

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Московский Политех)

На правах рукописи



Ларионова Ольга Евгеньевна

**Вязкопластическое деформирование диска из жаропрочного никелевого
сплава в процессе изотермической раскатки**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Бондарь В.С.

Москва – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РАСКАТКИ ДИСКА ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО НИКЕЛЕВОГО СПЛАВА	12
2 КРАТКИЙ ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИХ СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ	17
2.1 Меры деформации и напряжения.....	17
2.2 Обзор теорий пластичности.....	18
2.3 Обзор моделей, основанных на теории течения при комбинированном упрочнении	21
3 РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ.....	32
3.1 Проведение испытаний образцов, имитирующих условия нагружения материала в процессе изотермической раскатки	32
3.2 Основные уравнения модели вязкопластического деформирования.....	43
3.3 Уравнения модели вязкопластичности в случае одноосного нагружения	49
3.4 Метод идентификации материальных параметров	52
3.5 Материальные параметры материалов	61
3.6 Верификация модели вязкопластичности	62
4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ РАСЧЕТОВ РАСКАТКИ ДИСКОВ	72
4.1 Метод внедрения модели деформирования материала в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов	72
4.2 Линеаризация уравнений модели поведения материала	75
4.3 Вычисление компонент матрицы Якоби	79

4.4	Внедрение модели поведения материала в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов	82
5	МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА РАСКАТКИ ДИСКА.....	85
5.1	Описание процесса раскатки	85
5.2	Материальные параметры сплава ЭП741НП	87
5.3	Разработка конечно-элементной модели изотермической раскатки заготовки диска	88
5.4	Результаты расчета процесса изотермической раскатки диска	96
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	111
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	113
	ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное).....	130
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное)	131
	ПРИЛОЖЕНИЕ В. Код пользовательской подпрограммы «UMAT», позволяющий использовать модель вязкопластичности при проведении расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus.	132
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Код программы для расчета напряжений при одноосном жестком нагружении.	137

ВВЕДЕНИЕ

При проведении расчетов напряженно-деформированного состояния конструкций из сталей и сплавов необходимо использование моделей деформирования материалов, которые бы учитывали эффекты, возникающие в материале при реальных процессах нагружения. Конструкционные сплавы и стали широко используются в промышленности при изготовлении деталей сложной геометрической формы. К изделиям выдвигаются высокие требования по прочности и долговечности.

Широкий класс производственных процессов, к которым относится раскатка, направлен на получение деталей из заготовок при постоянной температуре. Сложная форма будущих изделий на этапе производства требует вариабельности при моделировании этих процессов. В моделях деформирования материалов для производственных процессов должна быть возможность рассчитывать большие пластические деформации в условиях сложного циклического нагружения при постоянной высокой температуре.

Возможность корректировать и адаптировать процесс раскатки под конкретное изделие достигается путем изменения скорости изотермической деформации. Раскатка диска осуществляется вращением роликов и одновременным смещением в радиальном направлении. Такое движение роликов делает невозможным постановку задачи как осесимметричную или плоскую. Расчет раскатки диска должен учитывать большой разброс деформаций в заготовке. Большие пластические деформации локализованы в местах приложения наибольших нагрузок. В то же время процесс раскатки носит сложный циклический характер [33, 86, 87, 112, 116]. Таким образом, для моделирования процесса раскатки заготовки диска из жаропрочного сплава на основе никеля необходимо использовать модель деформирования материала, позволяющую учитывать эти особенности и верифицированную по результатам испытаний. Для расчета сложных процессов нагружения, таких как процесс раскатки заготовки диска, используются программные комплексы на основе метода конечных элементов, в которые внедряется модель деформирования материала.

Экспериментальному исследованию процессов поведения материалов в условиях простого и сложного циклического изотермического деформирования посвящены работы И. Баушингера [142, 143], Л. Берстоу [140], Г. Мазинга [171, 177], Н.Н. Давиденкова [55], Ю.С. Данилова [122, 123], Д.М. Васильева [37], Г. Закса и Х. Шойи [178], С.И. Ратнера и А.М. Жукова [63, 64], К.Я. Шульца [134], В.С. Ленского [95-96], Н.И. Марина [99, 100], Л.Ф. Коффина [159-162], И.М. Ройтмана и Я.Б. Фридмана [124], Р.М. Шнейдеровича [129-133], А.С. Вавакина [34-36], Д. Соси [125], Р.А. Васина [45-47], В.Г. Зубчанинова, Н.Л. Охлопкова и В.И. Гульяева [67, 69-73, 115], Г. Канга [163-167] и др.

Одним из вариантов теории, позволяющей моделировать процессы деформирования материала диска в условиях изотермической раскатки, является теория упругопластических процессов, основанная на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [75, 76]. Другим вариантом является теория пластического течения и идея микронапряжений В.В. Новожилова [113, 114].

А.А. Ильюшину принадлежит теория упругопластических процессов, являющаяся последовательным изложением определяющих соотношений. Вводятся понятия направляющего тензора, простого и сложного нагружения. Процессы нагружения представляются в пятимерном векторном пространстве напряжений и деформаций и формулируется постулат изотропии. Пластическая и упругая деформации рассматриваются как неразрывное целое.

Модели теории процессов рассматривались В.Г. Зубчаниновым [65-67, 68, 72, 73], Р.А. Васиным [38-44], В.С. Бондарем [29], А.А. Маркиным и М.Ю. Соколовой [101], В.И. Малым [98], В.П. Дегтяревым [60], А.М. Жуковым [63, 64], И.Н. Молодцовым [108-111], В.С. Ленским [92-94, 97], В.А. Пелешко [117-120], Дао Зуй Биком [56-59] и др.

Теории течения отличаются от общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина и разработанных на её основе теорий процессов разделением деформаций на упругую и пластическую составляющие. Изменение упругих деформаций зависит от изменений напряжений, а в свою очередь приращения пластической деформации являются функционалами процесса. Области упругого

и пластического деформирования описываются поверхностью нагружения в пространстве напряжений. Поверхность нагружения может расширяться или сужаться в процессе нагружения в зависимости от характера нагружения. Достоинством такого класса теорий в текущий момент времени является возможность легко встраивать их в расчетные программные комплексы. К тому же многие варианты теории пластичности имеют верификацию [3, 10, 25, 48, 49, 89, 148, 149] на обширном спектре конструкционных сплавов и экспериментальных исследований. В рамках данных теорий есть возможность учитывать эффекты упрочнения и разупрочнения и исследовать большие пластические деформации при изотермическом режиме нагружения.

Развитие вариантов теории течения рассматривается в работах А.Ю. Ишлинского [77, 78], В. Прагера [176], В.В. Новожилова и Ю.И. Кадашевича [80-81, 114], И.А. Биргера [4, 5], В.С. Бондаря [6-9, 23-30, 144, 147], В.С. Бондаря и Д.Р. Абашева [2, 10-22, 136, 137, 145, 146], Ж. Леметра и Ж.-Л. Шабоша [151-157, 168-170], Ю.Г. Коротких, Л.А. Игумнова и И.А. Волкова [48-50, 89, 90, 106], И.В. Демьянушко и Ю.М. Темиса [61, 62, 126, 127], С.С. Гаврюшина [51, 121, 141], Ж. Бакхауза [139], З. Мруза [172], Б.Е. Мельникова [102-105], А.А. Мовчана [107], Р.Д. Армстронга и С.О. Фредерика [138], Н.Охно и Д.-Д. Ванга [173-175], Е. Танака [179] и др.

Теория течения послужила основой нескольких моделей. Одной из них является теория течения при изотропном упрочнении. Поверхность нагружения в теории течения при изотропном упрочнении может только изотропно расширяться при сохранении формы и положения [88]. В теории течения при комбинированном упрочнении поверхность нагружения может дополнительно смещаться [77, 78, 82-85, 176]. Такие особенности позволяют учитывать эффекты, возникающие при циклическом деформировании. Наиболее распространены теории течения при комбинированном упрочнении, в которых кинематическое упрочнение происходит по нелинейному закону [79, 80, 138]. Развитию моделей, основанных на теории течения при комбинированном упрочнении, посвящены работы В.С. Бондаря [6-9], Ю.Г. Коротких [90], Ж.-Л. Шабоша [151-157].

Одним из вариантов теории течения, прошедшей верификацию на ряде экспериментальных исследований при высоких температурах в условиях длительного циклического нагружения, является модель В.С. Бондаря [6, 12, 28]. Модель позволяет описывать неупругое поведение материала и накопление повреждений при термовязкопластическом нагружении. Данная теория относится к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Неупругие деформации зависят от истории нагружения, а поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения [5, 28, 81-83].

Представленная в работах В.С. Бондаря теория неупругости имеет множество вариантов, предназначенных для проведения моделирования кинетики напряженно-деформированного состояния и оценки прочности материала в различных условиях, из которых необходимо выбрать наиболее подходящий для моделирования процесса изотермической раскатки диска и при необходимости уточнить уравнения теории. Кроме того, применение теории неупругости при проведении моделирования процесса раскатки требует интеграцию модели деформирования материала в один из современных расчетных комплексов, основанных на методе конечных элементов.

Актуальность работы обусловлена тем, что процесс изотермической раскатки имеет ряд преимуществ и широко используется при изготовлении дисков газотурбинных двигателей. Расчет этого процесса позволит достоверно определять параметры материала в полученной после раскатки заготовке диска. При этом расчет процесса раскатки требует учета больших пластических деформаций, особенностей сложного знакопеременного деформирования и влияния изменения скорости деформации материала диска в условиях высокой температуры.

Степень разработанности темы исследования. В настоящее время для расчета процесса раскатки используются достаточно простые модели деформирования материала, не охватывающие весь спектр эффектов, возникающих при формообразовании различных деталей. Не всегда проводится верификация расчета на реальных результатах формообразования. Ошибки,

возникающие при расчете процесса раскатки, могут привести к неточности в понимании напряженно-деформированного состояния изготавливаемой детали.

Цель работы. Разработка модели деформирования материала, учитывающей влияние сложного знакопеременного нагружения и скорости деформации. Внедрение разработанной модели вязкопластичности в конечно-элементный расчетный комплекс. Расчет напряженно-деформированного состояния диска из жаропрочного никелевого сплава в процессе изотермической раскатки.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

- 1) Разработка модели, основанной на теории течения при комбинированном упрочнении, используемой для проведения расчетов изотермических процессов сложного знакопеременного нагружения с учетом влияния скорости деформации;
- 2) Проведение экспериментов по одноосному растяжению образцов при высоких температурах с различной скоростью деформации;
- 3) Разработка метода идентификации материальных параметров по результатам экспериментов;
- 4) Разработка алгоритма и программы для проведения расчетов напряженно-деформированного состояния при одноосном нагружении;
- 5) Верификация модели вязкопластичности на экспериментах по одноосному растяжению и сжатию;
- 6) Внедрение разработанной модели вязкопластичности в расчетный комплекс, основанный на методе конечных элементов;
- 7) Расчет процесса раскатки диска из жаропрочного никелевого сплава. Сравнение геометрии диска, полученной по результатам расчета, с геометрией экспериментально раскатанного диска.

Научная новизна работы. Для моделирования сложного знакопеременного деформирования материала разработана новая модель вязкопластичности, учитывающая влияние скорости деформации. Проведена верификация модели на экспериментальных исследованиях жаропрочных никелевых сплавов и

нержавеющей стали при различных скоростях деформации в условиях высоких температур. Модель внедрена в конечно-элементный расчетный комплекс, и впервые проведен расчет процесса изотермической раскатки диска с учетом сложного знакопеременного характера нагружения и переменной скорости деформации.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты имеют теоретическую ценность и практическую значимость при моделировании процесса изотермической раскатки в условиях повышенных температур, больших пластических деформаций и нелокализованных участков деформирования. Модель деформирования внедрена в программный комплекс на основе метода конечных элементов, что позволяет проводить моделирование кинетики напряженно-деформированного состояния таких изделий.

Методология и методы исследования. Моделирование процесса раскатки диска из жаропрочного никелевого сплава проведено с использованием расчетного комплекса, основанного на методе конечных элементов, модель материала задана с помощью пользовательской подпрограммы. Расчет диаграмм растяжения и сжатия образцов из жаропрочной стали при различных скоростях деформации проведен с использованием пользовательской расчетной программы. Экспериментальные исследования проведены на универсальной испытательной машине LFMZ-100kN.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) Модель изотермической вязкопластичности, учитывающая особенности сложного знакопеременного нагружения и влияние скорости деформации на процесс деформирования;
- 2) Метод идентификации материальных функций для разработанной модели вязкопластичности, материальные функции сплавов ВВ751П, ЭП741НП и 12Х18Н10Т;
- 3) Программа расчета напряженно-деформированного состояния при одноосном растяжении, сжатии;

- 4) Результаты экспериментов по растяжению образцов сплава 12Х18Н10Т при различных скоростях деформации в условиях высоких температур;
- 5) Верификация модели вязкопластичности на экспериментах по растяжению и сжатию образцов из сплавов ВВ751П, ЭП741НП и 12Х18Н10Т при разных скоростях деформации и разных температурах;
- 6) Методика внедрения модели вязкопластичности в расчетный комплекс, основанный на методе конечных элементов;
- 7) Результаты расчета процесса раскатки диска из жаропрочного никелевого сплава ЭП741НП.

Достоверность результатов подтверждается сопоставлением расчетов на основе разработанной модели вязкопластичности и экспериментов по одноосному растяжению и сжатию. Сравнением геометрических характеристик диска из жаропрочного никелевого сплава ЭП741НП, полученного путем экспериментальной изотермической раскатки, с геометрическими характеристиками, полученными по результатам расчета с использованием разработанной модели.

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на:

- 1) XXXII Всероссийской школе-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2023 г.);
- 2) XXXIII Всероссийской школе-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2024 г.);
- 3) XLIX Академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (Москва, 2025 г.);
- 4) 67-й Всероссийской научной конференция МФТИ (Москва, 2025 г.);
- 5) Семинаре отдела "Динамика и прочность авиационных двигателей" ФГУП "ЦИАМ им. П.И. Баранова" (Москва, 2025 г.);

6) Научно-техническом совете отдела "Прочность, живучесть и безопасность машин" ФГБУН "Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН" (Москва, 2025 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в восьми [2, 14, 15, 16, 31, 32, 91, 137] научных работах, четыре из которых [2, 32, 91, 137] в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук (Перечень ВАК). Также три [2, 32, 137] из научных работ в изданиях, индексируемых в базе Scopus, одна [137] из которых в издании, индексируемом в базе Web of Science.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка источников и четырех приложений. Общий объем работы составляет 141 страницу, в том числе 112 страниц основного текста, содержит 101 рисунок, 8 таблиц и 4 приложения. Список использованных источников включает в себя 179 наименований на 17 страницах. Объем приложений составляет 12 страниц.

1 ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РАСКАТКИ ДИСКА ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО НИКЕЛЕВОГО СПЛАВА

Изотермическая раскатка дисков относится к однопереходным процессам пластического формообразования. Ролики смещаются вдоль радиуса заготовки диска, которая вращается, как правило, за один переход. Диск вращается вокруг своей оси, и на него воздействуют приводные консольные ролики, за счет этого заготовка диска приобретает заданную форму. Приводные консольные ролики могут перемещаться как в осевом направлении относительно диска, так и в радиальном, таким образом задавая в каждый момент времени необходимую форму. Заготовка диска при этом вращается вокруг собственной оси.

На рисунке 1.1 представлена схема взаимного расположения роликов и диска в процессе изотермической раскатки. Ролики расположены под наклоном к срединной плоскости диска [128]. В пространстве рабочей печи во время процесса раскатки находятся все инструменты, пиноли и ролики, а также диск.

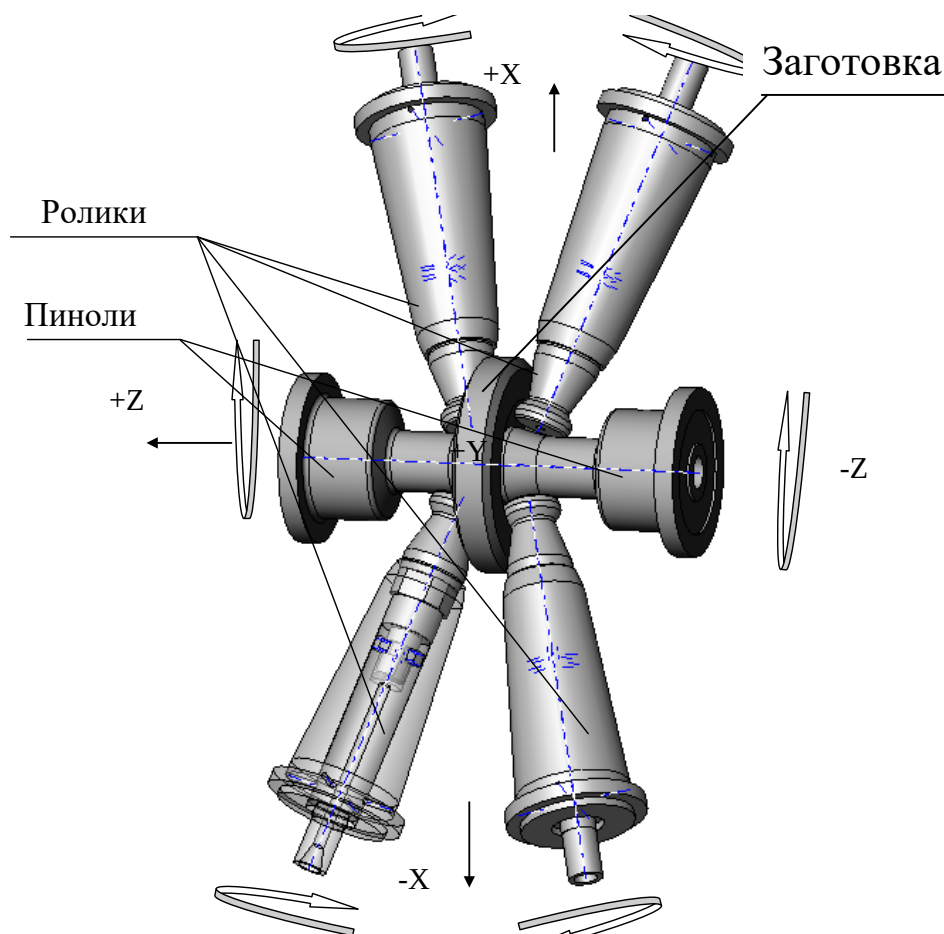


Рисунок 1.1 – Схема взаимного расположения диска, пинолей и роликов

Заготовка диска разогревается до температуры деформации в пространстве печи, пиноли зажимают заготовку и придают ей вращательное движение. В процессе раскатки используется одна или две пары вращающихся роликов (рисунок 1.2). Перемещение роликов в осевом и радиальном направлениях относительно заготовки диска дает возможность изменять форму диска. Изменение наклона роликов относительно срединной плоскости диска также дает возможность деформировать заготовку. Изменение формы заготовки диска происходит за счет уменьшения толщины полотна и увеличения общего диаметра диска. Благодаря различному положению роликов в процессе раскатки размер получаемого диска варьируется от 500 до 800 мм, толщина полотна может быть от 8 до 30 мм, а диаметр изменяется не существенно, от 80 до 100 мм.

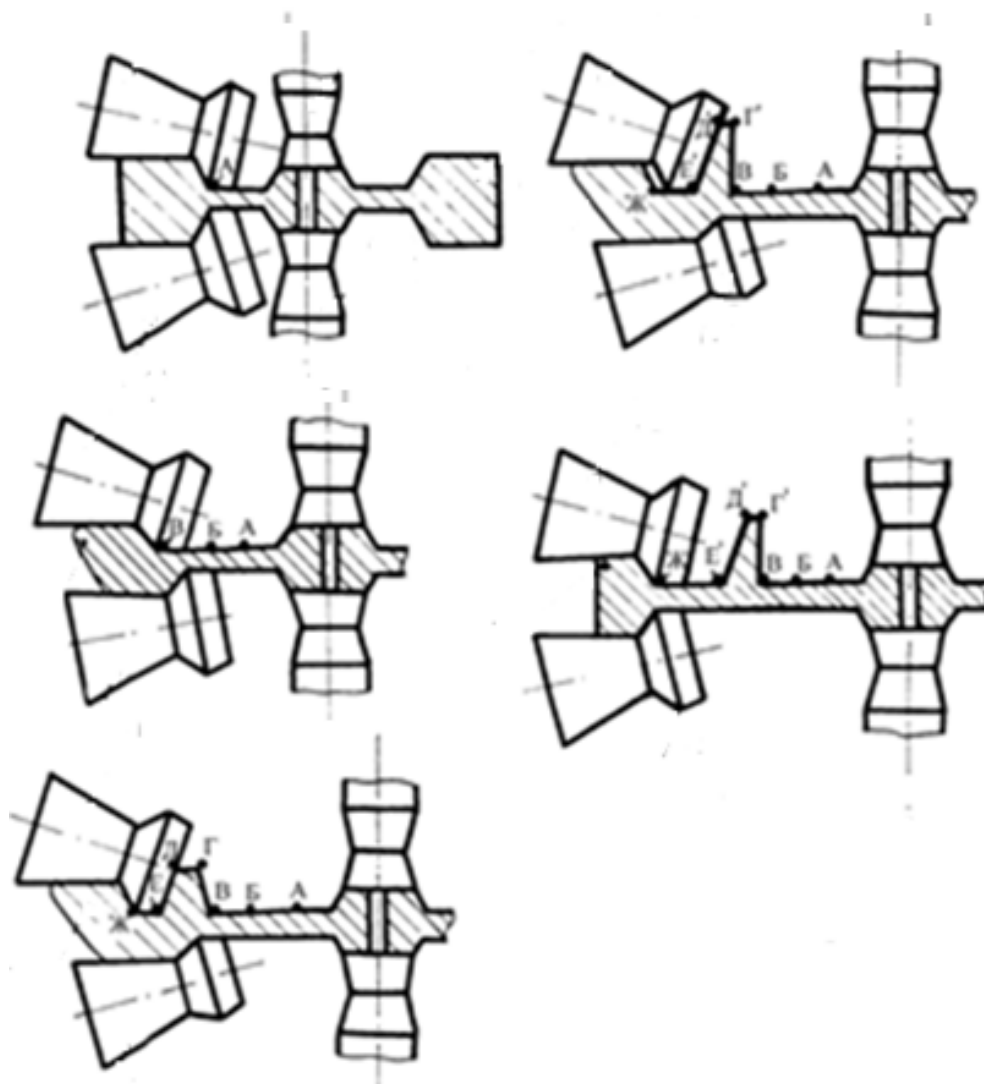


Рисунок 1.2 – Формы заготовок диска после раскатки

Изотермическая раскатка дисков начинается с предварительного нагрева заготовки диска во вспомогательных печах до температуры деформирования. Манипулятор устанавливает заготовку в печи на линии раскатки между пинолями, заготовке придается вращательное движение, а затем ролики соприкасаются с заготовкой, начиная процесс формообразования. Тиристорный регулятор температуры обеспечивает равномерное полное прогревание и держит температуру по всему объему заготовки. На рисунке 1.3 показано перемещение манипулятором заготовки из вспомогательных печей в нагретую заранее печь для раскатки.

