxial loading // *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56, No 2. P. 207-214.
31. Азаров А.В., Бабичев А.А., Васильев В.В., Салов В.А., Склезнев А.А. К проблеме герметичности композитных баллонов давления // *Композиты и Наноструктуры.* 2023. Т. 15. Вып. 1. С. 1-12.

32. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
33. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 448 с.
34. Амелина Е.В., Буров А.Е., Голушко С.К., Лепихин А.М., Москвичев В.В., Юрченко А.В. Расчетно-экспериментальная оценка прочности металлокомпозитного бака высокого давления // Вычислительные технологии. 2016. Т.21, №5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27249206&> (дата обращения: 20.05.2021).
35. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
36. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Л.: Машиностроение. 1972. 216 с.
37. Баженов С.Л., Берлин А.А., Кульков А.А., Ошмян В.Г. Полимерные композиционные материалы. Прочность и технология. Долгопрудный: «Интеллект». 2010. 352 с.
38. Бакулин В.Н. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. Том 1. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 241 с.
39. Баничук Н.Б., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
40. Басов К.А. Справочник пользователя ANSYS. М.: Компьютер пресс. 2002. 224 с.
41. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.Н. Полимерные композиционные материалы. М.: Издательство АСВ. 2013. 480 с.
42. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1984. № 2. С. 239-255.

43. Болотин В.В. Межслойное разрушение композитов при комбинированном нагружении // Механика композитных материалов. 1988. №3. С. 410-418.
44. Болотин В.В. Механика разрушения композитов. В справочнике «Композиционные материалы». Глава 5. М.: Машиностроение. 1990. С. 158-188.
45. Буров А.Е., Лепихин А.М. Численное моделирование несущей способности металлокомпозитного бака высокого давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. №5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27178560> (дата обращения: 25.06.2021).
46. Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Монография / К.: Наук. думка, 1978. 212 с.
47. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
48. Васильев В.В., Мороз Н.Г. Композитные баллоны давления: проектирование, расчет, изготовление и испытания / В. В. Васильев, Н. Г. Мороз. – М.: Машиностроение: Инновационное машиностроение, 2015. 372 с.
49. Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М. Композиционные материалы. Справочник. М.: Машиностроение. 1990. 512 с.
50. Викторов Е.Г. Устойчивость дефектов типа отслоений в конструкциях из композиционных материалов: Дис. ... канд. тех. наук. М., 1982. 125 с.
51. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: «Наука. Физматлит», 1997. 288 с.
52. Ву Э. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Серия «Композиционные материалы». Т. 2: Механика композиционных материалов (под ред. Дж. Сендецки). М.: Мир, 1978. 566 с.
53. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. 432 с.

54. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение. 1968. 191 с.
55. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
56. ГОСТ Р 57858-2017. Композиты полимерные. Метод определения объемной доли волокон и характера распределения волокон в полимерной матрице. М.: Стандартиформ, 2017. 12 с.
57. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитных материалов. М.: АНО «Физматлит», 2013. 272 с.
58. Грот В.В. Деформирование и разрушение поликристаллических сплавов в условиях сложного напряженного состояния. Дис. ... канд. тех. наук. Москва, 1982. 191 с.
59. Дильман В.А. Математическое моделирование критических состояний тонкостенных цилиндрических оболочек при внутреннем давлении и осевом сжатии // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2019. Т. 11. № 4. С. 39–46.
60. Дильман В.А., Эбель А.А. О влиянии аппроксимации диаграммы деформирования на точность критериев несущей способности тонкостенных оболочек // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. № 4. С. 638–639.
61. Евдокимов Ю.М., Сулименко В.А., Комраков П.В., Герасимова И.Н. Некоторые особенности метода испытаний на отслаивание // Клеи. Герметики. Технологии. Издательство «Наука и технологии». 2020. №2. С. 42-44.
62. Еремин Н.В., Москвичев Е.В., Пасечник К.А. Экспериментальные исследования ползучести однонаправленного композитного материала металлокомпозитного бака высокого давления // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и Технологии. 2021. Т. 14, № 6. С. 731-741.
63. Зуев Л.Б., Данилов В.И. Физические основы прочности материалов. Долгопрудный: Издательский дом ИНТЕЛЛЕКТ. 2013. 376 с.

64. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
65. Касьянов К.Г. Оценка несущей способности и ресурса конструктивных элементов из композиционных материалов, содержащих расслоения: дис. ... канд. техн. наук. Москва. 2010. 142 с.
66. Качанов Л.М. К вопросу о расслоении композитных материалов // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1976. Вып.3. №13. С. 77-81.
67. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 312 с.
68. Качанов Л.М. Разрушение композитных материалов путем расслоения // Механика полимеров. 1976. №5. С. 918-922.
69. Качанов Л.М. Расслоение стекловолокнистых труб при внешнем давлении. Механика полимеров. 1975. № 6. С. 1106-1108.
70. Кобелев А.Г., Шаронов М.А. Материаловедение. Технология композиционных материалов: учеб. М.: КНО РУС. 2015. 270 с.
71. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения: учеб. пособие / М.А. Комков, В.А. Тарасов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 413 с.
72. Кортен Х.Т. Разрушение армированных пластиков. М.: Химия. 1967. 165 с.
73. Кузькин А.Ю., Латышев Д.В., Петров М.Ю., Попов В.А. Механические свойства материалов при статическом нагружении трубчатых образцов в условиях плоского и объемного напряженных состояний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2014. № 2 (195). С. 162–173.
74. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Расчеты на прочность многослойных композитных конструкций. Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2012. 341 с.
75. Лепихин А.М., Москвичев В.В., Буров А.В., Анискович Е.В., Черняев А.П., Халиманович В.И. Экспериментальные исследования прочности и ресурса металлокомпозитных баков высокого давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85, № 1. С. 49-56.

76. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Издание второе. – М.: Издательство «Наука», 1977. 416 с.
77. Лысенко А. П., Паршина Л. В., Ярцев Б. А. Эффективные механические характеристики слоистого композита при различных условиях нагружения // Труды Крыловского государственного научного центра. 2022. Вып. 1 (399). С. 75-88.
78. Малинин Н.Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 2. С. 115–118.
79. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне. 1980. 572 с.
80. Мартиросян М.М. Упрочнение ориентированного стеклопластика при двухосном растяжении// Механика полимеров. 1976. № 6. С. 1025 – 1029.
81. Михальченков А.М., Феськов С.А., Козарез И.В., Тюрева А.А. Методика и результаты испытаний на адгезионную прочность дисперсных полимерных клеевых композитов // Клеи. Герметики. Технологии. Издательство «Наука и технологии». 2020. №8. С. 34-37.
82. Мороз Л.С. Механика и физика деформаций и разрушения материалов. Л.: Машиностроение, 1984. 224 с.
83. Москвичев Е.В., Еремин Н.В. Оценка механических свойств и толщины композитной оболочки металлокомпозитного бака высокого давления // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 12. С. 40-45.
84. Назаров В.В. Деформации цилиндрической трубы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 8. С. 56–58.
85. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. М.: Наука, 1986. 167 с.
86. Несущая способность и безопасность металлокомпозитных баков космических аппаратов / под ред. В.В. Москвичева, Н.А. Тестоедова. – Новосибирск: Наука, 2021. 440 с.

87. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: «Машиностроение», 1977. 144 с.
88. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
89. Парцевский В.Н. Расслоения в полимерных композитах. Обзор // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 5. С. 62-94.
90. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
91. Погарский М.В. Выбор формы профиля трубчатой конструкции из однонаправленного композита // Механика композитных материалов. 1991. № 1. С. 113-118.
92. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестн. ПНИПУ. 2012. № 2. С. 140-166.
93. Полилов А.Н. Схема расчёта прочности косоугольно армированных композитов при плоском напряженном состоянии // Механика композит. материалов. 1980. № 2. С. 221-226.
94. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов: учеб. пособие. – М: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 375 с.
95. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2015. 320 с.
96. Полилов А.Н., Склемина О.Ю. Энергетический критерий расслоения композитов и масштабный эффект прочности клеевых соединений // Клеи. Герметики, технологии. 2022. № 7. С. 21-28.
97. Полилов А.Н., Склемина О.Ю., Татусь Н.А. Послойный метод и критерии прочности для композитных сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев. Часть 2. Простые критерии прочности для двухосного растяжения косоугольно армированных труб // Машиностроение и инженерное образование. 2020. № 4(65). С. 14-25.

98. Полилов А.Н., Склемина О.Ю., Татусь Н.А. Послойный метод расчета и критерии прочности композитных сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев\*. Часть 1. Особенности послойного метода расчета композитной структуры из симметричных пар слоев // Машиностроение и инженерное образование. 2020. №3 (1). С. 21-30.
99. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018. 328 с.
100. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Энергетические критерии расслоения полимерных волокнистых композитов (ПКМ) // Вестник ПНИПУ. «Механика». 2012. № 3. С. 176 - 203.
101. Пэйгано Н. Межслойные эффекты в композитных материалах. М.: Мир. 1993. 346 с.
102. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 80 с.
103. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1988. –712 с.
104. Работнов Ю.Н. О прочности композитов, армированных в двух направлениях// Механика полимеров. 1978. № 5. С. 832 – 834.
105. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
106. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. 384 с.
107. Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н., Соколова Т.В., Карпейкин И.С., Вайнберг М.В. Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе// Механика полимеров. 1978. № 2. С. 219 - 225.
108. Работнов Ю.Н., Полилов А.Н. О разрушении композитных труб по форме китайского фонарика// Механика композитных материалов. 1983. № 3. С. 548 - 550.