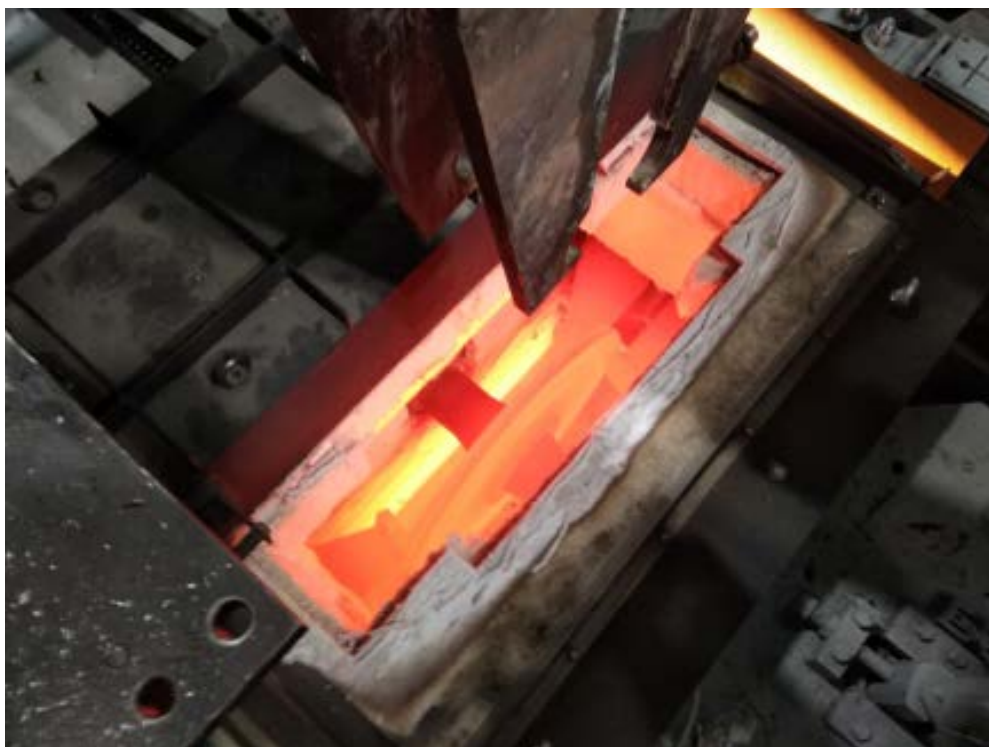


Рисунок 1.3 – Загрузка нагретой заготовки в рабочую печь

Время прогрева заготовки перед раскаткой составляет от 10 до 20 минут. Раскатные ролики также предварительно нагреваются и вводятся в пространство печи. Начальная позиция роликов задаётся с учетом температурного расширения вплотную к заготовке, ролики могут перемещаться в продольном и поперечном направлениях одновременно или каждый самостоятельно для более точного позиционирования. Также учитывается изменение положения заготовки из-за перемещений шпинделей при опрессовке. Опрессовка заготовки пинолями происходит после установления равномерной температуры в пространстве печи и

прогрева инструмента и заготовки, после чего ролики подводятся в исходную позицию. На рисунке 1.4 представлено положение роликов и заготовки диска в момент касания роликами заготовки.

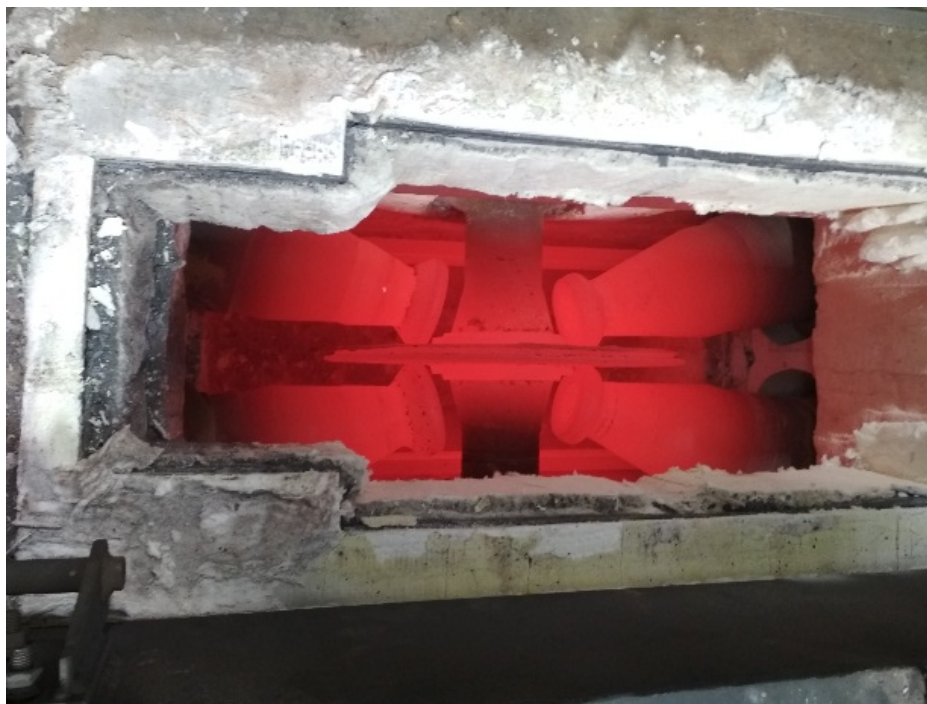


Рисунок 1.4 – Процесс изотермической раскатки

Процесс раскатки заканчивается тем, что ролики отодвигаются от диска и выводятся из пространства печи. Шпиндели, зажимающие диск, разжимаются. Оправка вместе с заготовкой с помощью манипулятора перемещается в печь для окончательной термической обработки, рисунок 1.5.



Рисунок 1.5 – Транспортировка раскатанной заготовки для термообработки

В процессе раскатки заготовки диска в материале возникает сложное напряженно-деформированное состояние. Особенностью процесса раскатки можно выделить то, что этот процесс происходит при высоких температурах. Появляется необходимость рассматривать модели, описывающие поведение материала при больших пластических деформациях и знакопеременных нагрузках, с возможностью внедрить эту модель в расчетный комплекс, основанный на методе конечных элементов.

2 КРАТКИЙ ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИХ СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

2.1 Меры деформации и напряжения

В большинстве случаев механические характеристики материала определяются на основе результатов экспериментов по растяжению [52, 54] либо сжатию [53] одноосных образцов с круглым или прямоугольным сечением. По результатам испытаний определяют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , а также фиксируют диаграмму, связывающую силу F , прикладываемую к образцу с удлинением (или укорочением) его рабочей части Δl . По последней зависимости строится функция номинального или условного напряжения $\sigma^{\text{ном}} = \frac{F}{A_0}$ от линейной деформации $\varepsilon_{\text{инж}} = \frac{\Delta l}{l_0}$. В формулах A_0 – площадь поперечного сечения недеформированного образца, l_0 – начальная длина рабочей части. В литературе линейную деформацию часто называют инженерной, номинальной или деформацией Коши. Недостаток удлинения как меры пластичности материала состоит в том, что оно дает условную, а не истинную деформацию, т.е., удлинение зависит и от длины образца.

Для описания формоизменения элемента сплошной среды могут использоваться различные меры деформации. Помимо линейной деформации Коши, в литературе можно встретить логарифмическую меру деформации Генки, деформацию Грина-Лагранжа, Альманси, Кербера-Свейнгера, Куна. При этом форма диаграммы деформирования будет во многом определяться мерой деформации.

Из перечисленных выше мер при расчете процессов пластического деформирования с сильным формоизменением удобно пользоваться логарифмической мерой деформации Генки:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(\lambda), \quad (2.1.1)$$

где λ – кратность удлинения, $\lambda = l/l_0$, l – длина рабочей части.

Тогда, в случае ступенчатого нагружения, суммарную деформацию можно представить в виде суммы деформаций на каждом этапе

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{l_i}{l_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^n (\ln(l_i) - \ln(l_{i-1})) = \ln\left(\frac{l_n}{l_0}\right) = \varepsilon_n. \quad (2.1.2)$$

Схожий подход следует использовать при вычислении напряжений. В большинстве существующих в настоящее время методик расчета на прочность для введения напряжений используется недеформированная площадь. Истинное напряжение можно определить как частное действующей силы и текущей площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.1.3)$$

где A – площадь поперечного сечения деформированного образца.

Используя условие несжимаемости, можно определить связь между инженерным и истинным напряжением, определяемым по результатам одноосных испытаний

$$V = A(l_0 + \Delta l) = A_0 l_0, \quad (2.1.4)$$

$$A_0 = A \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = A \lambda, \quad (2.1.5)$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \lambda = \sigma_{\text{инж}} \lambda. \quad (2.1.6)$$

2.2 Обзор теорий пластичности

Существует два основных подхода к моделированию процессов упругопластического деформирования. К первому относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [75, 76]. Ко второму относятся варианты теории пластического течения при различных комбинациях изотропного и анизотропного (кинематического) упрочнений. При изотропном упрочнении происходит изменение размера поверхности нагружения, при кинематическом – смещение центра поверхности [81]. В практических расчетах конструкций в настоящее время нашли широкое применение именно теории течения при

комбинированном упрочнении, они внедрены в различные программные комплексы. Модели пластичности, основанные на теории течения, позволяют описывать ряд особенностей процесса упругопластического деформирования, в том числе с разгрузкой и повторным нагружением. Ряд моделей верифицирован по результатам экспериментов, в том числе по сложному нагружению [9].

Модель идеальной пластичности характерна тем, что при расчете по данной модели материал не обладает упрочнением, т.е. он может деформироваться неограниченно (деформации могут быть сколь угодно велики, если не принимать во внимание геометрические ограничения).

Для варианта теории течения с изотропным упрочнением поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается, сохраняя свою форму (рисунок 2.2.1). Модель с одним изотропным упрочнением не позволяет описать эффект Баушингера, который может проявиться при разгрузке материала при больших значениях пластической деформации.

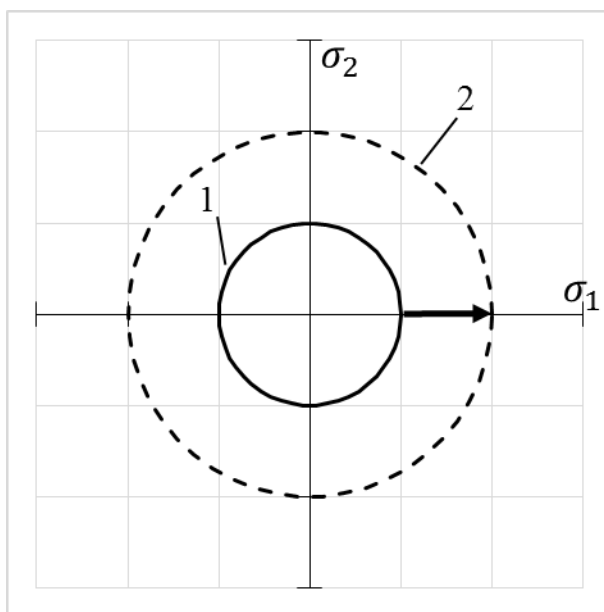


Рисунок 2.2.1 - Изотропное упрочнение (1 – исходная поверхность текучести, 2 – итоговая поверхность текучести)

Вариант теории течения с линейным анизотропным упрочнением позволяет моделировать эффект Баушингера, однако диаграмма деформирования в таком случае будет линейной, а материал всегда будет упрочняться, что не соответствует

действительности. Для данного варианта теории поверхность нагружения смещается в пространстве напряжений (рисунок 2.2.2).

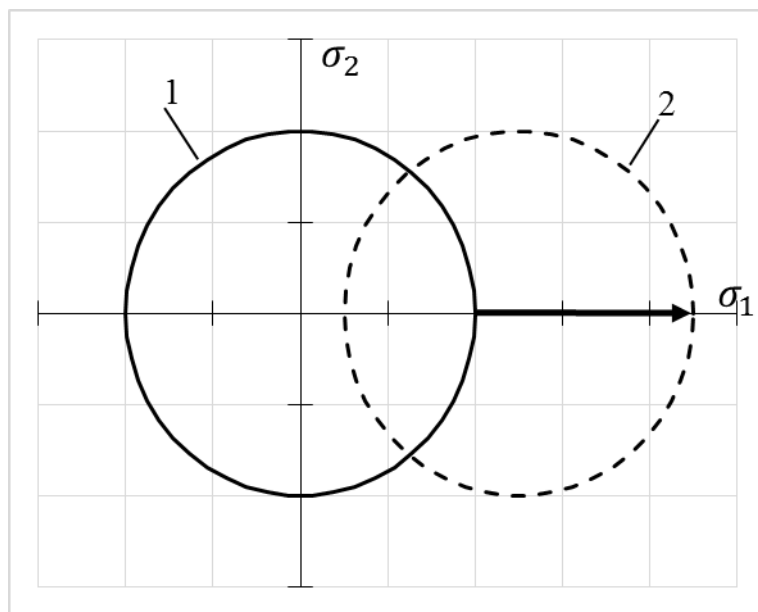


Рисунок 2.2.2. Кинематическое упрочнение (1 – исходная поверхность текучести, 2 – итоговая поверхность текучести)

Простейшим вариантом нелинейной модели деформирования, основанной на теории течения с анизотропным упрочнением, является модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича. Она позволяет достаточно подробно описывать форму диаграммы деформирования при малых значениях пластической деформации. Однако такая модель не позволяет описывать линейный участок диаграммы деформирования, характеризующей упрочнение или разупрочнение материала.

В случае моделей с комбинированным упрочнением поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояния, изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения (рисунок 2.2.3). Широко используемым при проведении прочностных расчетов в настоящее время является ряд математических моделей, основанных на теории В.С. Бондаря. Такие модели верифицированы на широком ряде экспериментальных исследований, в том числе по сложному, циклическому деформированию, они позволяют достаточно подробно описывать кинетику напряженно-деформированного состояния при различных видах нагружения и могут учитывать различные особенности процесса деформирования, в том числе связанные с влиянием скорости деформации на пластические характеристики материала.

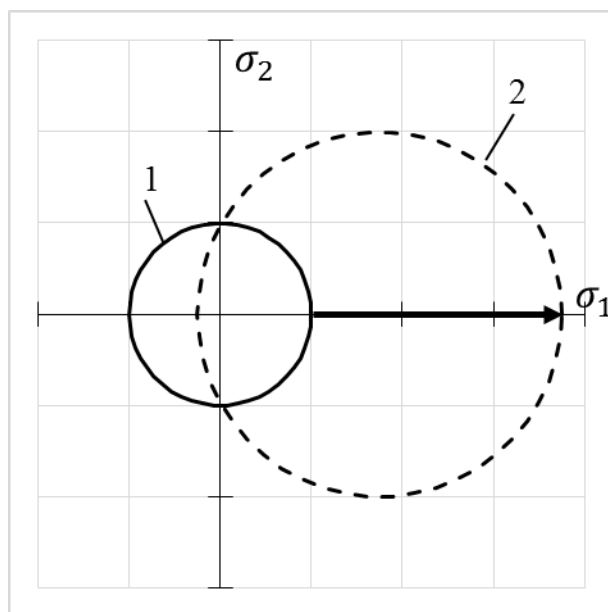


Рисунок 2.2.3. Комбинированное упрочнение (1 – исходная поверхность текучести, 2 – итоговая поверхность текучести)

2.3 Обзор моделей, основанных на теории течения при комбинированном упрочнении

В настоящее время для расчетов применяются четыре современных варианта теорий термовязкопластического деформирования: вариант, применяемый в программном комплексе Abaqus [135] и варианты Ж.-Л. Шабоса [3, 148-150, 154, 158], В.С. Бондаря [8, 9, 25, 144] и Ю.Г. Коротких [49, 50, 89, 90]. Эти варианты отвечают современным требованиям к моделям термовязкопластичности, т.е. в них сформулированы основные положения и уравнения, выделены материальные функции, замыкающие теорию, сформулированы базовые эксперименты и методы идентификации материальных функций, а также в должной мере проведены верификации на имеющемся экспериментальном материале.

Во всех рассматриваемых вариантах предполагается, что материал (металлы, конструкционные стали и сплавы) однороден и начально изотропен. При термовязкопластическом (неупругом) деформировании в нем возникает деформационная анизотропия (эффект Баушингера). Рассматриваются начально изотропные среды. Учитывается только анизотропия, вызванная процессами неупругого деформирования.

1. Вариант теории, применяемый в программном комплексе Abaqus

Рассматриваемый вариант модели термовязкопластичности доступен для использования в современных программных комплексах, основанных на методе конечных элементов. В основе его лежит теория течения при изотропном, кинематическом или комбинированном упрочнении. Предполагается, что деформация есть сумма упругой, пластической и вязкой деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{pl} + \varepsilon_{ij}^{cr}. \quad (2.3.1)$$

В пространстве напряжений существует поверхность текучести Мизеса. Поверхность текучести не зависит от давления и определяется функцией $f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$, которая является эквивалентным напряжением Мизеса:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{dev}):(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{dev})} = \sigma^0, \quad (2.3.2)$$

где σ^0 - предел текучести, σ'_{ij} - девиатор напряжений и α^{dev} определяется как девиатор микронапряжений.

Направление пластического деформирования определяется ассоциированным с выражением (2.3.2) законом пластического течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}} \frac{\frac{3}{2}(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{dev})}{\sigma^0}, \quad (2.3.3)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}$ является скоростью деформаций пластического течения, а $\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}}$ является эквивалентной скоростью накопленной пластической деформации. Эволюция эквивалентной пластической деформации определяется из следующего уравнения эквивалентной пластической работы:

$$\sigma^0 \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}} = (\sigma'_{ij} - \alpha_{ij}^{dev}): \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}: \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}} \quad (2.3.5)$$

Закон упрочнения состоит из двух компонент: компонента нелинейного кинематического упрочнения, описывающая смещение поверхности текучести в пространстве напряжений через микронапряжение α и компонента изотропного упрочнения, описывающая изменение эквивалентного напряжения,

определяющего размер поверхности текучести σ^0 в зависимости от накопленной пластической деформации:

$$\sigma^0 = f(\bar{\epsilon}^{pl}). \quad (2.3.6)$$

Кинематическое упрочнение определяется как сумма линейного члена (линейный закон упрочнения Циглера) и релаксационной компоненты, которая вносит нелинейность. Кроме того, можно суммировать несколько компонентов кинематического упрочнения (микронапряжений), что в некоторых случаях может значительно улучшить результаты:

$$\alpha = \sum_{k=1}^N \alpha_{ij}^k, \quad (2.3.7)$$

$$\dot{\alpha}_{ij}^k = C_k \frac{1}{\sigma^0} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} - \gamma_k \alpha_{ij}^k \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} + \frac{1}{C_k} \alpha_{ij}^k \dot{C}_k. \quad (2.3.8)$$

где N – количество микронапряжений, C_k и γ_k – параметры материала, которые должны быть откалиброваны по данным циклических испытаний. Параметр C_k является начальным модулем кинематического упрочнения, параметр γ_k определяет скорость, с которой модули кинематического упрочнения уменьшаются с ростом пластической деформации. Кинематический закон упрочнения можно разделить на девиаторную часть и гидростатическую. Только девиаторная часть влияет на поведение материала. Когда C_k и γ_k равны нулю, модель сводится к модели изотропного упрочнения. Когда все члены γ_k равны нулю, выполняется линейный закон упрочнения Циглера. На рисунке 2.3.1 представлен пример нелинейного кинематического упрочнения с тремя микронапряжениями.

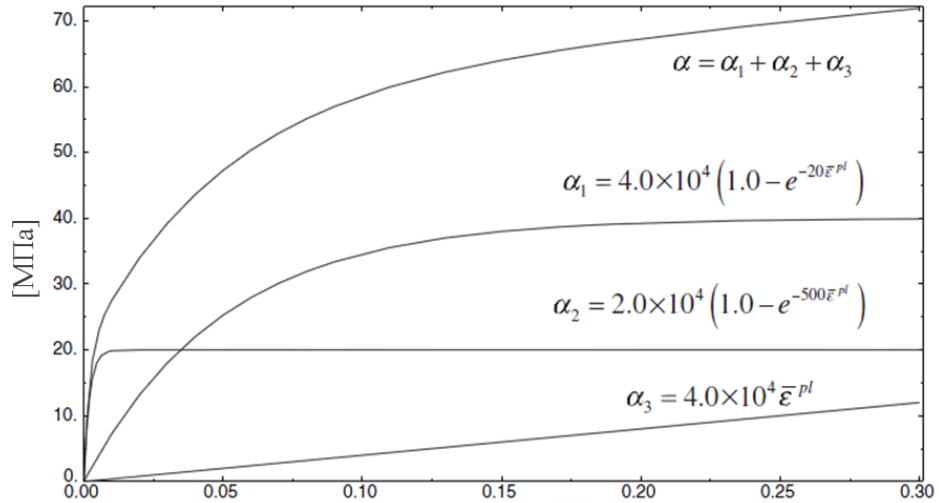


Рисунок 2.3.1 – Нелинейное кинематическое упрочнение материала с тремя микронапряжениями

Для описания реологических эффектов используется модель ползучести в виде степенного закона, эта модель привлекательна своей простотой. Но область применения этого закона существенно ограничена. Такой вариант модели обычно применяется только в случаях, когда напряженное состояние остается практически постоянным, при этом напряжения должны быть относительно низкими.

Модель степенного закона является простейшей моделью ползучести:

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = A \bar{q}^n t^m \quad (2.3.9)$$

где $\dot{\varepsilon}^{cr} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{cr} : \dot{\varepsilon}^{cr}}$ – одноосная эквивалентная скорость деформации ползучести,

$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}}$ – одноосное эквивалентное девиаторное напряжение, t – общее время, A , n и m – константы, определяемые как функции температуры.

Эквивалентное напряжение $\bar{q}$ является эквивалентным напряжением Мизеса или анизотропным эквивалентным девиаторным напряжением Хилла в зависимости от определения изотропного или анизотропного поведения ползучести. Константы A и n должны быть положительны и для константы m должно выполняться следующее условие: $-1 < m \leq 0$.

2. Вариант теории Ж. Шабаша

Для варианта Ж. Шабоша [3, 148-150, 154, 158] характерны некоторые общие положения, как и в варианте термовязкопластичности Ю.Г. Коротких.

В основе модели лежит теория малых деформаций, согласно которой полная деформация состоит из трех частей

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^T, \quad (2.3.41)$$

где ε_{ij}^e – тензор упругих деформаций, ε_{ij}^{in} – тензор неупругих деформаций, ε_{ij}^T – тензор термических деформаций. В теории термовязкопластичности неупругая деформация разделяется на две компоненты

$$\varepsilon_{ij}^{in} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{cr}, \quad (2.3.42)$$

где ε_{ij}^p соответствует пластической деформации, а ε_{ij}^{cr} – деформации ползучести. Теория термовязкопластичности учитывает деформации, не зависящие от скорости (пластическая деформация и упругая), и деформации, зависящие от скорости (ползучесть и релаксация).

Неупругое деформирование определяется уравнением поверхности в пространстве напряжений

$$f = J(\sigma'_{ij} - X_{ij}) - R, \quad (2.3.43)$$

где σ'_{ij} – девиатор напряжений, X_{ij} – тензор микронапряжения, R определяет эволюцию предела упругости. J определяет инвариантную функцию в пространстве напряжений. Инвариант Мизеса используется для изотропных материалов: $J(\sigma'_{ij} - X_{ij}) = \sqrt{2/3(\sigma'_{ij} - X_{ij})(\sigma'_{ij} - X_{ij})}$.

Тензор скорости неупругой деформации направлен по нормали к поверхности текучести

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} n_{ij}, \quad (2.3.44)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ – тензор скоростей неупругих деформаций, $\dot{\lambda}$ – множитель неупругих деформаций. В случае пластичности, не зависящей от скорости, $\dot{\lambda}$ определяется условием пластического течения $f = \dot{f} = 0$. В случае, когда есть зависимость от

скорости (термовязкопластичность), f является вязкой частью напряжений, а множитель $\dot{\lambda}$ определяется как заданная функция f

$$\dot{\lambda} = F(f). \quad (2.3.45)$$

Для определения функции F в модели Шабоса [3, 148-150] используется степенной закон. Значение $\dot{\lambda}$ совпадает с нормой скорости неупругой деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = (2/3 \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in})^{1/2}$.

Микронапряжение (центр поверхности текучести) раскладывается на сумму независимых переменных, каждая из которых описывается одним и тем же эволюционным уравнением с различными параметрами материала. Микронапряжение состоит из линейной составляющей, восстановления и температурного перехода.

$$X_{ij} = \sum_k X_{ij}^{(k)} \quad (2.3.46)$$

$$\dot{X}_{ij}^{(k)} = \frac{2}{3} C_k \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \gamma_k X_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \gamma_k^* [J(X_{ij}^{(k)})]^{m_k-1} X_{ij}^{(k)} + \frac{1}{C_k} \frac{\partial C_k}{\partial T} X_{ij}^{(k)} \dot{T}. \quad (2.3.47)$$

Здесь C_k , γ_k , γ_k^* , m_k – определяемые параметры материала.

Первый член в правой части – это член линейного упрочнения, он является функцией скорости неупругой деформации, второй член – отвечает за восстановление микронапряжений и определяет поведение нелинейного упрочнения, третий член уравнения представляет собой восстановление, зависящее от времени, оно становится эффективным только при низкой скорости деформации, последний член уравнения отвечает за влияние скорости температуры и отражает влияние нагрева.

В вязкопластичном варианте модели Шабоса используется унифицированное уравнение вязкопластичности

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J(\sigma'_{ij}) - k}{\lambda_Y} \right\rangle^{N_Y}, \quad (2.3.48)$$

где λ_Y – параметр сопротивления ползучести, k – начальный размер поверхности нагружения. Скобки $\langle \rangle$ приводят к нулю, если выражение внутри скобок меньше нуля. Таким образом можно различать упругие и вязкопластические области.

Скорость изотропного упрочнения записывается как:

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \gamma_r |R - Q|^{m-1}(R - Q_r) + \left(\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial T} + \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial T}\right) R \dot{T}, \quad (2.3.49)$$

где b, Q, γ_r, m, Q_r – параметры. В начальный момент времени, когда $\varepsilon_{ij}^{in} = 0$, $R = k$. Эта модель достаточно хорошо воспроизводит зависимость между диапазоном напряжений и временем выдержки в тестах на циклическую релаксацию при постоянном диапазоне деформаций.

3. Вариант теории В.С. Бондаря

Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждений при термовязкопластическом нагружении основывается на положениях теории неупругости, относящейся к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении [8, 9, 11, 12, 17-19, 144].

Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и неупругой деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^H. \quad (2.3.50)$$

При этом следует отметить, что в данной теории нет условного разделения неупругой деформации на деформации пластичности и ползучести.

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука, а при изменении температуры – закону температурного расширения. В этом случае, с учетом зависимости упругих параметров от температуры, упругие деформации будут определяться следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})] + \alpha_{ij}^{\varepsilon T} \dot{T}, \quad (2.3.51)$$

$$\alpha_{ij}^{\varepsilon T} = \alpha_T \delta_{ij} - \frac{1}{E^2} [\sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij})] \frac{dE}{dT} - \frac{1}{E} (3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}) \frac{d\nu}{dT}, \quad (2.3.52)$$

где E, ν, α_T – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения, которые являются функциями температуры T ; $\sigma_0 = \sigma_{ij}/3$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

В модели неупругости полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и неупругого состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Начальная поверхность нагружения может быть стянута в точку. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения. Воздействие фактора времени тоже есть процесс нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0. \quad (2.3.53)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений; a_{ij} – тензор микронапряжений (добавочных, остаточных напряжений), характеризует смещение поверхности нагружения в девиаторном пространстве напряжений, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр C отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. Тензор смещения a_{ij} и радиус C являются функционалами процесса нагружения.

Для радиуса поверхности нагружения принимается следующее уравнение:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u*}^H + q_T \dot{T} - q_R. \quad (2.3.54)$$

Здесь ε_{u*}^H – длина дуги траектории неупругой деформации (накопленная неупругая деформация); $\dot{\varepsilon}_{u*}^H$ – интенсивность скоростей неупругой деформации (скорость накопленной неупругой деформации); q_ε, q_T, q_R – функции, подлежащие экспериментальному определению. Первое слагаемое в уравнении (2.3.54) отвечает механическому упрочнению. По знаку q_ε определяются циклически упрочняющиеся ($q_\varepsilon > 0$), стабильные ($q_\varepsilon = 0$) и разупрочняющиеся ($q_\varepsilon < 0$) материалы. Параметр q_T обеспечивает неизотермический переход, а параметр q_R – возврат механических свойств при отдыхе или отжиге.

Смещение поверхности нагружения определяется уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{ij} = & \frac{2}{3} g_\varepsilon^H \dot{\varepsilon}_{ij}^H + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^H + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u*}^H + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon^T \varepsilon_{ij}^H + g_a^T a_{ij} \right) \dot{T} \\ & - \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon^R \varepsilon_{ij}^H + g_a^R a_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

Здесь $g, g_\varepsilon, g_a, g_\varepsilon^T, g_a^T, g_\varepsilon^R, g_a^R$ – функции, подлежащие экспериментальному определению. Первые три слагаемых в уравнении (2.3.55) описывают процессы образования и снятия микронапряжений при неупругом деформировании, два следующих обеспечивают неизотермический переход, а два последних – снятие микронапряжений при отдыхе или отжиге. Параметры $q_R, g_\varepsilon^R, g_a^R$ в уравнениях (2.3.54) и (2.3.55) являются функциями повреждения, что позволяет описать разупрочнение материала перед разрушением, т.е., например, уменьшение уровня напряжений при жестком циклическом нагружении перед разрушением, третью стадию ползучести.

Неупругие деформации зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса. Для определения скоростей неупругих деформаций используется ассоциированный с (2.3.53) градиентальный закон течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3 s_{ij}^*}{2 \sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^H \quad (2.3.56)$$

Здесь σ_u^* – интенсивность активных напряжений.

Для получения уравнения для скорости накопленной неупругой деформации используются уравнения (2.3.54) – (2.3.56). Тогда для случаев мягкого и, соответственно, жесткого нагружений уравнения для скорости накопленной неупругой деформации будут иметь следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^H = \frac{1}{E_*} \left[\frac{3 s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{2 \sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right], \quad (2.3.57)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^H = \frac{1}{E_* + 3G} \left[3G \frac{s_{ij}^* (\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha_{ij}^{\varepsilon T} \dot{T})}{\sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right], \quad (2.3.58)$$

$$E_* = q_\varepsilon + g + g_\varepsilon \varepsilon_{u^*}^H + g_a a_u^*, \quad (2.3.59)$$

$$B^T = q_T + g_\varepsilon^T \varepsilon_{u^*}^H + g_a^T a_u^*, \quad (2.3.60)$$

$$B^R = q_R + g_\varepsilon^R \varepsilon_{u^*}^H + g_a^R a_u^*, \quad (2.3.61)$$

$$\varepsilon_{u^*}^H = \frac{s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^H}{\sigma_u^*}, \quad (2.3.62)$$

$$a_u^* = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*}. \quad (2.3.63)$$

Условия упругого и неупругого состояний следуют из того, что для неупругого состояния необходимо, чтобы изображающая точка процесса нагружения находилась на поверхности нагружения и определяемая скорость накопленной неупругой деформации была положительна, а упругое состояние следует при нарушении любого из двух упомянутых условий. Тогда условия упругого и неупругого состояний будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u*}^H \leq 0 & - \text{упругость,} \\ \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u*}^H > 0 & - \text{неупругость.}\end{aligned}\tag{2.3.64}$$

Здесь под $\dot{\varepsilon}_{u*}^H$ подразумевается выражение, задаваемое уравнением (2.3.57) либо (2.3.58) или любым другим уравнением, связывающим скорость накопленной неупругой деформации и любой набор скоростей напряжений и деформаций (смешанное нагружение).

Определяющие функции выражаются через материальные функции следующим образом:

$$q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u*}^H}, \tag{2.3.65}$$

$$q_R = q_\varepsilon P_c, \tag{2.3.66}$$

$$q_T = \frac{C}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial T}, \tag{2.3.67}$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \tag{2.3.68}$$

$$g_\varepsilon = \beta E_a, \tag{2.3.69}$$

$$g_a = -\beta, \tag{2.3.70}$$

$$g_\varepsilon^T = 0, \tag{2.3.71}$$

$$g_a^T = \frac{1}{E_a + \beta \sigma_a} \left(\frac{dE_a}{dT} + \beta \frac{d\sigma_a}{dT} \right), \tag{2.3.72}$$

$$g_\varepsilon^R = g_\varepsilon P_a, \tag{2.3.73}$$

$$g_a^R = (g + g_a a_u) \frac{P_a}{a_u}, \tag{2.3.74}$$

$$P_c = \exp(b_c) |C - C_{p0}|^{n_c} (1 - \omega)^{-m_\omega}, \tag{2.3.75}$$

$$P_a = \exp(b_a) (a_u)^{n_a} (1 - \omega)^{-m_\omega}, \tag{2.3.76}$$

$$\dot{\omega} = a_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p / W_0, \quad (2.3.77)$$

$$a_u = \left(\frac{3}{2} a_{ij} a_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.78)$$

$$\sigma_u = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.79)$$

$$C_{p0} = C_p(T, 0) = \sigma_{-1}. \quad (2.3.80)$$

Здесь σ_{-1} – предел длительной прочности (предел ползучести), ω – мера повреждения, W_0 – энергия разрушения.

Из приведенных моделей, основанных на теории течения при комбинированном упрочнении, для описания процесса деформирования заготовки диска удобнее всего будет взять за основу теорию В.С. Бондаря. Эта теория замыкается наименьшим количеством материальных функций, то есть для ее идентификации требуется меньшее количество экспериментальных данных. Также она позволит учесть неоднородность напряженно-деформированного состояния диска в процессе раскатки, большие пластические деформации. Для учета различных скоростей деформирования в процессе раскатки необходимо модифицировать модель вязкопластичности В.С. Бондаря.

3 РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

3.1 Проведение испытаний образцов, имитирующих условия нагружения материала в процессе изотермической раскатки

В процессе изотермической раскатки материал подвергается вязкопластическому деформированию. При этом процесс деформирования материала зависит от скоростей вращения диска и движения ролика и является циклическим. Напряженное состояние материала является неоднородным и не одноосным. При этом принимается, что материал начально изотропный и имеет единую кривую деформирования при растяжении и сжатии.

Для разработки модели поведения материала и определения материальных параметров проведены эксперименты по одноосному нагружению образцов из конструкционных сплавов с различными скоростями деформации при высоких температурах, до которых может быть нагрета заготовка диска при проведении раскатки. На основе анализа механических характеристик определен вид функций, описывающих материальные параметры модели вязкопластичности.

При проведении испытаний на сжатие возникает ряд особенностей, связанных с изменением геометрии образца и точностью приложения нагрузки к образцу, контролировать которые при проведении испытаний в закрытой высокотемпературной печи невозможно. Таким образом, наиболее предпочтительными являются эксперименты на растяжение, проводимые в соответствии с [54]. Для получения достоверной диаграммы деформирования материала замер деформации образца необходимо проводить на его рабочей длине с помощью специального экстензометра. Однако предположение об единой диаграмме деформирования материала при растяжении и сжатии в условиях высоких температур и различных скоростях деформации требует экспериментального подтверждения. При проведении испытаний важно также определить влияние разгрузки на процесс повторного нагружения, поскольку при пластическом деформировании в материале возникает деформационная анизотропия.

Поскольку на предел текучести материала и вид диаграммы деформирования существенное влияние оказывает скорость деформации, испытания должны проводиться при разных скоростях. Допускается задавать скорость деформации при нагружении образца по захватам испытательной машины, при этом для получения скорости деформации необходимо отнести заданную скорость перемещения к длине рабочей части образца, измеряемой между серединами радиусов перехода от рабочей части к захватной. Также важной особенностью нагружения материала в условиях изотермической раскатки, подлежащей экспериментальному исследованию, является вид диаграммы деформирования при смене скорости деформации.

Для исследования особенностей деформирования материала в условиях изотермического нагружения при различных скоростях деформации используются результаты испытаний образцов из жаропрочного никелевого сплава ВВ751П [2, 137] на растяжение при температурах 1050, 1100 и 1150 °С и скоростях деформации 1,9; 0,32; 0,032; 0,016; 0,0063 мин⁻¹ и сжатие при температуре 1050 °С и скоростях деформации 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 мин⁻¹ и результаты испытаний по сжатию образцов из жаропрочного никелевого сплава ЭП741НП [2, 137] со скоростями деформации 0,3; 0,18 и 0,06 мин⁻¹ при температурах 1050, 1100 и 1140 °С.

На рисунках 3.1.1 – 3.1.7 приведены диаграммы деформирования, связывающие истинное напряжение материала с деформацией, представленной в логарифмической мере, определенные по результатам экспериментальных исследований сплава ВВ751П при растяжении и сжатии и сплава ЭП741НП при сжатии.

Механические характеристики материала ВВ751П приведены в таблице 3.1.1, механические характеристики материала ЭП741НП приведены в таблице 3.1.2.

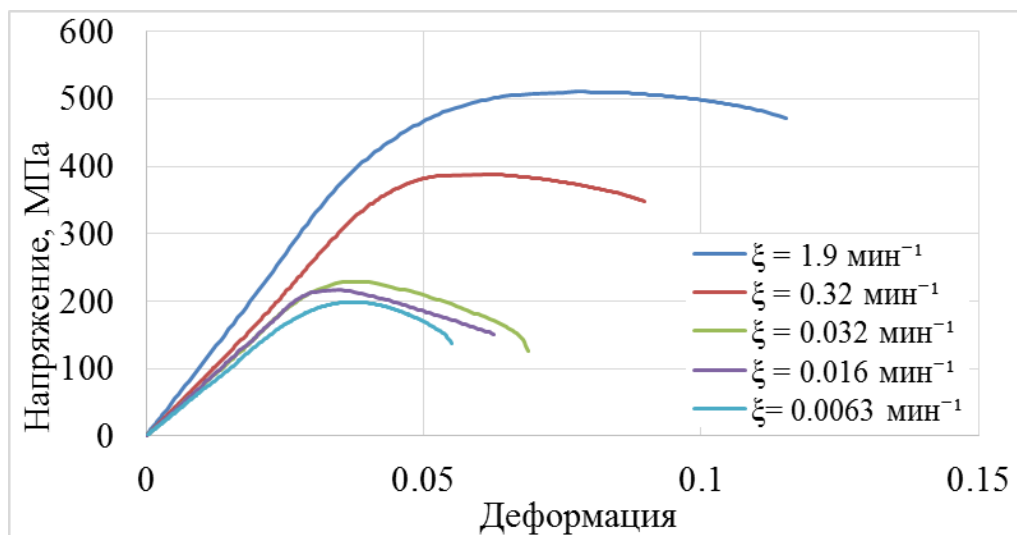


Рисунок 3.1.1 – Диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1050 °С

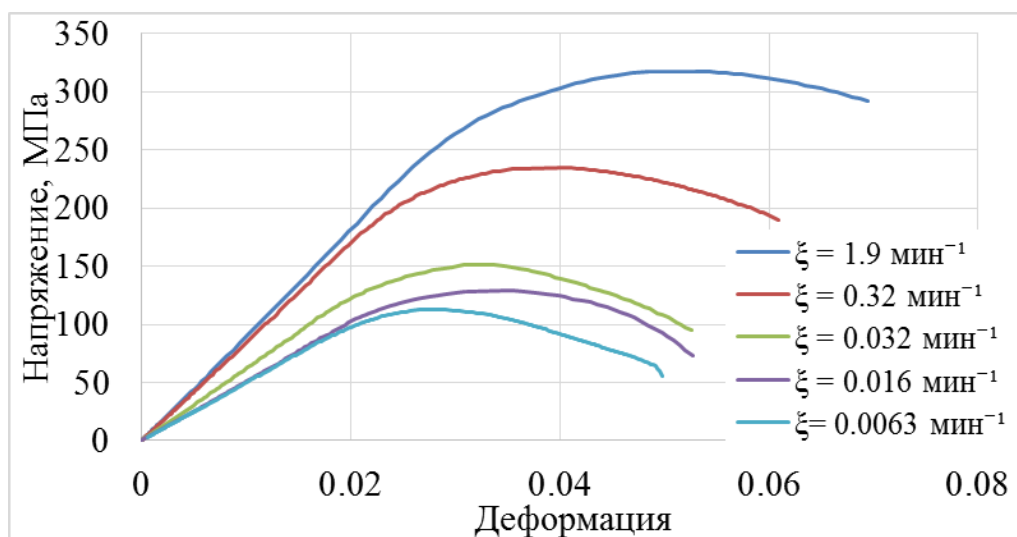


Рисунок 3.1.2 – Диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1100 °С

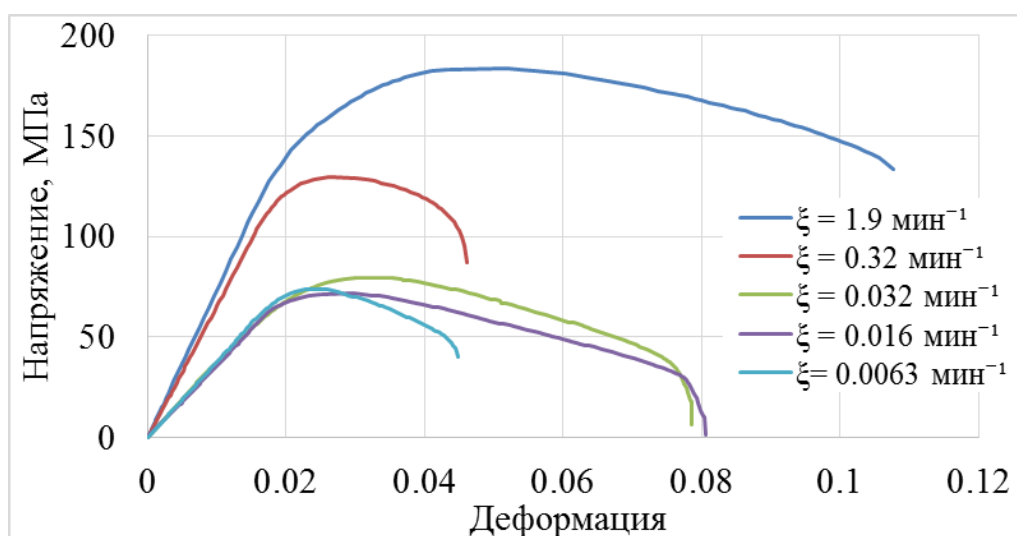


Рисунок 3.1.3 – Диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1150 °С

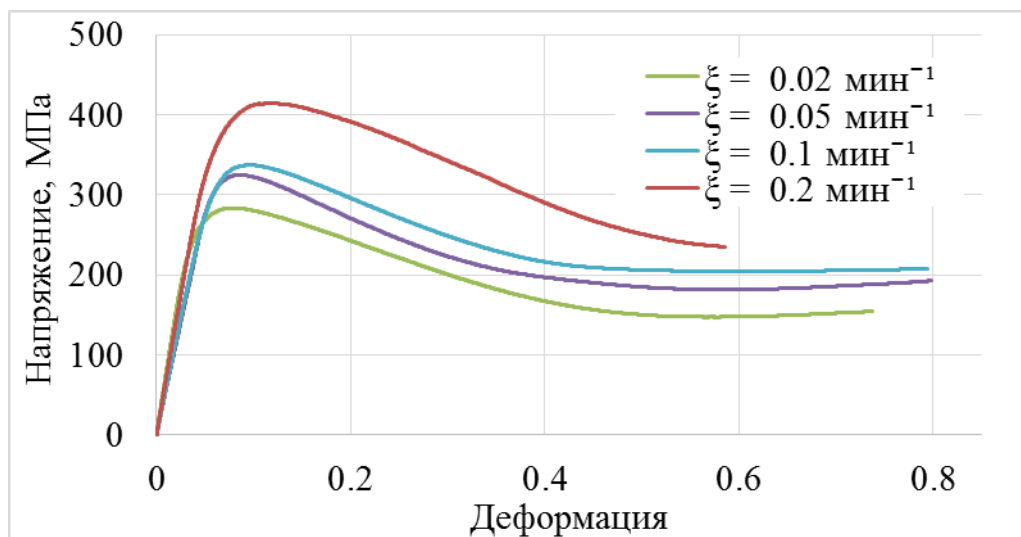


Рисунок 3.1.4 – Диаграммы сжатия материала BV751П при температуре 1050 °С

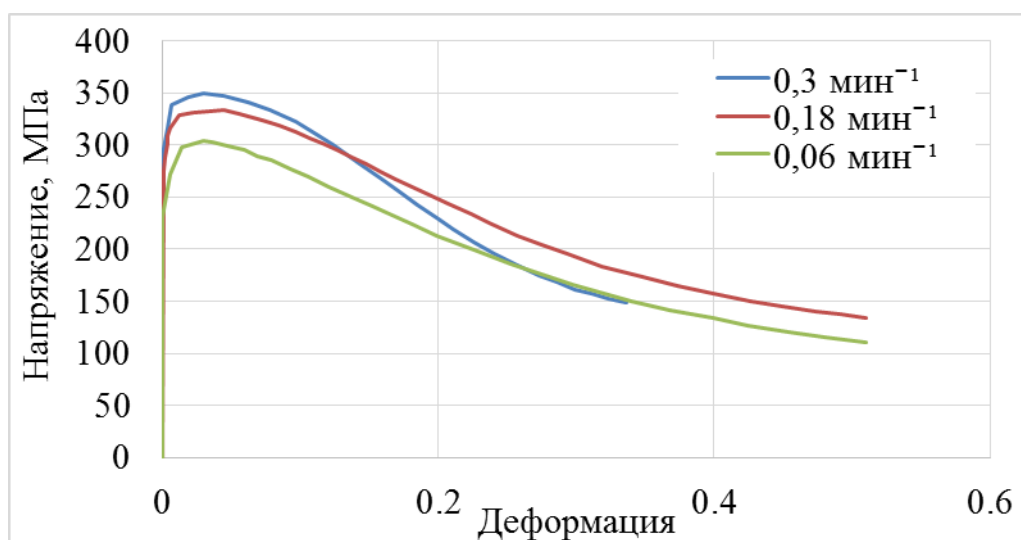


Рисунок 3.1.5 – Диаграммы сжатия материала ЭП741НП при температуре 1050 °С

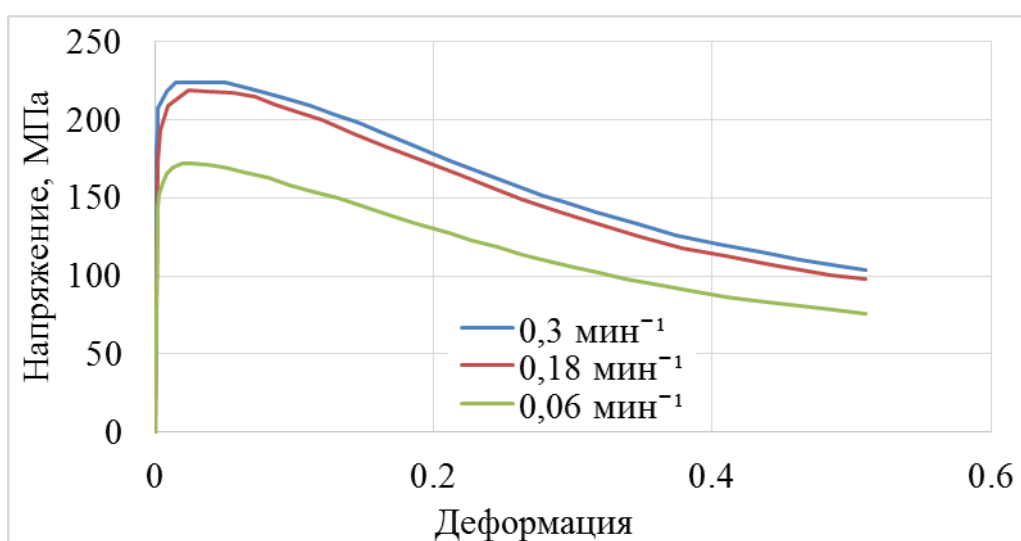


Рисунок 3.1.6 – Диаграммы сжатия материала ЭП741НП при температуре 1100 °С

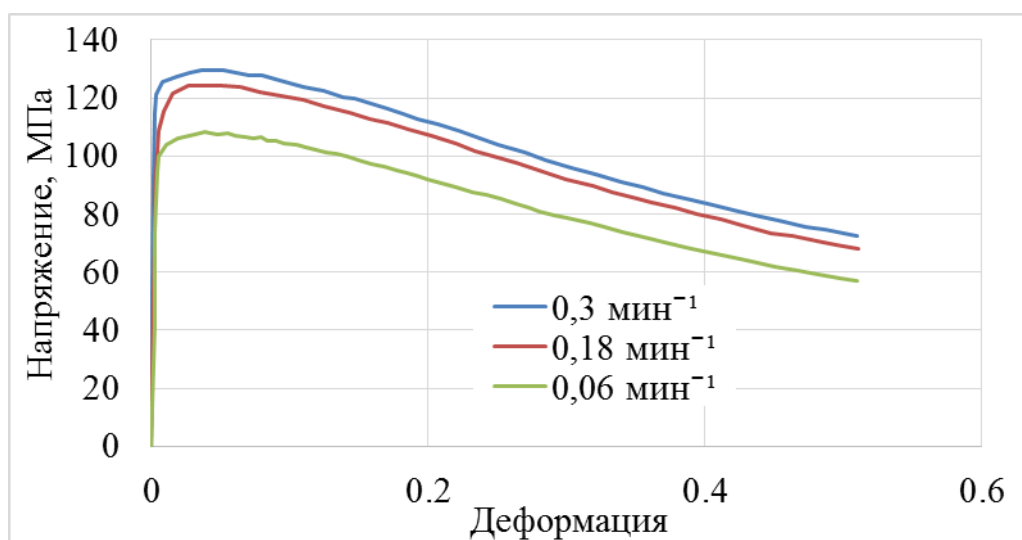


Рисунок 3.1.7 – Диаграммы сжатия материала ЭП741НП при температуре 1140 °С

Таблица 3.1.1 – Механические характеристики материала ВВ751П

Температура, °С	Скорость деформации, мин ⁻¹	Модуль упругости, МПа	Условный предел текучести, МПа	Предел прочности, МПа
1050	1,9	10900	380	462
	0,32	8740	345	365
	0,032	7740	210	220
	0,016	7520	197	206
	0,0063	6870	174	192
1100	1,9	9080	265	302
	0,32	8580	205	226
	0,032	6310	132	147
	0,016	5260	115	124
	0,0063	5070	104	110
1150	1,9	7370	143	175
	0,32	6630	120	126
	0,032	3840	62,7	77,4
	0,016	3660	66,7	69,8
	0,0063	3850	70,3	72,3

Таблица 3.1.2 – Механические характеристики материала ЭП741НП

Температура, °C	Скорость деформации, мин ⁻¹	Модуль упругости, МПа	Условный предел текучести, МПа	Предел прочности, МПа
1050	0,06	9600	253	314
	0,18	6800	305	349
	0,3	3933	317	365
1100	0,06	5360	151	178
	0,18	3600	179	231
	0,3	3400	212	236
1140	0,06	3733	95	116
	0,18	3600	101	133
	0,3	2400	126	138

Для определения аналитических зависимостей, позволяющих описывать характер изменения материальных параметров, проведен анализ механических характеристик материала ВВ751П и ЭП741НП, по результатам которого определено, что механические характеристики зависят от скорости деформации по степенному закону. На рисунках 3.1.8 – 3.1.11 представлены зависимости механических характеристик от скорости деформации при растяжении и сжатии и аппроксимирующие их аналитические функции для материала ВВ751П и ЭП741НП. На рисунках 3.1.12 – 3.1.13 приведено сравнение механических характеристик материала ВВ751П, полученных по результатам испытаний на растяжение и сжатие, которое позволяет сделать вывод о возможности определения параметров материала по результатам испытаний на растяжение.