109. Работнов Ю.Н., Соколов Б.П. Приспособление для испытания материалов при сложном напряженном состоянии // Заводская лаборатория. 1960. Т. XXVI. № 3. С. 374–375.

110. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б.Д. Аннин [и др.]. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 1993. 253 с.

111. Сарбаев Б.С., Криволицкая И.И. Способ расчета предельных напряжений для многослойных волокнистых композитов при плоском напряженном состоянии // Конструкции из композиционных материалов. 2015. №2 (138). С. 3-9.

112. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность (Руководство и справочное пособие). М.: Машиностроение. 1975. 488 с.

113. Склемина О.Ю., Полилов А.Н., Кутенёв Н.Е. Метод оптимизации структуры армирования композитного сосуда для сжатого газа // Сборник трудов конференции: XXXIII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2021). Москва. 2021. С. 168-176.

114. Склемина О.Ю., Татусь Н.А., Полилов А.Н. Аналитический и конечно-элементный анализ композитных многополостных баллонов для сжатого газа // Материалы Юбилейной LXX открытой международной студенческой научной конференции Московского Политех. Москва. 2020. С.700-704.

115. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 408 с.

116. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2014. 264 с.

117. Староверов О.А., Струнгарь Е.М., Третьяков М.П., Третьякова Т.В. Особенности экспериментальных исследований трубчатых образцов

композиционных материалов в условиях сложного напряженного состояния // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2017. № 51. С. 104–114.

118. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. 248 с.

119. Тарнопольский Ю.М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов // Механика композитных материалов. 1979. №2. С. 331-337.

120. Томленов А.Д. Механика процессов обработки металлов давлением. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1963. 236 с.

121. Тормахов Н.Н. Методика испытания трубчатых образцов при повышенной температуре // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 4. С. 67–68.

122. Тормахов Н.Н. Напряжения в экспериментах с нагружением трубчатых образцов внутренним давлением // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т. 86. № 12. С. 64–68.

123. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов: Учеб. пособие: для вузов. – 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Физматлит, 1996. 368 с.

124. Черепанов Г.П. Механика разрушения. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 872 с.

125. Чермошенцева А.С. Разработка методики повышения прочности тонкостенных элементов конструкций из композиционных материалов с дефектами типа расслоения: Дис. ... канд. тех. наук. М., 2018. 169 с.

126. Чермошенцева А.С., Булдакова Е.С. Испытание образцов труб из слоистых композиционных материалов с дефектами // XVIII Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии»: Тез. докл. Томск: Изд-во НИ ТПУ, 2012. Т. 1. С. 331-332.

127. Чермошенцева А.С., Булдакова Е.С. Моделирование элементов конструкций из слоистых композиционных материалов при наличии дефектов в

системе ANSYS // XV Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии»: Тез. докл. НТК. Томск: Изд-во НИ ТПУ, 2009. Т. 1. С. 346-348.

128. Чернякин С.А., Скворцов Ю.В. Анализ роста расслоений в композиционных конструкциях // Вестник СибГАУ. 2014. №4(56). С. 249-255.

129. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. Ansys для инженеров: Справочное пособие. М.: Машиностроение-1, 2004. 512 с.

130. Яковлев Н.О., Гуляев А.И., Лашов О.А. Трещиностойкость слоистых полимерных композиционных материалов // Труды ВИАМ. 2016. № 4(40). С. 12.

131. Полилов А.Н., Скворцов А.А., Склемина О.Ю. Критерий возникновения неустойчивости деформирования тонкостенных пластин и оболочек при двухосном растяжении // Машиностроение и инженерное образование. 2023. № 1-2. С. 3-18. DOI 10.52261/18151051\_2023\_1-2\_3.

132. Склемина О.Ю., Полилов А.Н. Рациональное проектирование структуры армирования композитных сосудов высокого давления // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов. 2023. С. 991-994. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id23-629.

133. Полилов А.Н., Склемина О.Ю. Модели расслоения композитных пластин и сосудов давления с потерей устойчивости слоёв // Машиностроение и инженерное образование. 2023. № 3. С. 9-22. DOI: 10.52261/18151051\_2023\_3\_9.

134. Полилов А.Н., Склемина О.Ю. Энергетический критерий адгезионного разрушения композитной трубы под действием внешнего давления // Клеи. Герметики. Технологии. 2023. № 11. С. 41-48. DOI:10.31044/1813-7008-2023-11-41-48.

135. Polilov A.N., Sklemina O. Yu. Stability conditions of plastic deformation of thin-walled plates and shells under complex stress state // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 458. DOI: 10.1051/e3sconf/202345807010

136. Власов Д.Д., Склемина О.Ю., Поляков А.Э. Об упрощенных методах определения упругих постоянных слоистых полимерных композитов // Пластические массы. 2023. № 11-12. С.17-20.

137. Eckold G.C., Leadbetter D., Soden P.D., Griggs P.R. Lamination theory in the prediction of failure envelopes for filament wound materials subjected to biaxial loading//Composites. 1978 Vol. 9 No. 4 P. 243-246.

138. Soden P.D., Leadbetter D., Griggs P.R., Eckold G.C. The strength of a filament wound composites under biaxial loading// Composites. 1978 Vol. 9 No. 4 P. 247-250.

139. Васильев В.В., Салов В.А. Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жесткой внешней средой // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 98-108.

140. Васильев В.В., Салов В.А., Склезнев А.А. Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки под действием наружного давления, создаваемого намоткой гибких нитей // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 6. С. 63-71.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор АО «ЦПР»

д.т.н. доцент А.А. Склезнев



### ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ ВНЕДРЕНИЯ № 90

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационного исследования Волковой О.Ю. на тему: «Рациональное проектирование структуры армирования композитных сосудов давления» по специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела», **представленные:**

- разработанными инженерными методами выбора рациональной структуры армирования намоточных труб и сосудов давления из полимерных композитных материалов;
- новыми критериями прочности, учитывающими разные механизмы разрушения и позволяющими строить наглядные предельные поверхности в пространстве напряжений для каждой пары армирующих слоев, представляют практический интерес и позволяют оптимизировать структуру армирования намоточных труб и сосудов давления.

Результаты О.Ю. Волковой (Склёминой) использованы на научно-производственном предприятии АО «Центр перспективных разработок» при создании методики расчёта конструкций из волокнистых композитов, обеспечивающей проектирование намоточных сосудов давления (799.ТЗ 302-3692-15), соответствующих Российским и международным стандартам качества и обладающих высоким весовым совершенством.

Главный инженер

/А.И. Андронов/

В диссертационный совет 24.2.410.03

г. Тверь, наб. А. Никитина, д.22

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Я, нижеподписавшийся, представитель «Центра НТИ «Цифровое материаловедение: новые материалы и вещества» МГТУ им. Н.Э. Баумана в лице Заведующего лабораторией «Сложные композиты» к.т.н. Орлова М.А., составил настоящий акт о том, что результаты диссертационного исследования О.Ю. Волковой на тему: «Рациональное проектирование структуры армирования композитных сосудов давления» по специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела», представляют существенный научно-прикладной интерес и были внедрены в разработанную методику расчета композитных сосудов давления и гибких шлангов (с учетом возможного изменения углов армирования при нагружении).

Заведующий лабораторией  
«Сложные композиты» Центра НТИ  
«Цифровое материаловедение: новые  
материалы и вещества» МГТУ им. Н.Э. Баумана

  
Орлов М.А./

Подпись М.А. Орлова, заверяю

Сотрудник отдела кадров МГТУ им. Н.Э. Баумана



  
СПЕЦИАЛИСТ ПО ПЕРСОНАЛУ  
ОТДЕЛА КАДРОВОГО  
АДМИНИСТРИРОВАНИЯ  
Ходыкина Л.Д.

В Диссертационный Совет 24.2.410.03

г. Тверь, наб. А. Никитина, д.22

### СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Настоящим подтверждаю, что результаты диссертационной работы О.Ю. Волковой на тему: «Рациональное проектирование структуры армирования композитных сосудов давления» были использованы в Лаборатории Центра экспериментальной механики ПНИПУ при анализе экспериментальных данных в рамках выполнении НИР «Накопление повреждений и разрушение полимерных композитов в условиях предварительного двухосного циклического нагружения» в области разработки методики испытаний композитных трубчатых образцов при сложном напряженном состоянии. Разработанные О.Ю. Волковой (Склёминой) простые критерии прочности, учитывающие различные механизмы разрушения композитов, и предложенные варианты методов испытаний при пропорциональном нагружении позволили провести анализ процессов деформирования и разрушения композитных трубчатых образцов, используемых при реализации проектов ПНИПУ.

Заведующий кафедрой ЭМКМ ПНИПУ,  
профессор, д.ф.-м.н.

  
В.Э. Вильдеман

Подпись В.Э. Вильдемана заверяю

Ученый секретарь ПНИПУ Макаревич В.И.  
М.П.