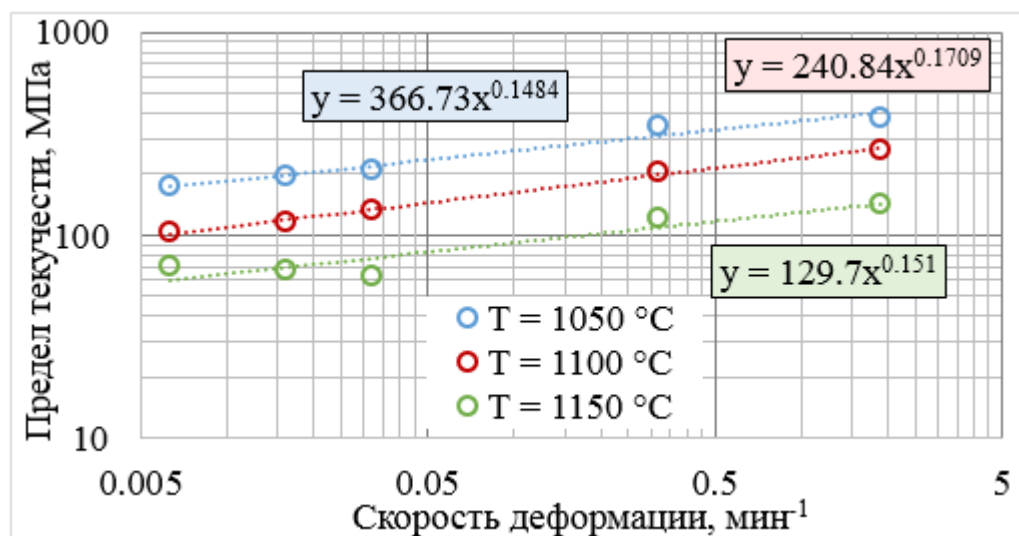


Рисунок 3.1.8 – Предел текучести материала ВВ751П

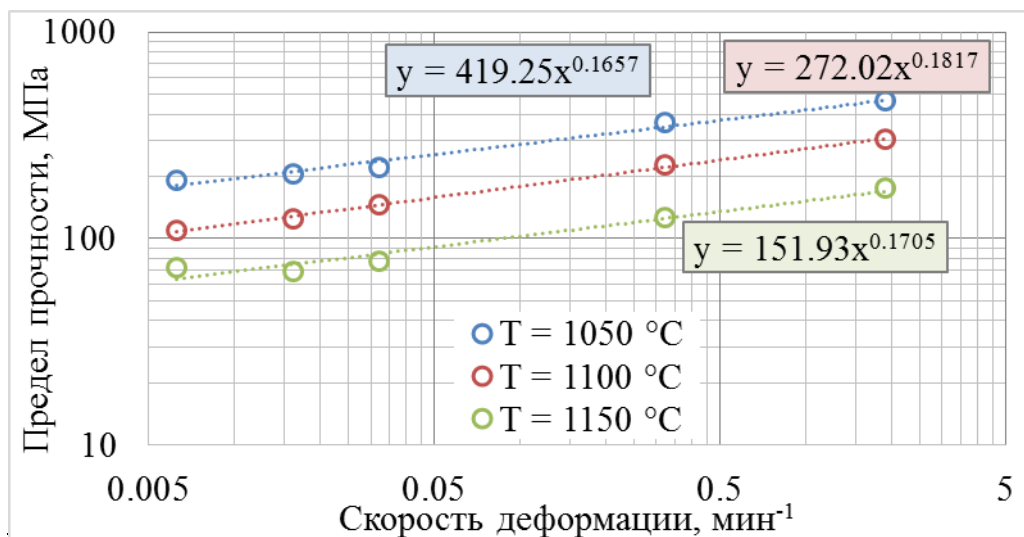


Рисунок 3.1.9 – Предел прочности материала BV751П

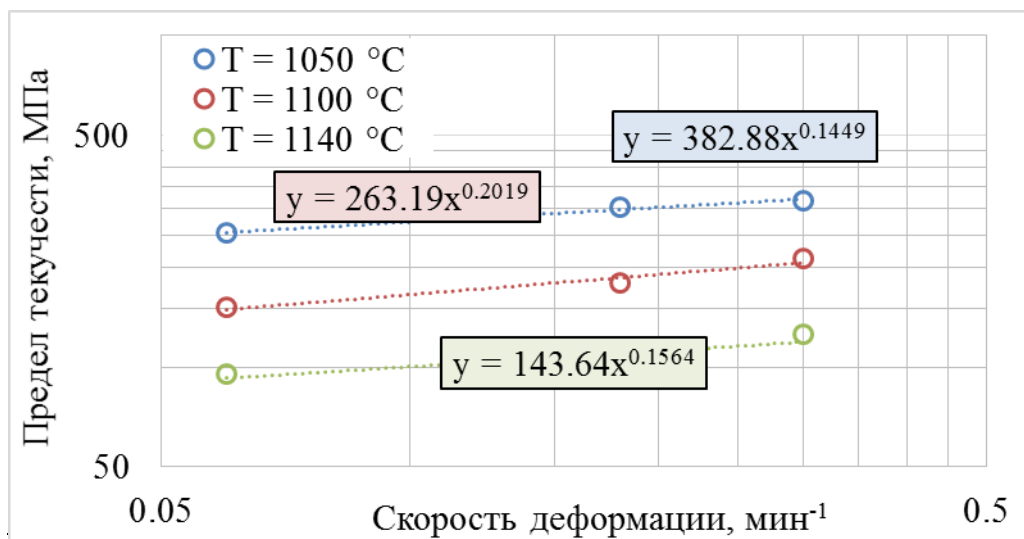


Рисунок 3.1.10 – Предел текучести материала ЭП741НП

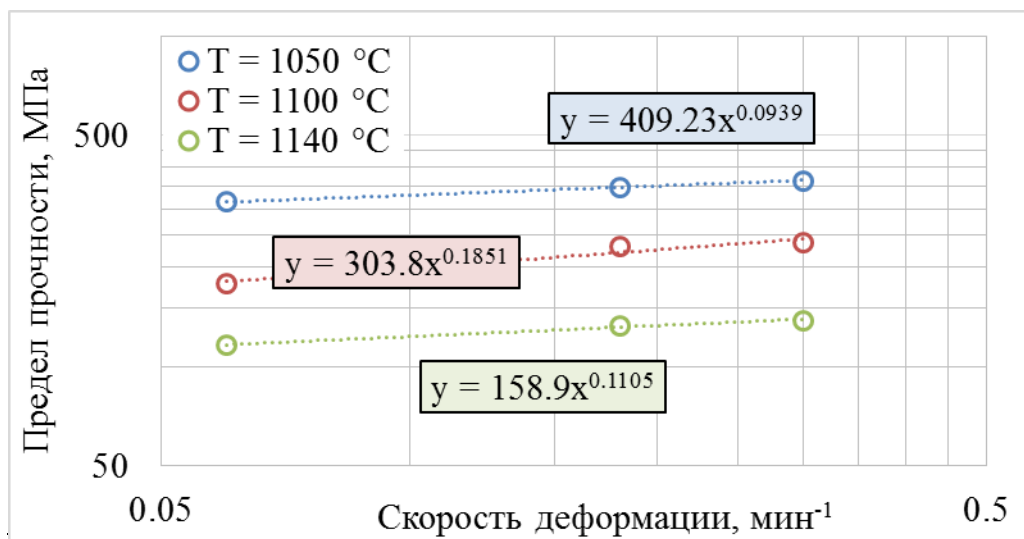


Рисунок 3.1.11 – Предел прочности материала ЭП741НП

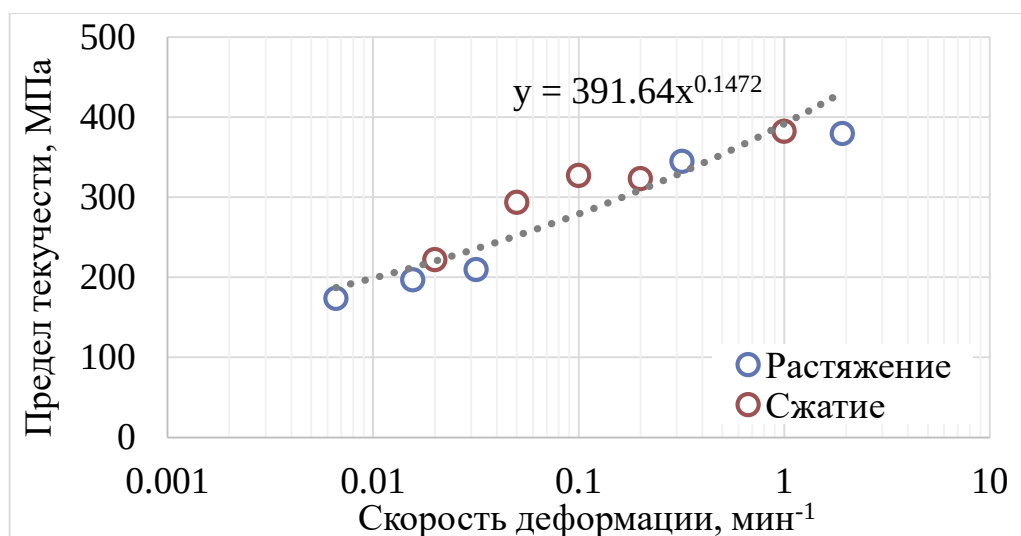


Рисунок 3.1.12 – Предел текучести материала BV751П при температуре 1050 °С

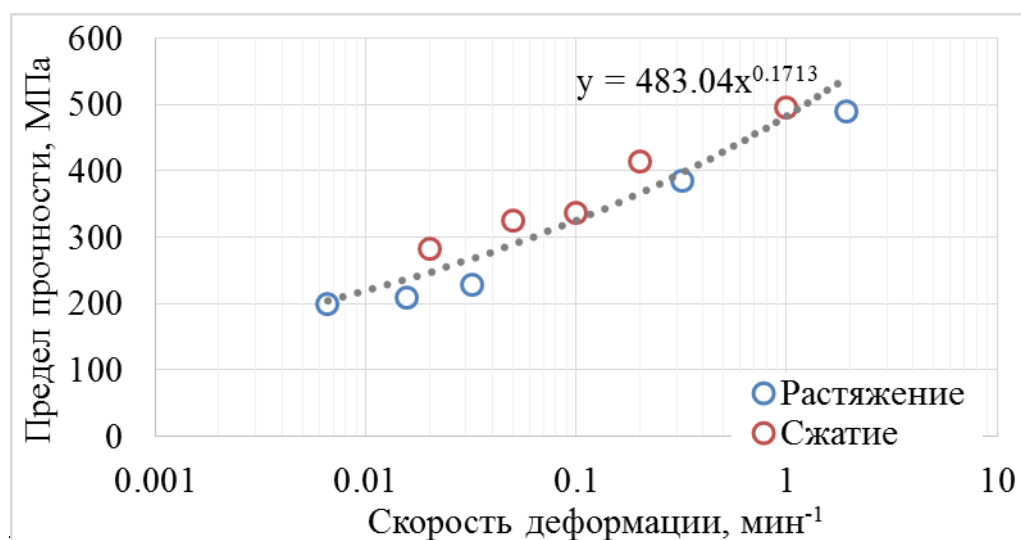


Рисунок 3.1.13 – Предел прочности материала BV751П при температуре 1050 °С

Для исследования особенностей повторного нагружения материала в процессе изотермической раскатки анализируются результаты испытаний образцов из сплава BV751П на растяжение с разгрузкой при температуре 1050, 1100 и 1150 °С со скоростью деформации 1,9 мин⁻¹ и последующем растяжением до разрушения. На рисунках 3.1.14 – 3.1.16 представлены результаты проведенных испытаний, приведены диаграммы деформирования, связывающие истинное напряжение материала с деформацией, представленной в логарифмической мере.

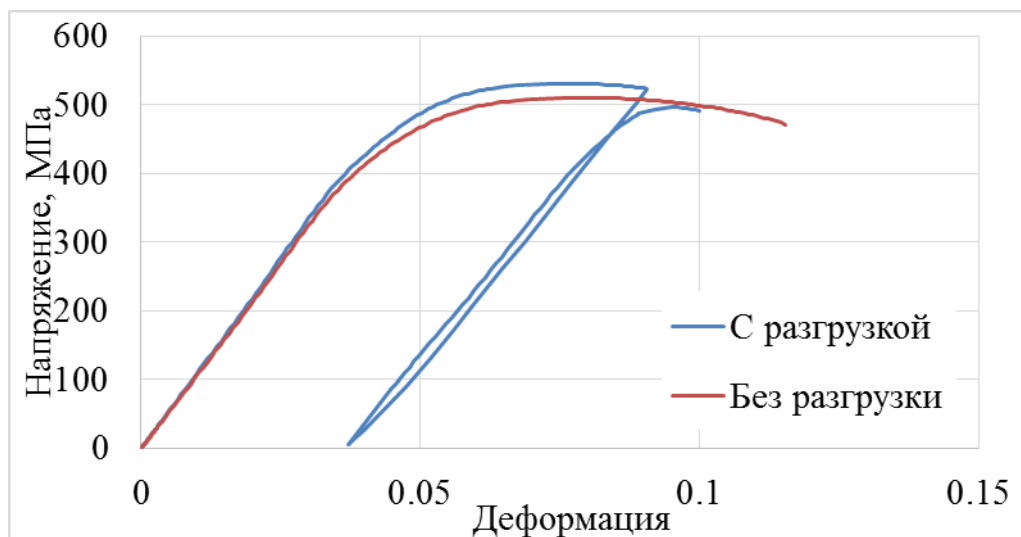


Рисунок 3.1.14 – Диаграммы деформирования материала BV751П с разгрузкой при температуре 1050 °С

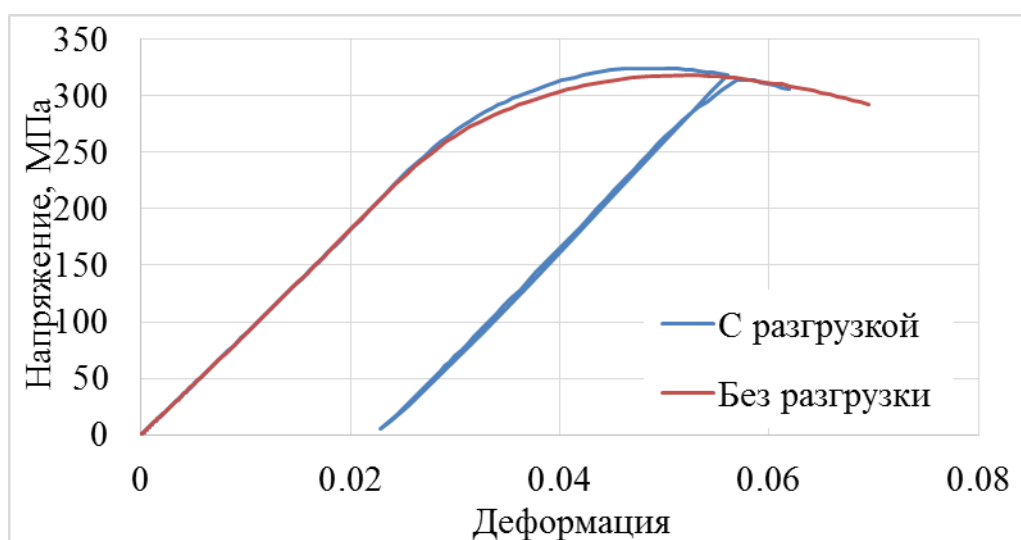


Рисунок 3.1.15 – Диаграммы деформирования материала BV751П с разгрузкой при температуре 1100 °С

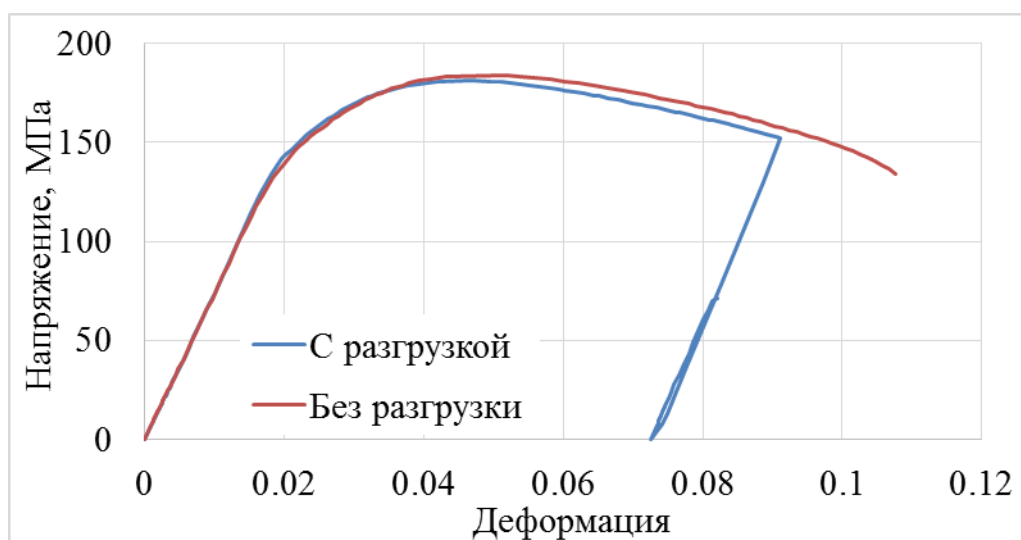


Рисунок 3.1.16 – Диаграммы деформирования материала BV751П с разгрузкой при температуре 1150 °С

Для исследования особенностей деформирования материала при изменении скорости деформации проведены испытания на растяжение образцов из жаропрочной стали 12X18H10T при температуре 700°C. Испытания проведены на испытательной машине LFMZ-100kN (рисунок 3.1.17). Образцы помещались в захваты испытательной машины, а затем в печь, где происходил нагрев образца до заданной температуры. Чертеж образца приведен на рисунке 3.1.18. После установления равномерной температуры в камере печи, измеряемой в трех зонах, и выдержки в течение 10 минут, образец нагружался с заданной скоростью деформации. Нагрузка снималась с траверсы испытательной машины, для записи показаний удлинения образца при растяжении использован навесной экстензометр с базой 25 мм.



Рисунок 3.1.17 – Испытательная машина LFMZ-100kN

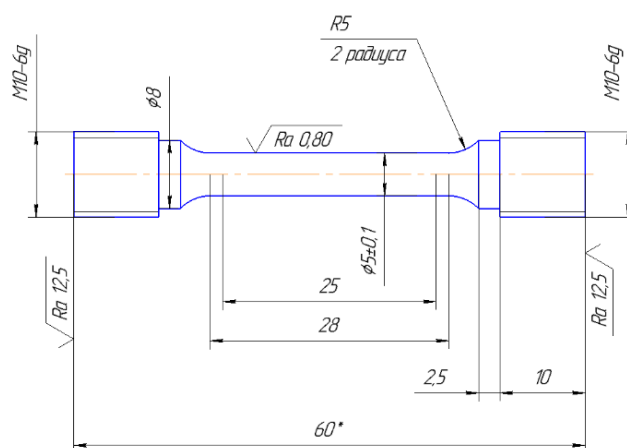


Рисунок 3.1.18 – Образец для испытания на растяжение при повышенных температурах

Испытания проведены при четырех скоростях деформации: 0,0156; 0,078; 0,78 и 1,56 мин⁻¹. Также проведены два эксперимента с изменением скорости деформации. В первом образец нагружался до значения деформации 0,1 со скоростью 0,0156 мин⁻¹, после чего скорость деформации увеличивалась до 0,78 мин⁻¹. Во втором образец нагружался до значения деформации 0,1 со скоростью 0,78 мин⁻¹ после чего скорость деформации уменьшалась до 0,0156 мин⁻¹. На рисунке 3.1.19 приведены диаграммы деформирования, связывающие истинное напряжение материала с деформацией, представленной в логарифмической мере, определенные по результатам экспериментальных исследований при постоянной

скорости деформации. На рисунках 3.1.20 и 3.1.21 истинные диаграммы деформирования образцов с изменением скорости деформации.

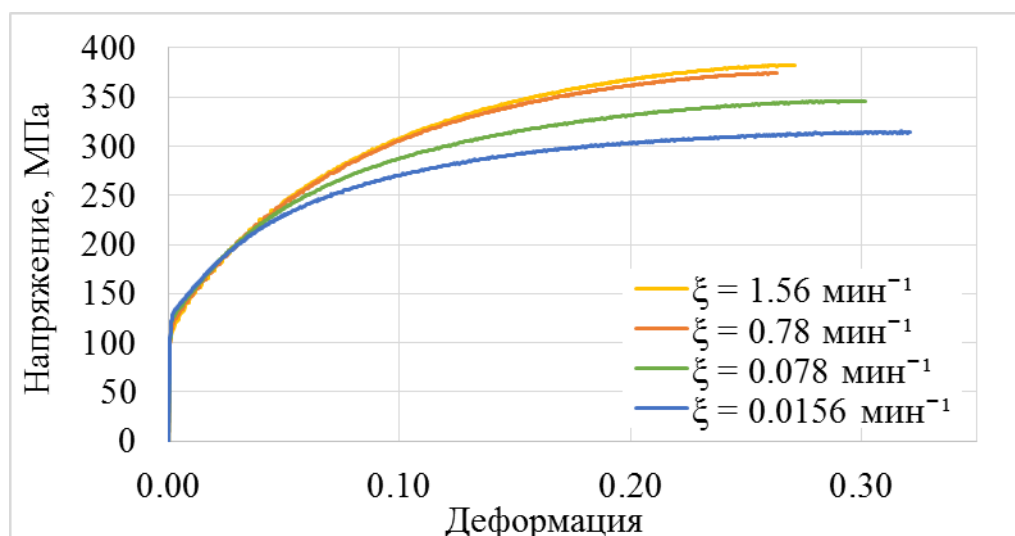


Рисунок 3.1.19 – Диаграммы растяжения материала 12X18H10T при температуре 700 °С

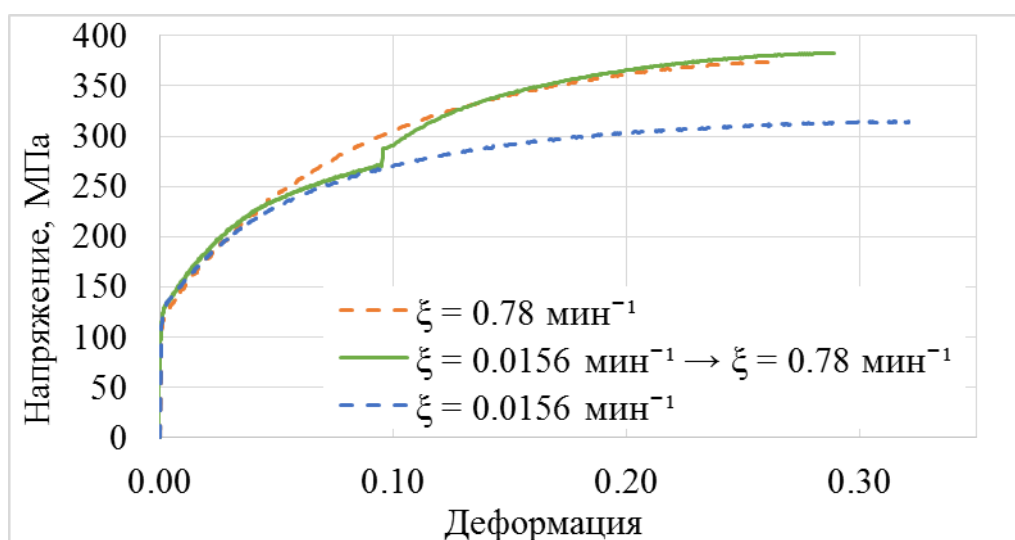


Рисунок 3.1.20 – Диаграммы растяжения материала 12X18H10T с изменением скорости деформации с 0,0156 до 0,78 мин⁻¹ при температуре 700 °С

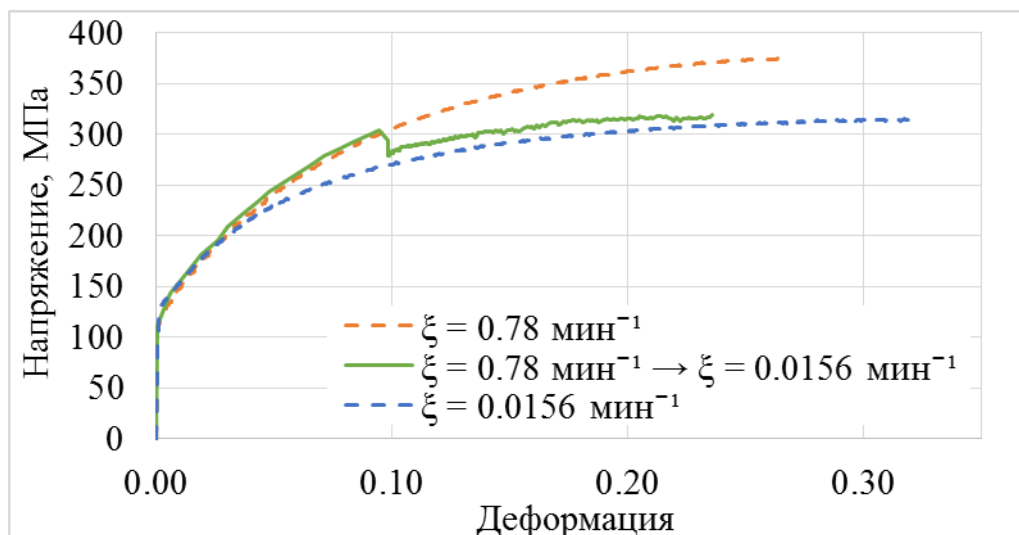


Рисунок 3.1.21 – Диаграммы растяжения материала 12X18H10T с изменением скорости деформации с 0,78 до 0,0156 мин⁻¹ при температуре 700 °С

При разработке модели деформирования материала нужно учесть выявленные особенности процесса деформирования материала при высоких температурах и различных скоростях деформации, которые обнаружены по результатам экспериментов:

- Зависимость параметров материала от скорости деформации описывается аналитическим уравнением степенного вида.
- Материалы ВВ751П и ЭП741НП при различных скоростях деформации разупрочняются после достижения предела прочности и до достижения деформации порядка 0,4...0,5. Разупрочнение имеет линейный характер.
- Характер процесса разгрузки и последующего нагружения материала упругий.
- При изменении скорости деформации напряжения увеличиваются или уменьшаются до значения соответствующего новой скорости деформации.

3.2 Основные уравнения модели вязкопластического деформирования

Материал однороден и начально изотропен. В процессе вязкопластического деформирования в нем может возникать только деформационная анизотропия.

Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и вязкопластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ деформаций.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (3.2.1)$$

За меру скорости деформации принимается интенсивность скоростей деформаций

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}, \quad (3.2.2)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – девиатор скоростей деформации.

При изменении напряжений упругие деформации следуют закону Гука, при этом принимается, что изменение упругих характеристик материала при изменении скорости деформации мало и не оказывает влияние на результаты моделирования процесса изотермической раскатки

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})] + \alpha_{ij}^{\xi} \dot{\xi}, \quad (3.2.3)$$

$$\alpha_{ij}^{\xi} = -\frac{1}{E^2} [\sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij})] \frac{dE}{d\xi}, \quad (3.2.4)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Изменение объема материала является упругим:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\dot{\sigma}_0 = K \dot{\varepsilon}_0,$$

$$K = \frac{E}{1 - 2\nu},$$

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}),$$

где $\dot{\varepsilon}_0$ – скорость средней деформации.

Выразив скорости напряжений через скорости деформаций, можно записать закон Гука в обратной форме:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) + 3\lambda\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_0, \quad (3.2.6)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Предполагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и вязкопластического состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Начальная поверхность нагружения может быть стянута в точку. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0. \quad (3.2.8)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений; s_{ij} – девиатор напряжений. Тензор a_{ij} (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений) характеризует смещение поверхности нагружения в девиаторном пространстве напряжений, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр C отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. Тензор смещения a_{ij} и радиус C являются функционалами процесса нагружения.

Для радиуса поверхности нагружения принимается кусочно-линейная функция, позволяющая описать упрочнение или разупрочнение материала после достижения предела текучести:

$$C = \begin{cases} E_C \varepsilon_{u*}^p + C_0, & \text{если } \varepsilon_{u*}^p < \varepsilon_C^p, \\ E_C \varepsilon_C^p + C_0, & \text{если } \varepsilon_{u*}^p \geq \varepsilon_C^p, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Уравнение для скорости размера поверхности нагружения примет вид:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u*}^p + q_\xi \dot{\xi}, \quad (3.2.10)$$

$$q_\varepsilon = \begin{cases} E_C, & \text{если } \varepsilon_{u*}^p < \varepsilon_C^p, \\ 0, & \text{если } \varepsilon_{u*}^p \geq \varepsilon_C^p, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$$q_\xi = \frac{\partial C_0}{\partial \xi} + \frac{\partial E_C}{\partial \xi} \varepsilon_{u*}^p. \quad (3.2.12)$$

Здесь ε_{u*}^p – длина дуги вязкопластической деформации (накопленная вязкопластическая деформация); $\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$ – интенсивность скоростей вязкопластической деформации (скорость накопленной вязкопластической деформации); E_c – параметр, характеризующий скорость изменения размера поверхности нагружения, ε_c^p – предел изотропного разупрочнения, $C_0(\xi)$ – начальное значение размера поверхности нагружения.

Смещение поверхности нагружения, позволяющее описывать участок диаграммы деформирования до предела прочности, определяется уравнением

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \dot{\varepsilon}_{u*}^p + g_a^\xi a_{ij} \dot{\xi}, \quad (3.2.13)$$

$$g = \beta \sigma_a, \quad (3.2.14)$$

$$g_a = -\beta, \quad (3.2.15)$$

$$g_a^\xi = \frac{1}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{d\xi}. \quad (3.2.16)$$

Здесь $\sigma_a(\xi)$ – предельное значение микронапряжений нелинейного типа; β – показатель экспоненты или показатель интенсивности (скорости) образования микронапряжений нелинейного типа.

Вязкопластические деформации зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса. Считается, что поле скоростей вязкопластической деформации в пространстве напряжений имеет потенциал. Тогда, принимая в качестве потенциала функцию (3.2.8), тензор скоростей вязкопластической деформации будет определяться уравнением (ассоциированный с (3.2.8) закон течения, градиентальный закон течения):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p = 0, \quad (3.2.17)$$

$$\sigma_u^* = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*}. \quad (3.2.18)$$

Здесь σ_u^* – интенсивность активных напряжений.

Для получения уравнения для скорости накопленной вязкопластической деформации необходимо продифференцировать по времени интенсивность активных напряжений σ_u^* и приравнять к выражению, определяющему скорость размера поверхности нагружения $\dot{C}$, т.к. из (3.2.8) следует, что

$$\dot{\sigma}_u^* = \dot{C}. \quad (3.2.19)$$

Скорость интенсивности активных напряжений:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_u^* &= \frac{3 s_{ij}^* (\dot{s}_{ij} - \dot{a}_{ij})}{2 \sigma_u^*} = \\ &= \frac{3 s_{ij}^* \dot{s}_{ij}}{2 \sigma_u^*} - g \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\sigma_u^*} - g_a \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p - g_a^\xi \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \dot{\xi}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Следует отметить, что

$$s_{ij}^* \dot{s}_{ij} = s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}. \quad (3.2.21)$$

Тогда, с учетом выражения (3.2.18)

$$\dot{\sigma}_u^* = \frac{3 s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{2 \sigma_u^*} - \left(g + g_a \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \right) \dot{\varepsilon}_{u*}^p - \left(g_a^\xi \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \right) \dot{\xi}. \quad (3.2.22)$$

Приравнявая выражения (3.2.22) и (3.2.10), разрешая относительно $\dot{\varepsilon}_{u*}^p$, можно получить уравнение, связывающее скорость накопленной вязкопластической деформации и скорости напряжений

$$\frac{3 s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{2 \sigma_u^*} - \left(g + g_a \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \right) \dot{\varepsilon}_{u*}^p - \left(g_a^\xi \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*} \right) \dot{\xi} = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon_{u*}^p} \dot{\varepsilon}_{u*}^p + \frac{\partial C}{\partial \xi} \dot{\xi}, \quad (3.2.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \frac{1}{E^*} \left[\frac{3 s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{2 \sigma_u^*} - B^\xi \dot{\xi} \right], \quad (3.2.24)$$

$$E^* = q_\varepsilon + g + g_a a_u^*, \quad (3.2.25)$$

$$B^\xi = q_\xi + g_a^\xi a_u^* \quad (3.2.26)$$

$$a_u^* = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*}. \quad (3.2.27)$$

Для получения уравнения, связывающего скорость накопленной вязкопластической деформации и скорости деформаций, в уравнение (3.2.24) подставляется выражение, следующее из закона Гука (3.2.3) и ассоциированного закона течения (3.2.17), с учетом того, что $s_{ij}^* \delta_{ij} = 0$

$$s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} + s_{ij}^* \alpha_{ij}^\xi \dot{\xi}, \quad (3.2.28)$$

$$s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^e - s_{ij}^* \alpha_{ij}^\xi \dot{\xi} \right],$$

$$s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} = 2G s_{ij}^* \left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha_{ij}^\xi \dot{\xi} - \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p \right]. \quad (3.2.29)$$

Подставляя выражение (3.2.29) в (3.2.24) и разрешая относительно $\dot{\varepsilon}_{u*}^p$, можно получить уравнение, связывающее скорость накопленной вязкопластической деформации и скорости тензора деформаций

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{u*}^p &= \frac{1}{E^*} \left[3G \frac{s_{ij}^* \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p \right)}{\sigma_u^*} - B^\xi \dot{\xi} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{u*}^p &= \frac{1}{E^*} \left[3G \left(\frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*} - \dot{\varepsilon}_{u*}^p \right) - B^\xi \dot{\xi} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{u*}^p &= \frac{1}{E^* + 3G} \left[3G \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^\xi \dot{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Уравнение (3.2.24) соответствует мягкому нагружению, а уравнение (3.2.30) – жесткому нагружению.

Условия упругого и вязкопластического состояний следуют из того, что для вязкопластического состояния необходимо, чтобы изображающая точка процесса нагружения находилась на поверхности нагружения и определяемая скорость накопленной вязкопластической деформации была положительна, а упругое состояние следует при нарушении любого из двух упомянутых условий. Тогда условия упругого и вязкопластического состояний будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u*}^p \leq 0 &- \text{упругость}; \\ \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u*}^p > 0 &- \text{вязкопластичность}. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Здесь под $\dot{\varepsilon}_{u*}^p$ подразумевается выражение, задаваемое уравнением (3.2.24) либо (3.2.30) или любым другим уравнением, связывающим скорость накопленной неупругой деформации и любой набор скоростей напряжений и деформаций (смешанное нагружение).

Разработанную модель вязкопластического деформирования замыкают следующие параметры и материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$$E(\xi), \nu, C_0(\xi), E_C(\xi), \varepsilon_C^p, \sigma_a(\xi), \beta. \quad (3.2.32)$$

Материальные параметры связаны со скоростью деформации следующими соотношениями, определенными в пределах выбранного диапазона скоростей деформации. За пределами этого диапазона значения материальных функций принимаются постоянными и равными их значениям на границах диапазона.

$$E(\xi) = K_E \xi^{n_E}, \quad (3.2.33)$$

$$C_0(\xi) = K_{C_0} \xi^{n_{C_0}}, \quad (3.2.34)$$

$$E_C(\xi) = K_{E_C} \xi^{n_{E_C}}, \quad (3.2.35)$$

$$\sigma_a(\xi) = K_{\sigma_a} \xi^{n_{\sigma_a}}. \quad (3.2.36)$$

Здесь $K_E, n_E, K_{C_0}, n_{C_0}, K_{E_C}, n_{E_C}, K_{\sigma_a}, n_{\sigma_a}$ – константы, определяемые по результатам эксперимента.

3.3 Уравнения модели вязкопластичности в случае одноосного нагружения

Приводятся уравнения модели вязкопластического деформирования в случае одноосного нагружения. Решение системы этих уравнений позволит моделировать эксперименты по одноосному растяжению и сжатию образцов материала, в том числе с разгрузкой и с изменением скорости деформации.

В случае одноосного нагружения тензоры напряжений и деформаций можно записать в виде:

$$\sigma_{11} = \sigma, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_2, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0. \quad (3.3.2)$$

Здесь σ – напряжение вдоль оси нагружения, ε_1 – деформация вдоль оси нагружения, ε_2 – деформация, перпендикулярная оси нагружения.

Тогда девиаторы напряжения и деформации примут вид

$$s_{11} = \frac{2}{3}\sigma, s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{3}\sigma, s_{12} = s_{23} = s_{31} = 0 \quad (3.3.3)$$

$$e_{11} = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), e_{22} = e_{33} = \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0. \quad (3.3.4)$$

Тензор микронапряжений можно записать в виде

$$a_{11} = \frac{2}{3}a, \quad a_{22} = a_{33} = -\frac{1}{3}a, \quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0, \quad (3.3.5)$$

где a – микронапряжение по оси нагружения.

Тогда девиатор и интенсивность активных напряжений примут вид

$$s_{11}^* = \frac{2}{3}\sigma^*, \quad s_{22}^* = s_{33}^* = -\frac{1}{3}\sigma^*, \quad s_{12}^* = s_{23}^* = s_{31}^* = 0 \quad (3.3.6)$$

$$\sigma^* = \sigma - a, \quad (3.3.7)$$

$$\sigma_u^* = |\sigma - a|. \quad (3.3.8)$$

Поскольку вязкопластическое деформирование не приводит к изменению объема материала, девиатор вязкопластической деформации можно записать в следующем виде

$$\varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p, \quad \varepsilon_{22}^p = \varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{2}\varepsilon^p, \quad \varepsilon_{12}^p = \varepsilon_{23}^p = \varepsilon_{31}^p = 0, \quad (3.3.9)$$

где ε^p – вязкопластическая деформация в направлении нагружения.

Для случая мягкого нагружения, когда известна функция напряжений, уравнение скорости накопленной вязкопластической деформации (3.2.21) с учетом условия (3.2.28) примет вид

$$\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \begin{cases} \frac{1}{E^*} [\text{sign}(\sigma^*)\dot{\sigma} - B^\xi \dot{\xi}], & \text{если } \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u*}^p > 0, \\ 0, & \text{если } \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u*}^p \leq 0, \end{cases} \quad (3.3.10)$$

$$a_u^* = \frac{3}{2} \frac{\frac{4}{9}\sigma^*a + \frac{1}{9}\sigma^*a + \frac{1}{9}\sigma^*a}{|\sigma^*|} = \text{sign}(\sigma^*)a, \quad (3.3.11)$$

$$E^* = q_\varepsilon + g + \text{sign}(\sigma^*)g_a a, \quad (3.3.12)$$

$$B^\xi = q_\xi + \text{sign}(\sigma^*)g_a^\xi a. \quad (3.3.13)$$

Ассоциированный закон течения (3.2.14) определяет скорость вязкопластической деформации

$$\dot{\varepsilon}^p = \text{sign}(\sigma^*) \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (3.3.14)$$

Как правило, экспериментальные исследования по одноосному нагружению образцов материалов проводят при известной заданной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_1$. Тогда скорость вязкопластической деформации необходимо выразить через скорость деформации образца в направлении нагружения ε_1 . Закон Гука в одноосном случае примет вид

$$\dot{\sigma} = E (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}^p - \alpha_1^\xi \dot{\xi}), \quad (3.3.15)$$

$$\alpha_1^\xi = -\frac{\sigma}{E^2} \frac{dE}{d\xi}.$$

Подставив (3.3.15) в (3.3.10) получим выражение для скорости вязкопластической деформации

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{u*}^p &= \begin{cases} \frac{1}{E^*} [\text{sign}(\sigma^*) E (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}^p) - B^\xi \dot{\xi}], & \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u*}^p > 0, \\ 0, & \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u*}^p \leq 0, \end{cases} \\ \dot{\varepsilon}_{u*}^p &= \begin{cases} \frac{\text{sign}(\sigma^*) E \dot{\varepsilon}_1 - B^\xi \dot{\xi}}{E^* + E}, & \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u*}^p > 0, \\ 0, & \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u*}^p \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Скорость микронапряжений в случае одноосного нагружения определяется следующим образом

$$\dot{a} = g \dot{\varepsilon}^p + g_a a \dot{\varepsilon}_{u*}^p + g_a^\xi a \dot{\xi}. \quad (3.3.17)$$

Размер поверхности нагружения описывается эволюционным уравнением (3.2.7).

В соответствии с законом Гука (3.2.3), с учетом (3.2.1), можно определить скорости деформаций при одноосном деформировании.

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^p, \quad (3.3.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{\nu \dot{\sigma}}{E} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^p = -\nu \dot{\varepsilon}_1 + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \dot{\varepsilon}^p. \quad (3.3.19)$$

Тогда эволюционное уравнение для скорости деформации можно получить из (3.2.2) с учетом (3.3.20)

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{2}{3} |\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2|,$$

$$\xi = \frac{2}{3} \left| (1 + \nu) \dot{\epsilon}_1 + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \dot{\epsilon}_1^p \right|. \quad (3.3.20)$$

Примем, что при упругом деформировании коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$, тогда:

$$\xi = |\dot{\epsilon}_1|, \quad (3.3.21)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{\epsilon}_1}{|\dot{\epsilon}_1|} \ddot{\epsilon}_1 = \text{sign}(\dot{\epsilon}_1) \ddot{\epsilon}_1. \quad (3.3.22)$$

На основе полученных уравнений разработана программа для расчета напряжения при одноосном жестком нагружении (приложение Г).

3.4 Метод идентификации материальных параметров

Метод идентификации материальных параметров представлен на примере определения материальных параметров жаропрочной стали 12X18H10T при температуре 700 °С. Для этого используются экспериментальные данные, полученные в разделе 3.1.

Исходными данными для определения материальных параметров сплава является диаграмма, связывающая нагрузку, приложенную к образцу, его удлинение, начальный диаметр образца, база, на которой проводится измерение удлинения, и заданная скорость удлинения образца. Сначала определяются параметры для каждой из скоростей деформации 0,0156; 0,078; 0,078 и 1,56 мин⁻¹, после чего усредняются либо аппроксимируются уравнениями (3.2.33) – (3.2.36). Для стали 12X18H10T и сплава ЭП741НП при высоких температурах модуль упругости E не зависит от скорости деформации и принимается постоянными. Упругие параметры E, ν определяются стандартными способами либо берутся из справочной литературы.

Далее рассматривается алгоритм определения параметров материала.

1) Определение вязкопластической деформации

Построение истинных диаграмм деформирования было описано в разделе 3.1. На их основе диаграммы деформирования образцов перестраиваются в диаграммы вязкопластического деформирования. Вязкопластическая деформация определяется как:

$$\varepsilon^p = \varepsilon_1 - \frac{\sigma}{E}. \quad (3.4.1)$$

Диаграммы вязкопластического деформирования жаропрочного сплава при температуре 700 °С приведены на рисунке 3.4.1.

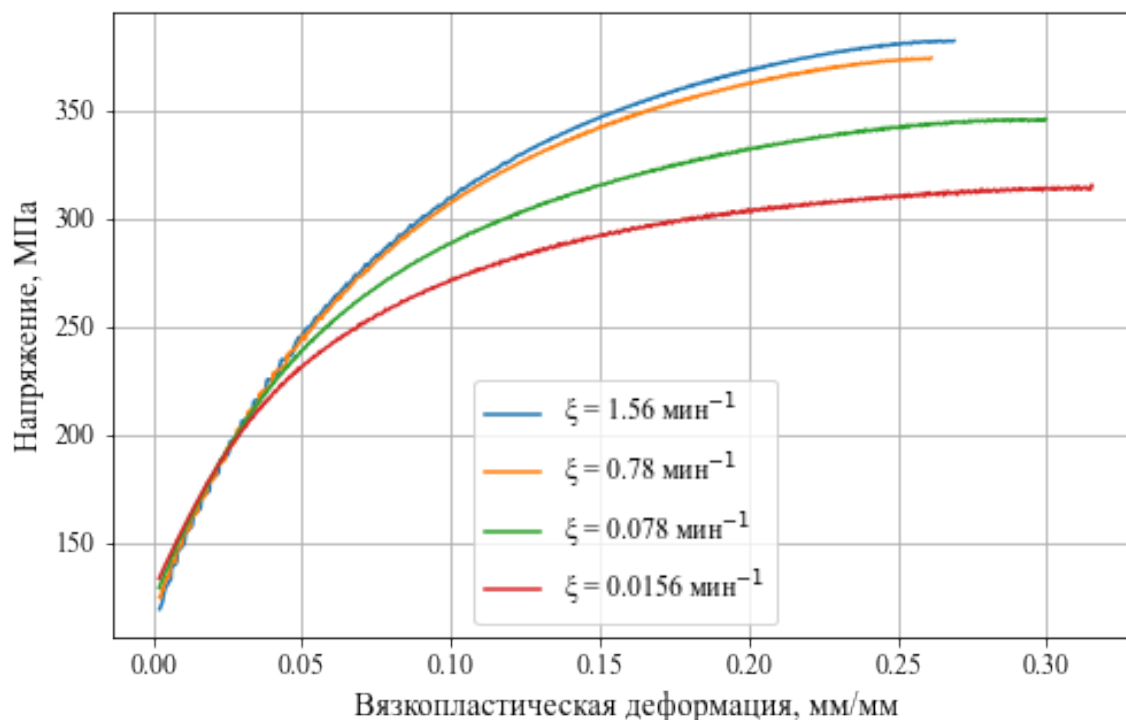


Рисунок 3.4.1 – Вязкопластическое деформирование.

2) Определение скорости изотропного E_C разупрочнения (упрочнения) для каждой скорости деформации

На построенных диаграммах вязкопластического деформирования перед разрушением присутствует линейный участок. Тангенс угла наклона этого участка определяет скорость изотропного разупрочнения (параметр E_C). Для его нахождения проводится аппроксимация линейного участка линейной

зависимостью по методу наименьших квадратов. Результаты аппроксимации приведены на рисунке 3.4.2.

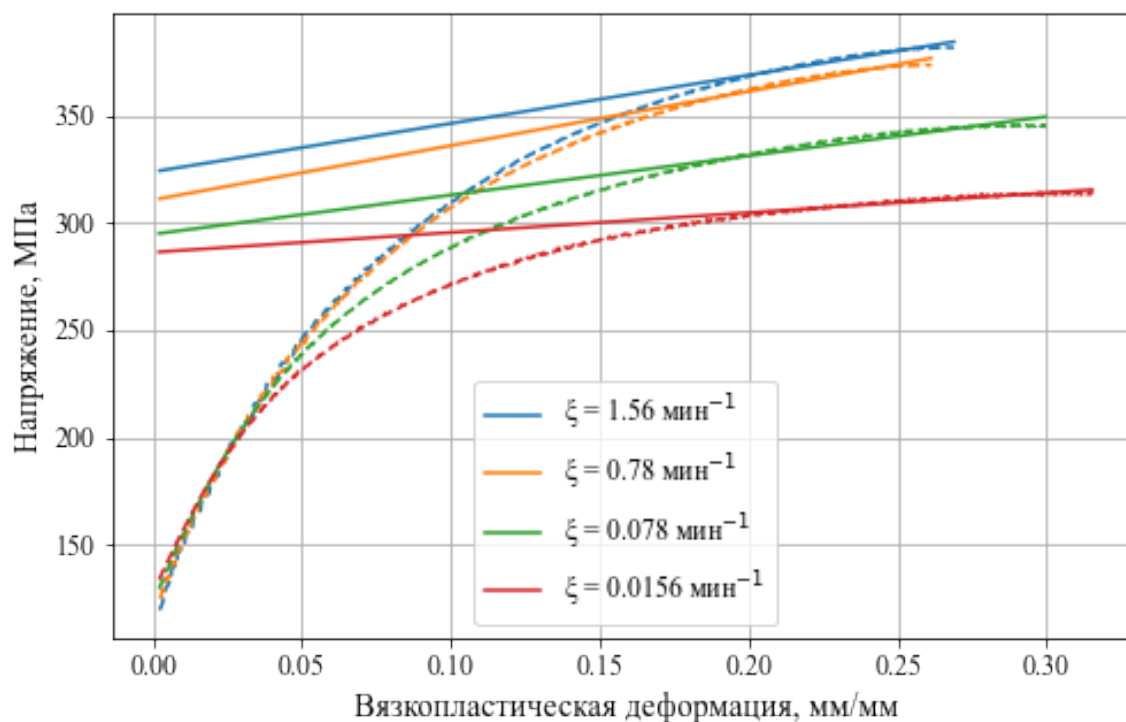


Рисунок 3.4.2 – Модуль изотропного разупрочнения.

Далее из диаграмм вязкопластического деформирования исключается изотропное разупрочнение, для чего проводится пересчет напряжений по следующей формуле:

$$\sigma' = \sigma - E_c \varepsilon^p. \quad (3.4.2)$$

Полученные диаграммы вязкопластического деформирования жаропрочного сплава при температуре 700 °С без изотропного упрочнения приведены на рисунке 3.4.3.

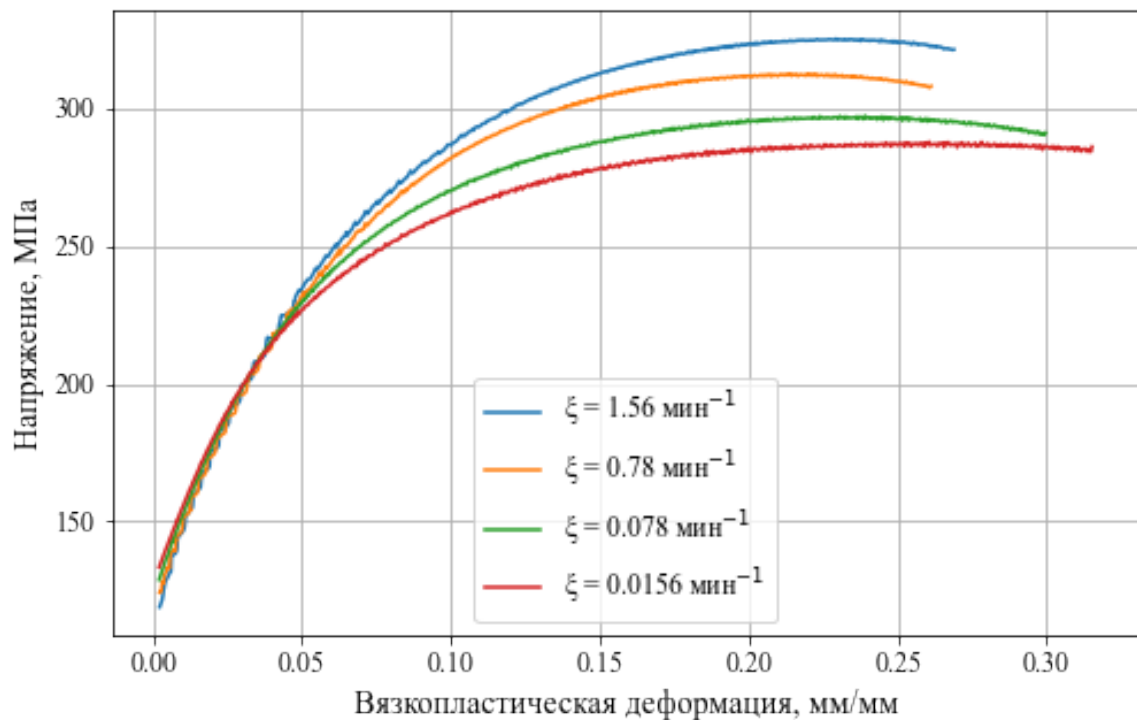


Рисунок 3.4.3 – Диаграмма вязкопластического деформирования без изотропного разупрочнения

3) Определение начального размера поверхности нагружения C_0 для каждой скорости деформации

Начальный размер поверхности нагружения определяется напряжением, разделяющим область упругого и вязкопластического деформирования. Начальный размер поверхности нагружения можно определить путем экстраполяции первых точек диаграммы до нуля. Начальный участок диаграммы вязкопластического деформирования и значения начального размера поверхности нагружения приведены на рисунке 3.4.4.

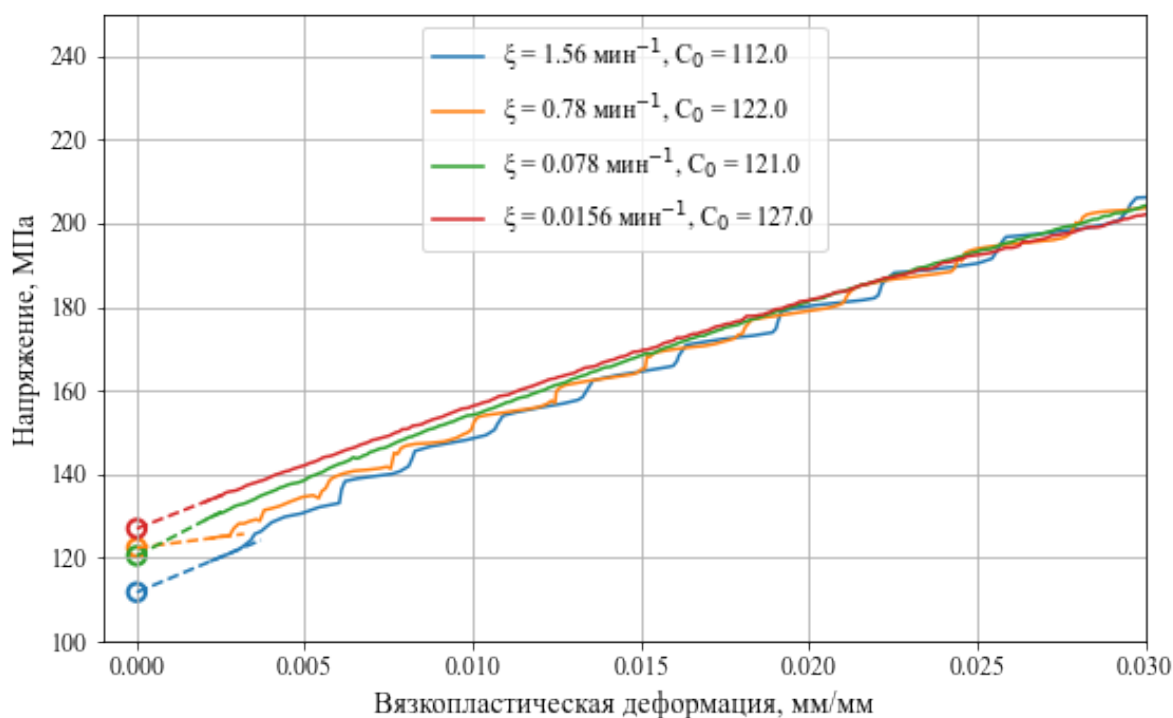


Рисунок 3.4.4 – Начальный размер поверхности нагружения.

- 4) Уточнение начального размера поверхности нагружения C_0 с учетом предела прочности материала

Поскольку предел текучести, определяющий начальное значение размера поверхности нагружения, определяется по техническому допуску, а начальный участок диаграмм вязкопластического деформирования имеет разброс, который может приводить к существенной ошибке при определении этого параметра, проводится его корректировка. Предполагается, что начальный размер поверхности нагружения пропорционален пределу прочности, определенному за вычетом изотропного разупрочнения σ_B' . Тогда начальный размер поверхности нагружения C_0^{corr} может быть определен по следующей формуле:

$$C_0^{corr} = \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^n \frac{C_{0i}}{\sigma_{B'i}}, \quad (3.4.3)$$

где C_0 – определенный по диаграмме вязкопластического деформирования начальный размер поверхности нагружения, n – суммарное количество скоростей деформации.

На рисунке 3.4.5 диаграммы изменения начального значения размера поверхности нагружения по результатам корректировки.

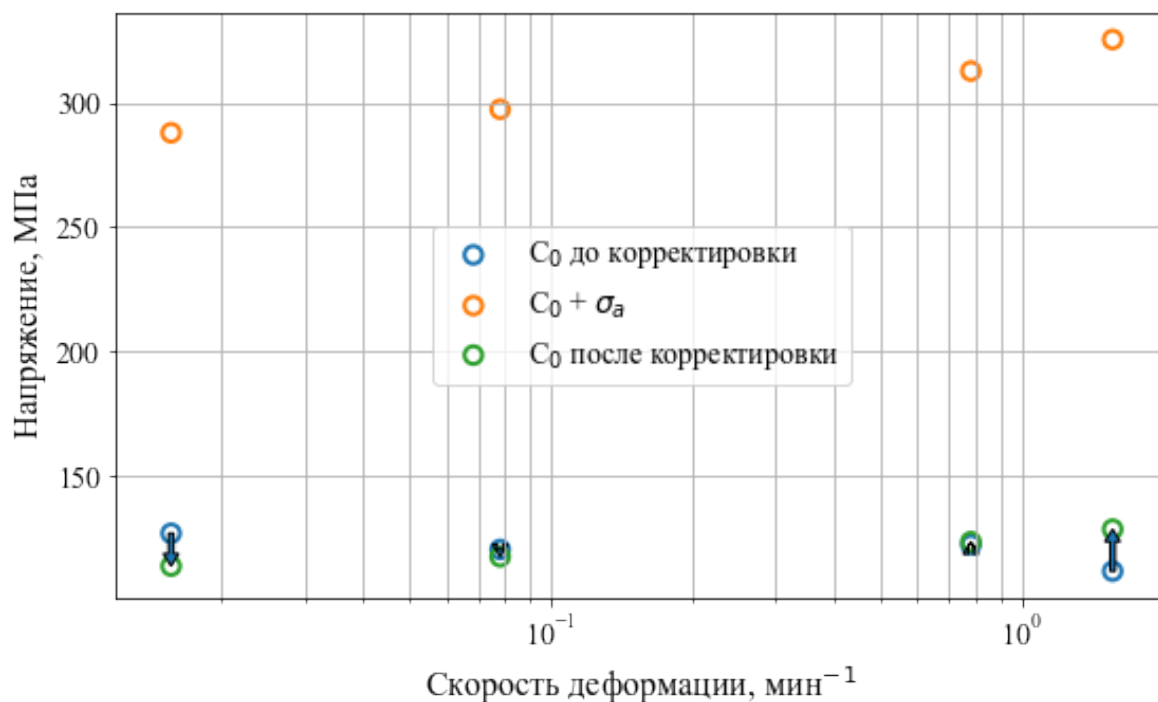


Рисунок 3.3.5 – Диаграммы изменения начального значения размера поверхности нагружения по результатам корректировки.

5) Определение параметров анизотропного упрочнения σ_a и β для каждой скорости деформации

По определенным ранее параметрам изотропного разупрочнения E_c и C_0 диаграмма вязкопластического деформирования перестраивается в диаграмму анизотропного упрочнения. Для этого строится зависимость микронапряжений a от вязкопластической деформации. Микронапряжения определяются по следующей формуле:

$$a = \sigma - E_c \varepsilon^p - C_0. \quad (3.4.4)$$

Диаграммы микронапряжений жаропрочного сплава при температуре 700 °С приведены на рисунке 3.4.6.

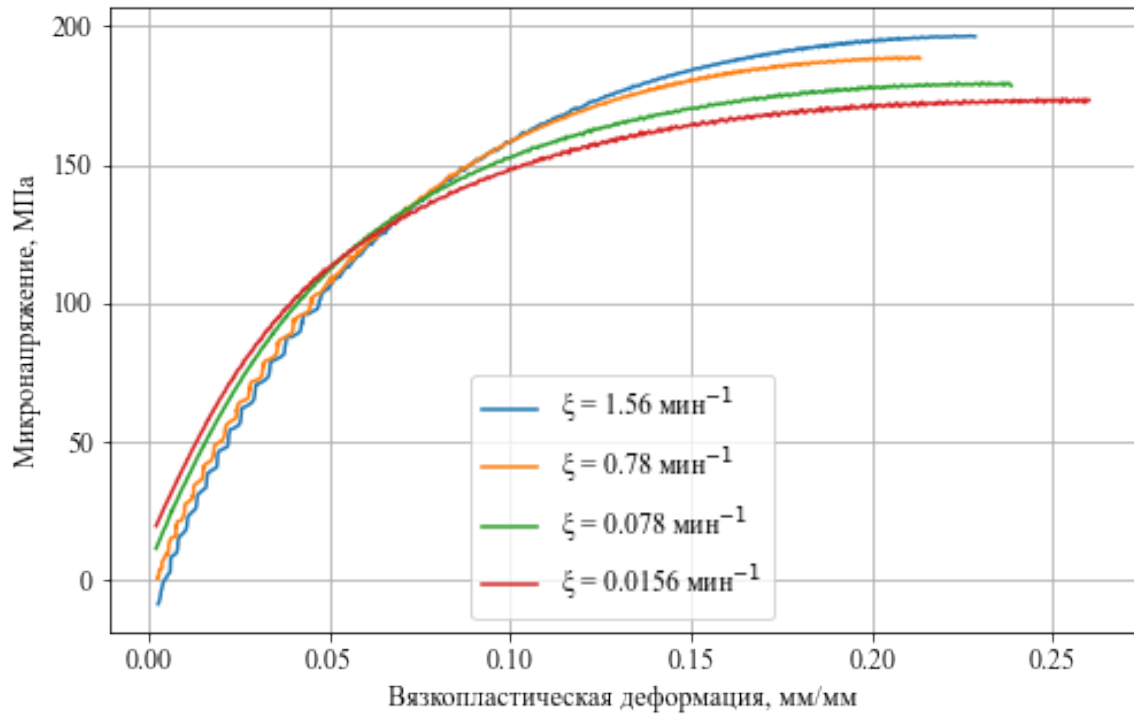


Рисунок 3.4.6 – Диаграммы микронапряжений.

В случае растяжения с постоянной скоростью деформации

$$\varepsilon_{u*}^p = \dot{\varepsilon}^p, \quad \dot{\xi} = 0, \quad (3.4.5)$$

тогда из (3.3.17) можно найти уравнение, связывающее модуль анизотропного упрочнения $\frac{\partial a}{\partial \varepsilon^p}$ с микронапряжением a :

$$\dot{a} = g\dot{\varepsilon}^p + g_a a \dot{\varepsilon}^p, \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \varepsilon^p} = \beta \sigma_a - \beta a. \quad (3.4.7)$$

Поскольку уравнение (3.4.7) имеет линейный вид, то по экспериментальным данным необходимо найти зависимость $\frac{\partial a}{\partial \varepsilon^p} = f(a)$, аппроксимировать её линейной функции и вычислить параметры σ_a и β . Нахождение частной производной микронапряжений по вязкопластической деформации можно найти численно с использованием конечных разностей:

$$\frac{\partial a}{\partial \varepsilon^p} = \frac{\Delta a}{\Delta \varepsilon^p} = \frac{a_{i+1} - a_i}{\varepsilon_{i+1}^p - \varepsilon_i^p}. \quad (3.4.8)$$

Здесь a_i , a_{i+1} , ε_i^p и ε_{i+1}^p – текущая и следующая точки микронапряжений и вязкопластической деформации экспериментальной диаграммы микронапряжений.

На рисунке 3.4.7 приведены диаграммы, связывающие модуль анизотропного упрочнения с микронапряжением, и их аппроксимация.

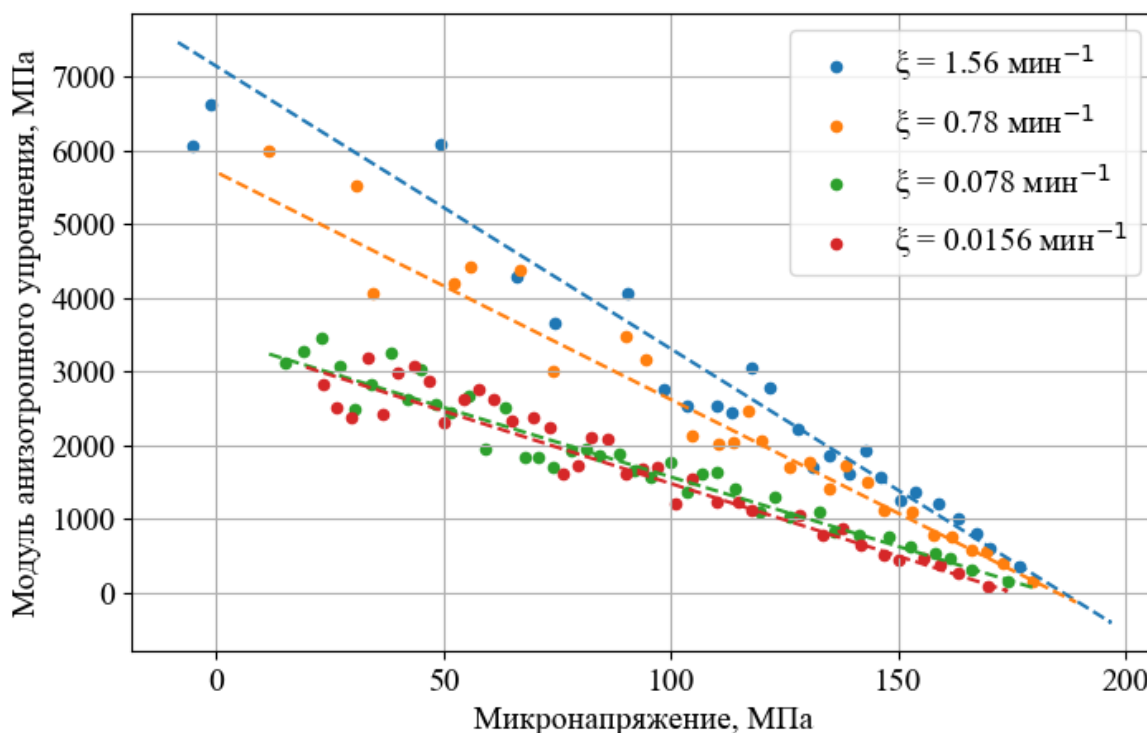


Рисунок 3.4.7 – Зависимость модуля анизотропного упрочнения от микронапряжения

6) Определение материальных функций для набора скоростей деформации

Далее полученные материальные параметры необходимо аппроксимировать с помощью уравнений (3.2.34) – (3.2.36) и получить материальные функции, позволяющие находить значения параметров для всего диапазона скоростей деформаций. Поскольку параметры E и β приняты постоянными, то при проведении расчетов используем их среднее значение. На рисунках 3.4.8 – 3.4.10 приведены определенные по результатам эксперимента параметры материала при температуре 700 °С и их аппроксимирующие функции.

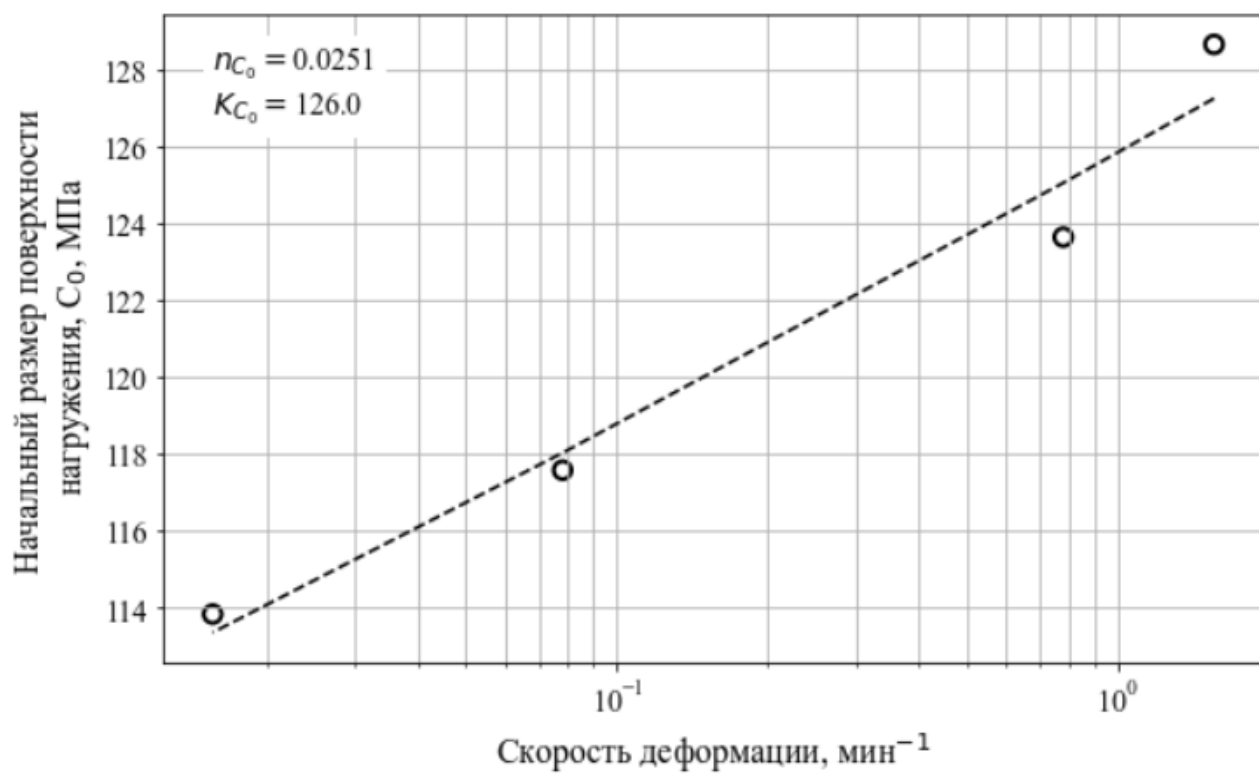


Рисунок 3.4.8 – Функция начального размера поверхности нагружения

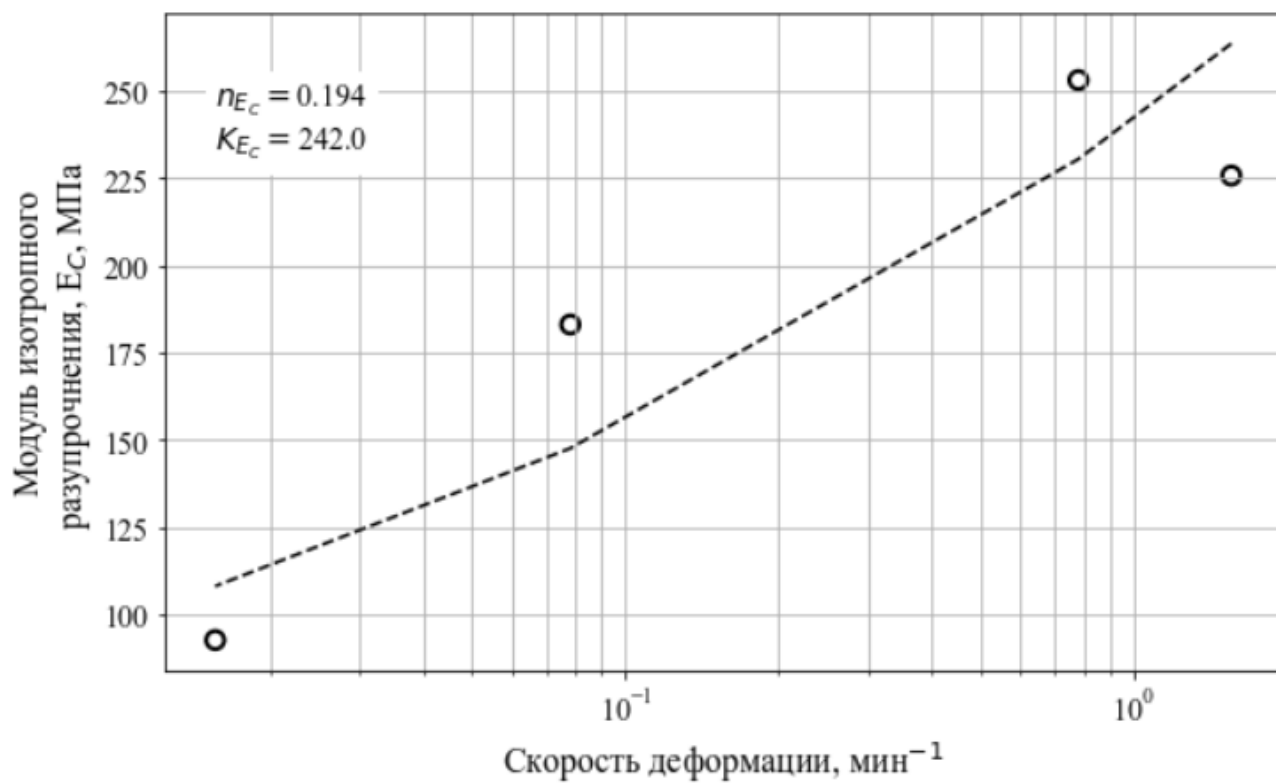


Рисунок 3.4.9 – Функция модуля изотропного разупрочнения

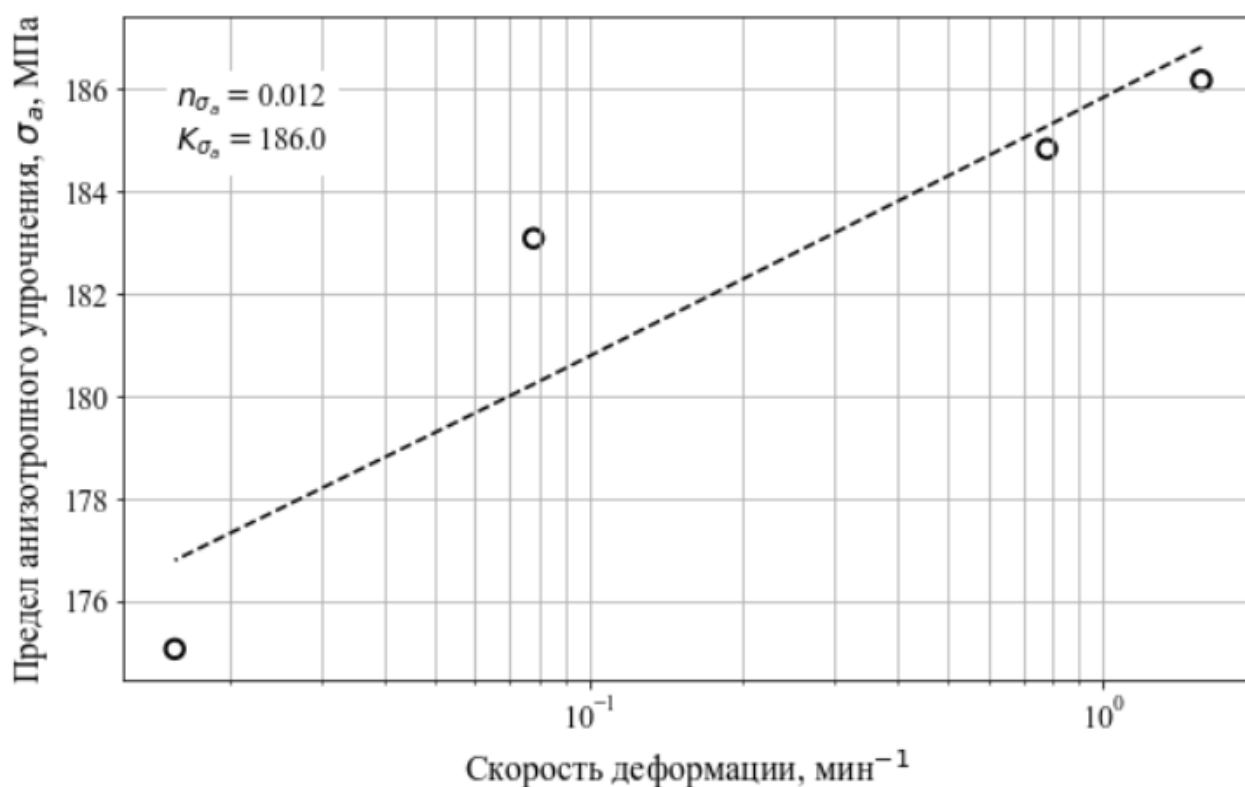


Рисунок 3.4.10 – Функция предела анизотропного упрочнения

3.5 Материальные параметры материалов

В таблице 3.5.1 приведены материальные параметры материала ВВ751П для температур 1050, 1100 и 1150 °С. В таблице 3.5.2 приведены материальные параметры материала ЭП741НП для температур 1050, 1100 и 1140 °С. В таблице 3.5.3 приведены материальные параметры жаропрочной стали 12Х18Н10Т для температуры 700 °С. Параметр E для материалов ЭП741НП и 12Х18Н10Т не зависит от скорости деформации и принят постоянным. Параметры степенных функций $K_E, n_E, K_{C_0}, n_{C_0}, K_{E_C}, n_{E_C}, K_{\sigma_a}, n_{\sigma_a}$ определяют связь параметров E, E_C, C_0 и σ_a , выраженных в МПа со скоростью деформации в мин^{-1} .

Таблица 3.5.1 – Параметры материала ВВ751П

$T, ^\circ\text{C}$	K_E	n_E	ν	ε_C^p	K_{C_0}	n_{C_0}	K_{E_C}	n_{E_C}	K_{σ_a}	n_{σ_a}	β
1050	10050	0,0756	0,3	0,45	745	0,166	-1550	0	196	0,16	253
1100	8940	0,113	0,3	0,45	456	0,168	-1600	0	165	0,17	217
1150	6990	0,138	0,3	0,45	255	0,166	-779	0	92,1	0,173	252

Таблица 3.5.2 – Параметры жаропрочного сплава ЭП741НП

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	ν	ε_C^p	K_{C_0}	n_{C_0}	K_{E_C}	n_{E_C}	K_{σ_a}	n_{σ_a}	β
1050	6778	0,3	0,35	394	0,1088	-679	0,0784	30	0	83
1100	4120	0,3	0,35	276	0,1764	-166	0,6889	20	0	72
1140	3244	0,3	0,35	128	0,1648	-153	0,1907	30	0	65

Таблица 3.5.3 – Параметры материала 12X18H10T

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{ГПа}$	ν	ε_C^p	K_{C_0}	n_{C_0}	K_{E_C}	n_{E_C}	K_{σ_a}	n_{σ_a}	β
700	155	0,3	-	126	0.0251	243	0.194	186	0.012	27

3.6 Верификация модели вязкопластичности

Для верификации разработанной модели деформирования и метода идентификации материальных функций с помощью разработанной программы проведено моделирование экспериментов по растяжению и сжатию образцов из материалов ВВ751П и ЭП741НП с разными скоростями деформации. Проведена серия расчетов диаграмм растяжения материала ВВ751П со скоростью деформации 1,9; 0,32; 0,032; 0,016 и 0,0063 мин⁻¹ при температуре 1050, 1100 и 1150 °С, диаграмм сжатия материала ВВ751П со скоростями деформации 0,2; 0,1; 0,05 и 0,02 мин⁻¹ при температуре 1050 °С и диаграмм сжатия материала ЭП741НП со скоростями деформации 0,3; 0,18 и 0,06 мин⁻¹ при температуре 1140 °С. На рисунках 3.6.1 – 3.6.8 приведены результаты сравнения расчетов и экспериментов в инженерных координатах. Исходными данными для проведения расчетов являлись заданная скорость деформации и определенные параметры материала. Расчетные диаграммы растяжения и сжатия образцов коррелируют с диаграммами, полученными по результатам экспериментов. На графиках сплошной линией отмечен расчет, кружочками – эксперимент.

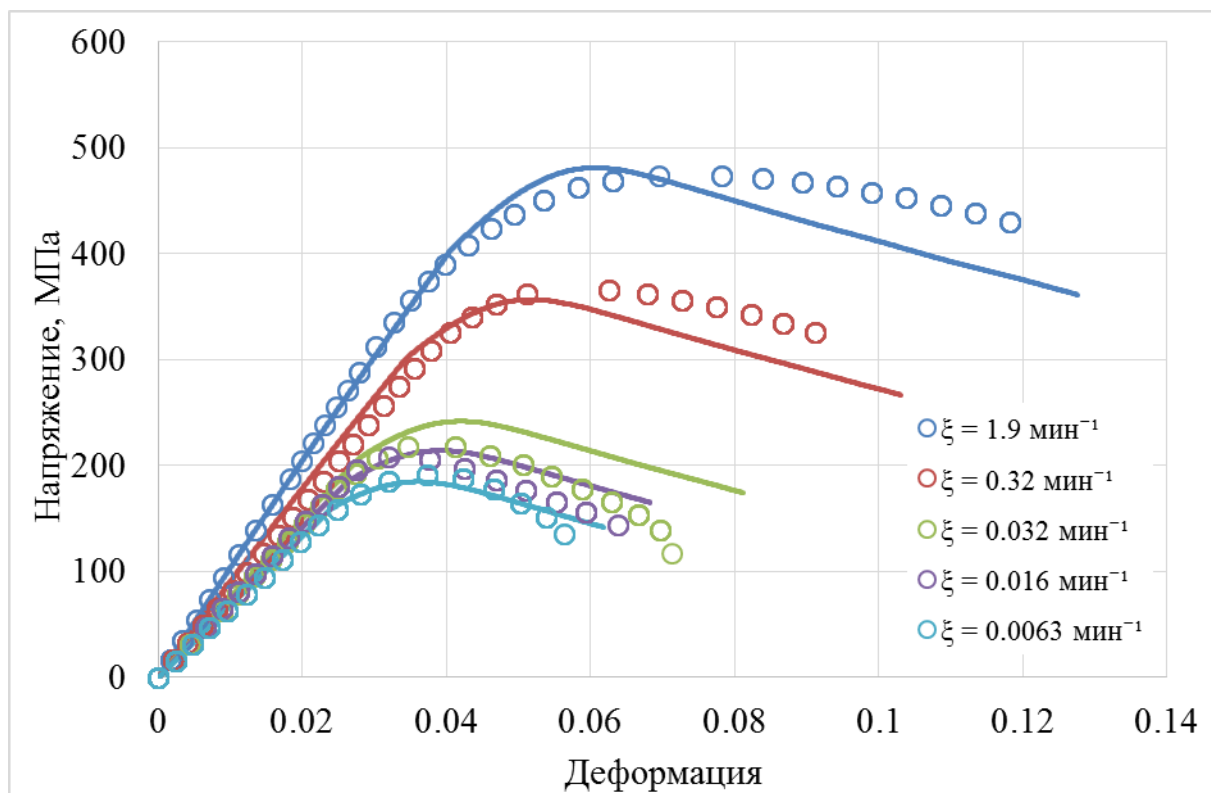


Рисунок 3.6.1 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1050 °С

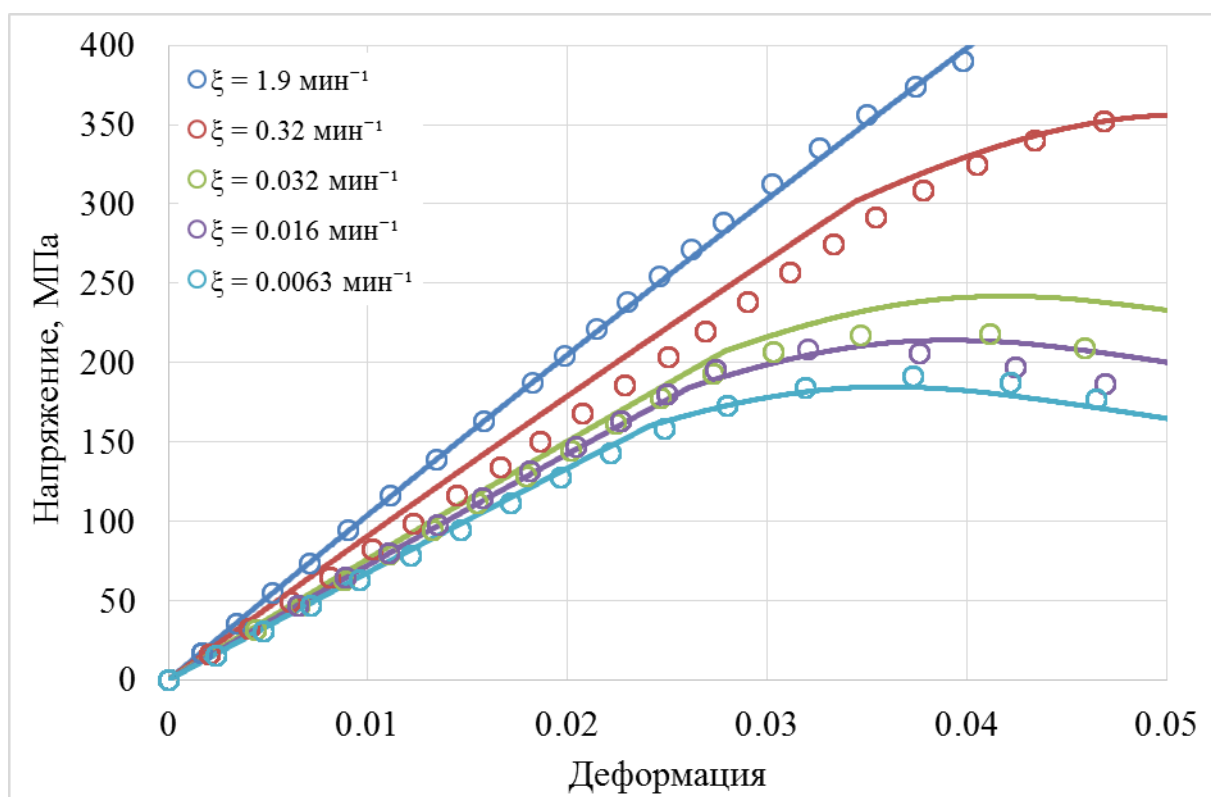


Рисунок 3.6.2 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1050 °С в увеличенном масштабе

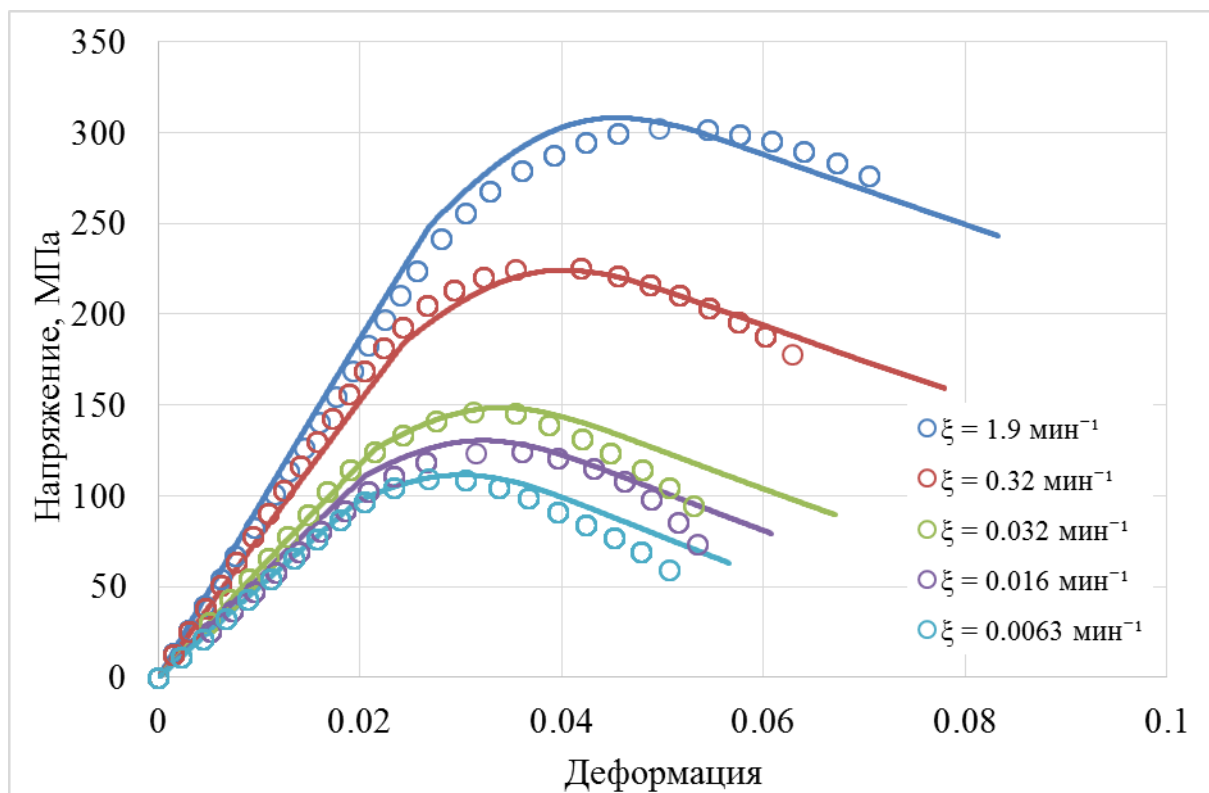


Рисунок 3.6.3 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1100 °С

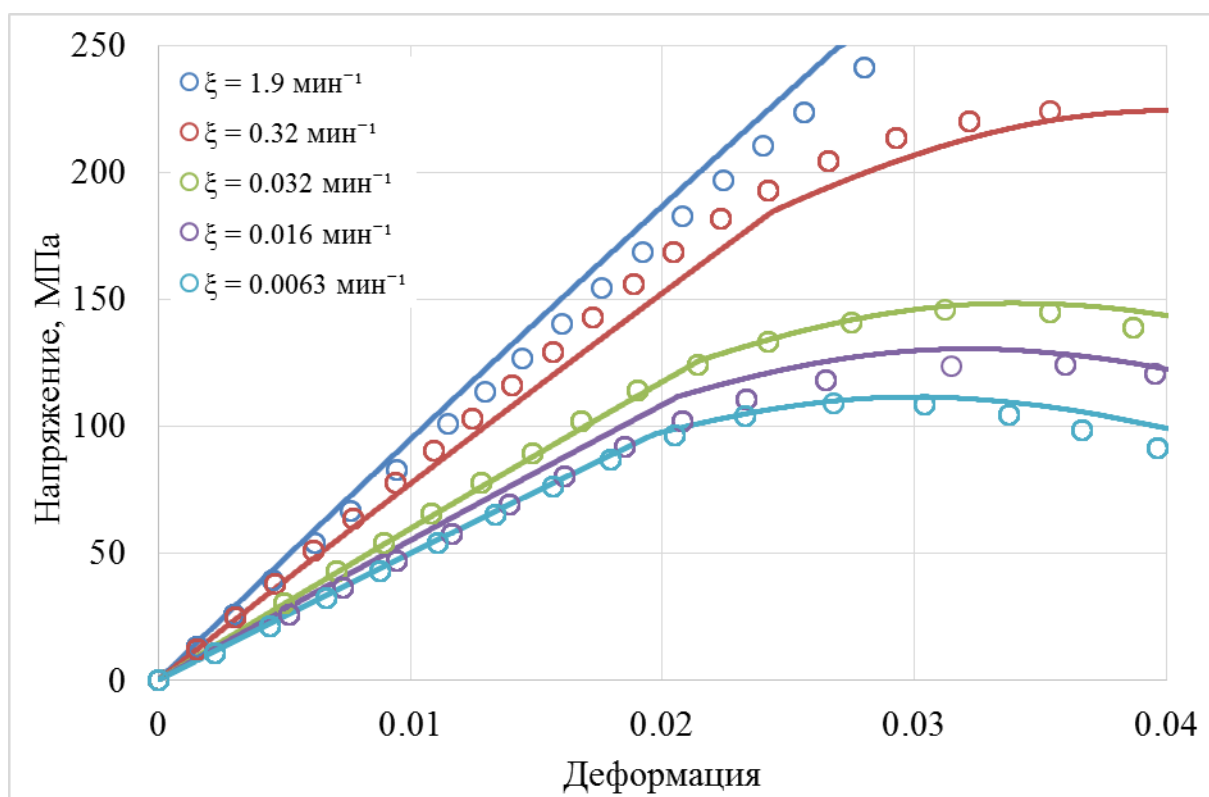


Рисунок 3.6.4 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1100 °С в увеличенном масштабе

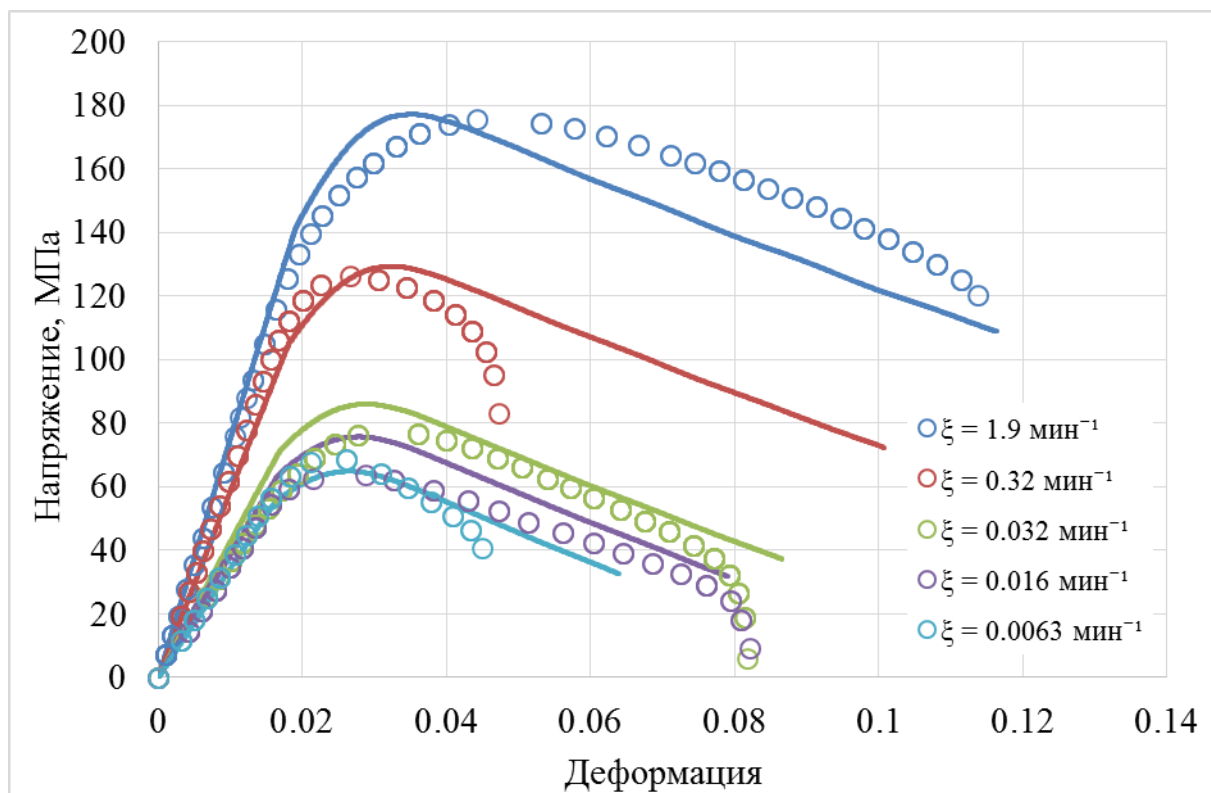


Рисунок 3.6.5 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1150 °С

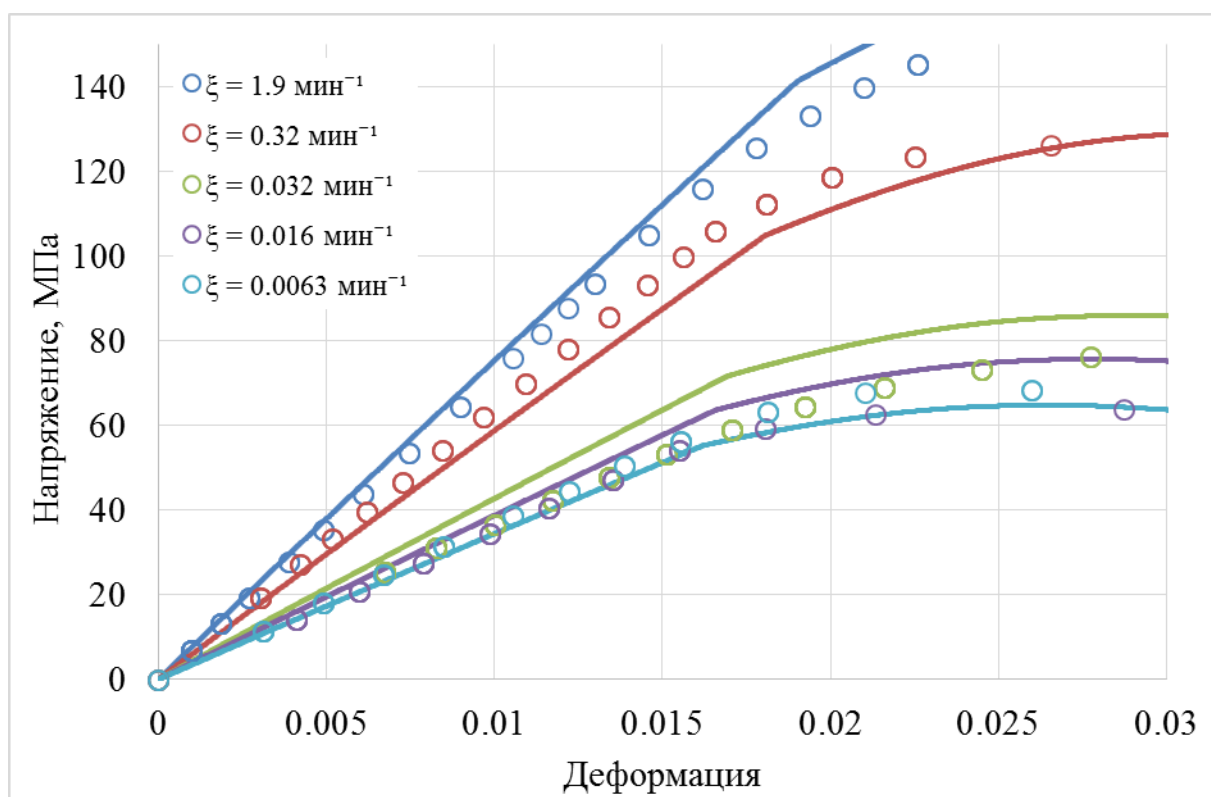


Рисунок 3.6.6 – Расчетные и экспериментальные диаграммы растяжения материала BV751П при температуре 1150 °С в увеличенном масштабе

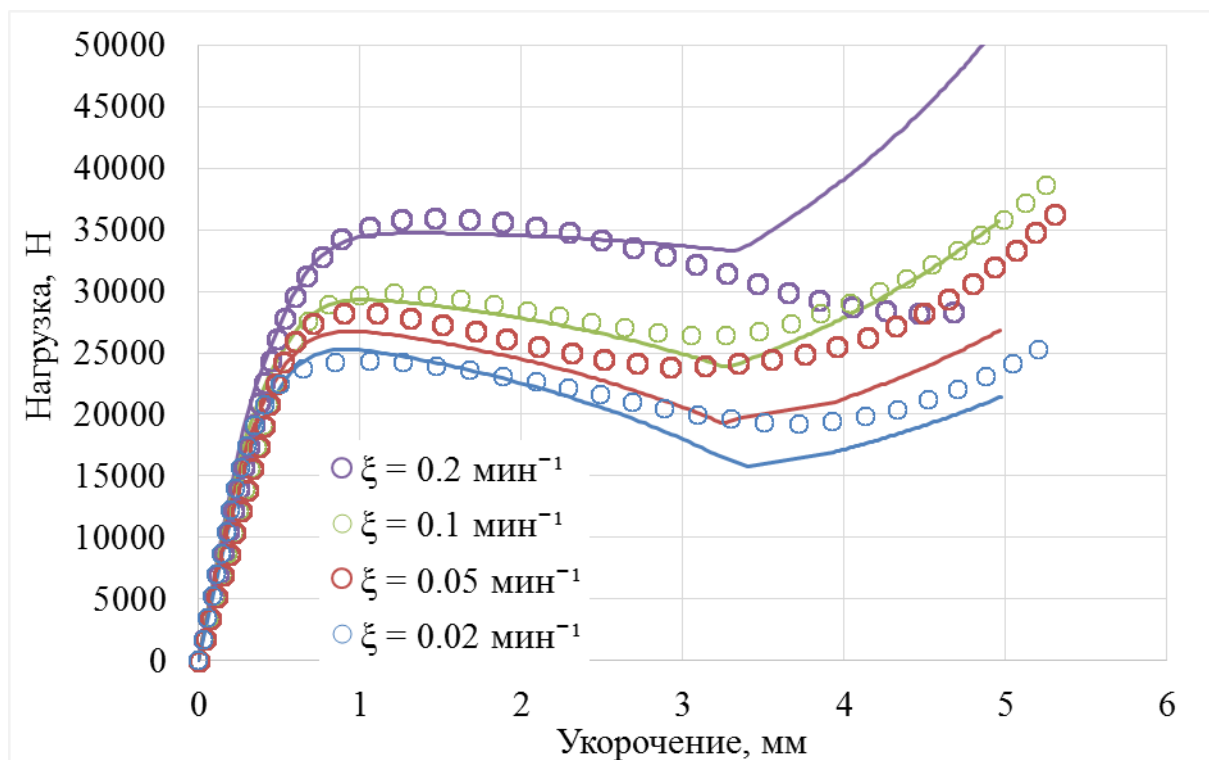


Рисунок 3.6.7 – Расчетные и экспериментальные диаграммы сжатия материала BV751П при температуре 1050 °С

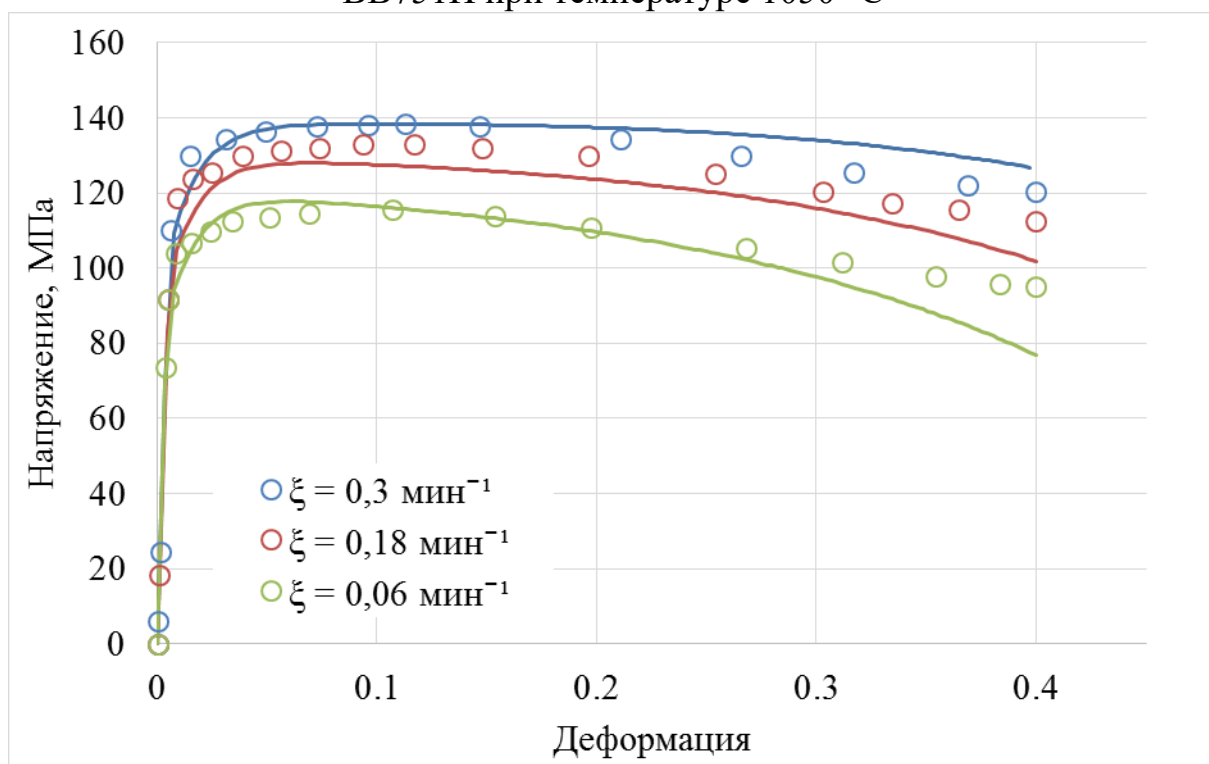


Рисунок 3.6.8 – Расчетные и экспериментальные диаграммы сжатия материала ЭП741НП при температуре 1040 °С

Проведена серия расчетов диаграмм растяжения с разгрузкой в инженерных координатах для материала BV751П при температуре 1050, 1100 и 1150 °С со

скоростью деформации $1,9 \text{ мин}^{-1}$ и последующем растяжении до разрушения. На рисунках 3.6.9 - 3.6.11 приведены результаты проведенных испытаний и их сравнение с результатами испытаний без разгрузки и расчет.

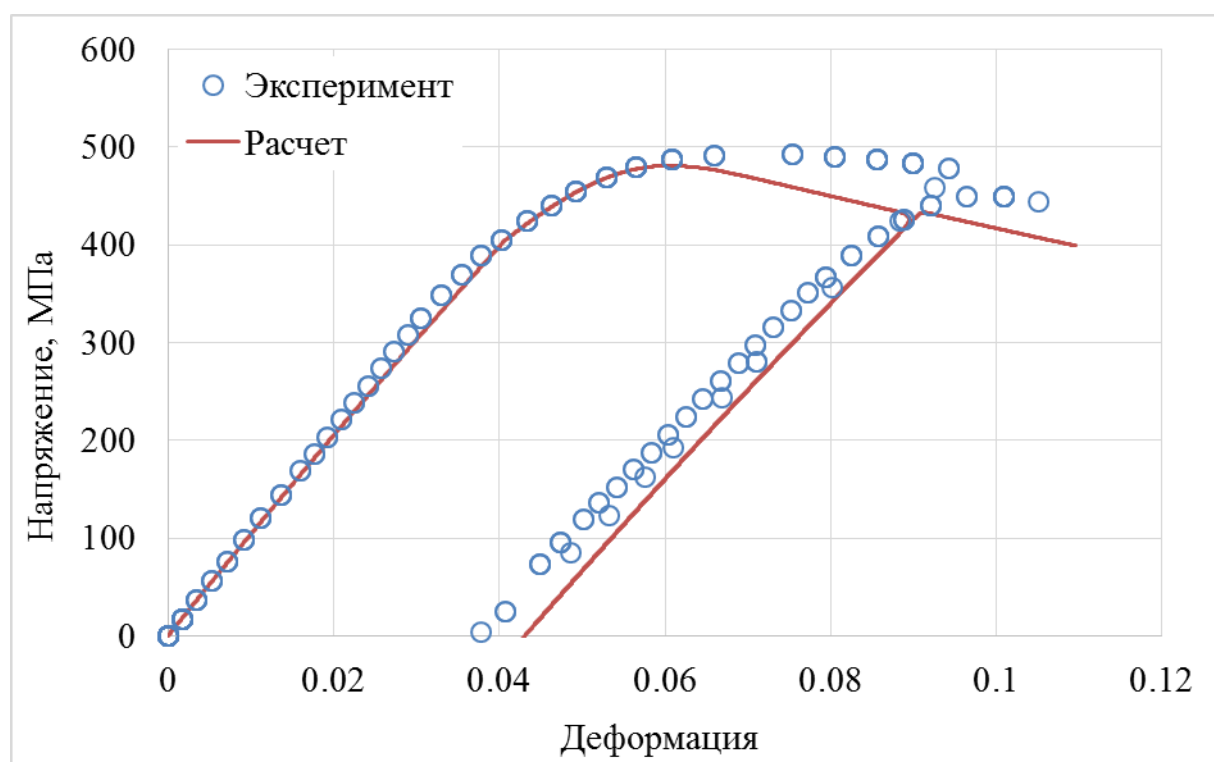


Рисунок 3.6.9 – Расчетная и экспериментальная диаграмма деформирования материала ВВ751П при температуре 1050 °С с разгрузкой

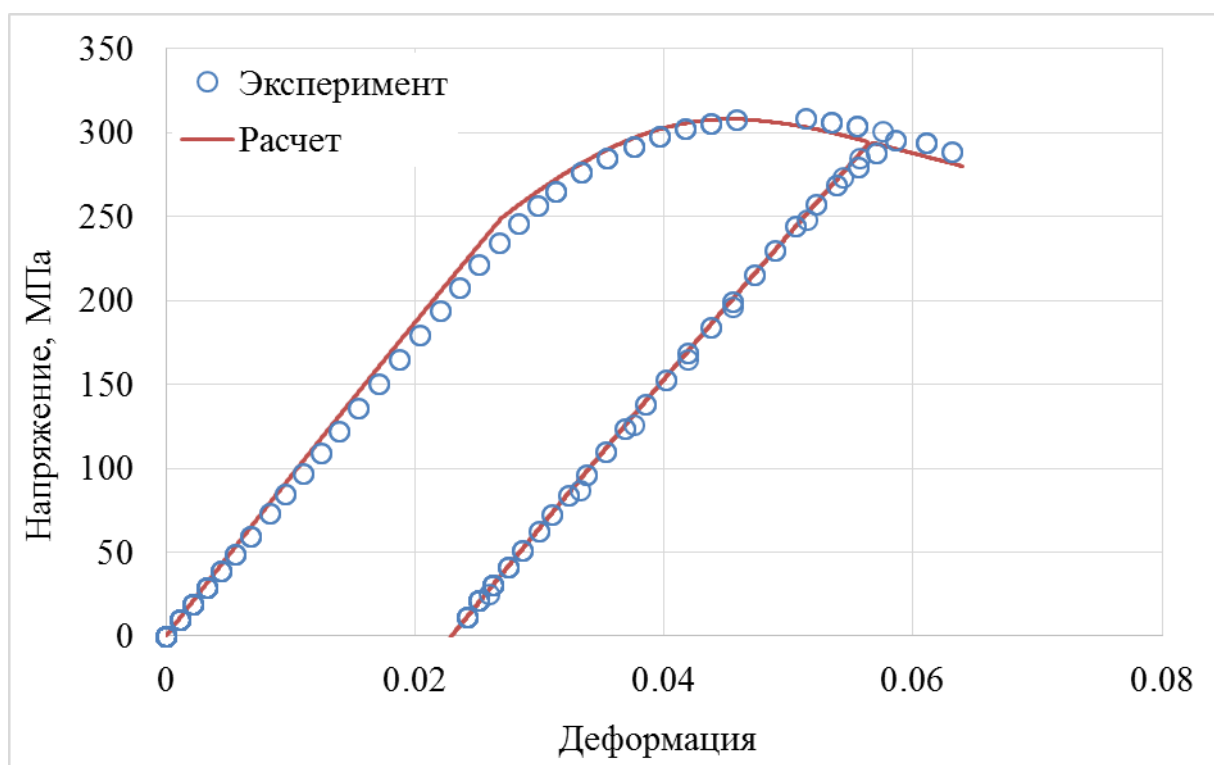


Рисунок 3.6.10 – Расчетная и экспериментальная диаграмма деформирования материала ВВ751П при температуре 1100 °С с разгрузкой

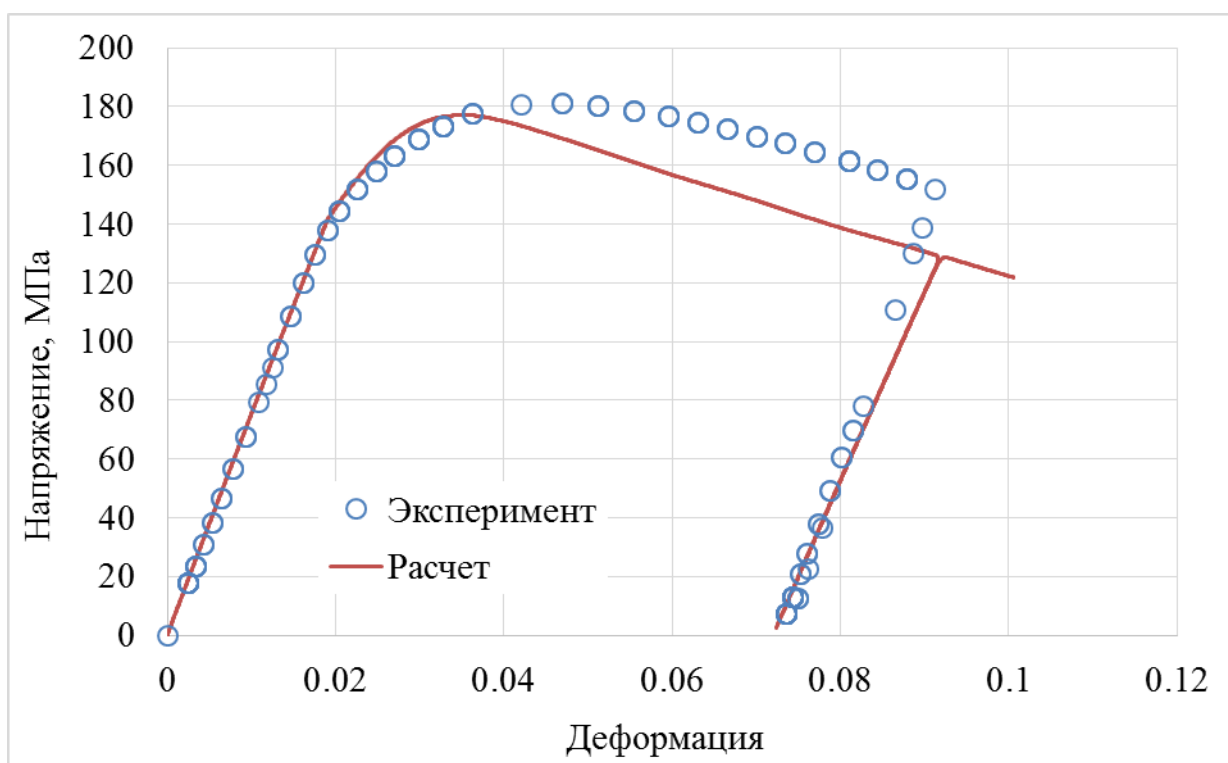


Рисунок 3.6.11 – Расчетная и экспериментальная диаграмма деформирования материала ВВ751П при температуре 1150 °С с разгрузкой

Приведенные выше результаты моделирования хорошо коррелируют с результатами проведенных экспериментов, что позволяет сделать вывод об адекватности разработанной модели и метода идентификации её параметров. Разработанная модель учитывает все особенности деформирования материалов ВВ751П и ЭП741НП при изотермической раскатке изготовленных из них заготовок. Предложенную модель вязкопластичности можно использовать для моделирования процесса раскатки, так как она учитывает все особенности деформирования материала при различных скоростях деформации и больших пластических деформациях в условиях высоких температур.

Для верификации разработанной модели деформирования и метода идентификации материальных функций проведено моделирование экспериментов по растяжению образцов из материала 12Х18Н10Т со скоростями деформации 0,156; 0,078 и 0,78 мин⁻¹ при температуре 700 °С. На рисунке 3.6.12 приведены результаты расчетов в истинных напряжениях и логарифмической деформации и экспериментальные данные. Исходными данными для проведения расчетов являлись заданная скорость деформации и определенные параметры материала.

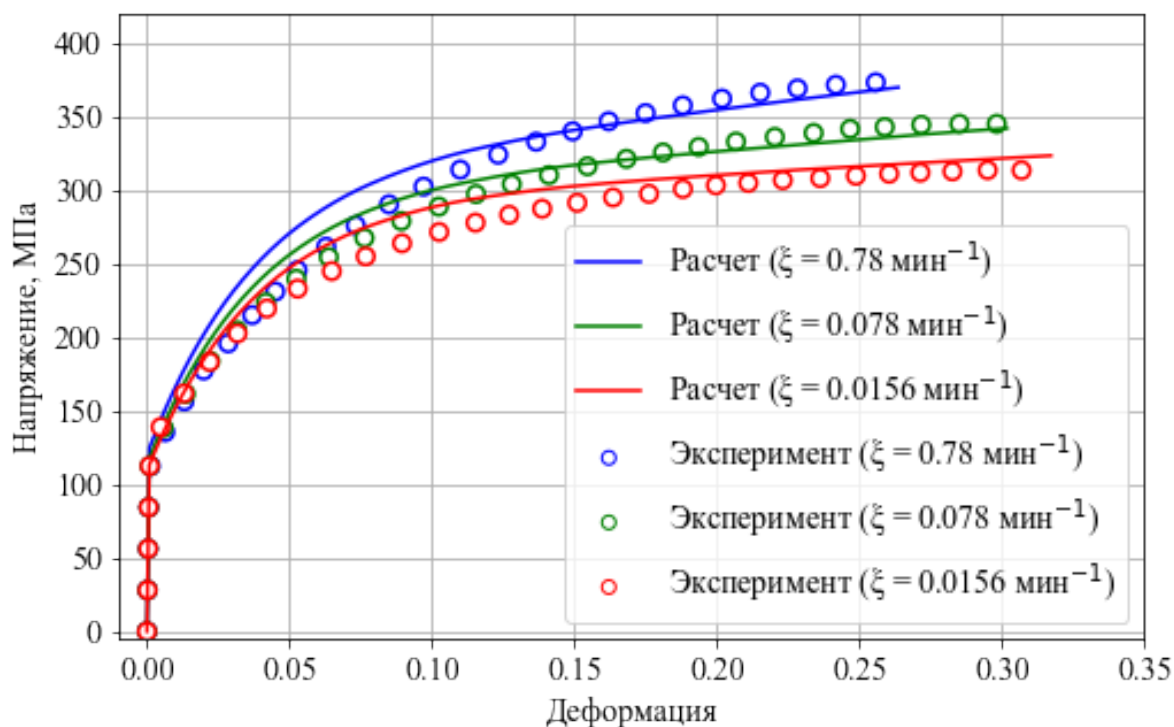


Рисунок 3.6.12 – Расчетная и экспериментальная диаграммы растяжения материала 12X18H10T при температуре 700 °C

Для верификации разработанной модели вязкопластичности проведен расчет эксперимента по одноосному растяжению образцов из материала 12X18H10T с изменением скорости деформации с $0,0156 \text{ мин}^{-1}$ до $0,78 \text{ мин}^{-1}$ и с $0,78 \text{ мин}^{-1}$ до $0,0156 \text{ мин}^{-1}$ при достижении значения относительного удлинения 0,1 при температуре 700 °C. На рисунках 3.6.13 и 3.6.14 приведено сравнение расчетной и экспериментальной диаграмм деформирования.

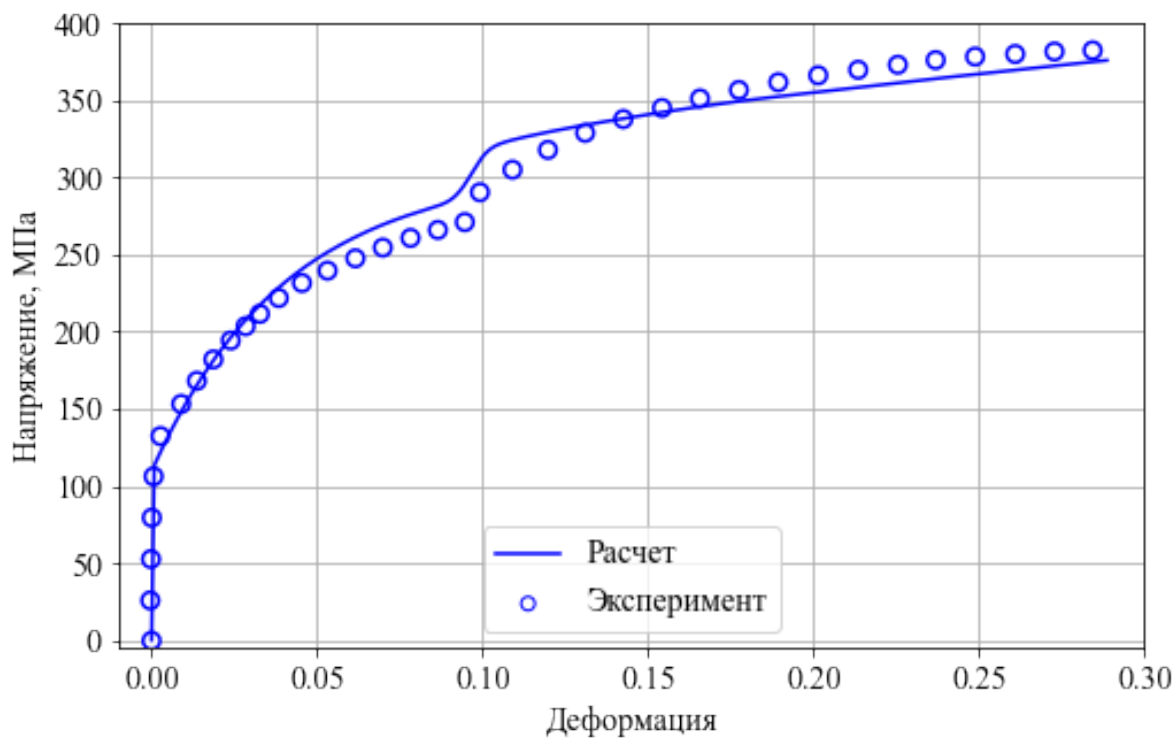


Рисунок 3.6.13 – Расчетная и экспериментальная диаграммы растяжения материала 12X18H10T с переменной скоростью деформации (со значения $\dot{\epsilon}$ 0,0156 мин⁻¹ до 0,78 мин⁻¹) при температуре 700 °С

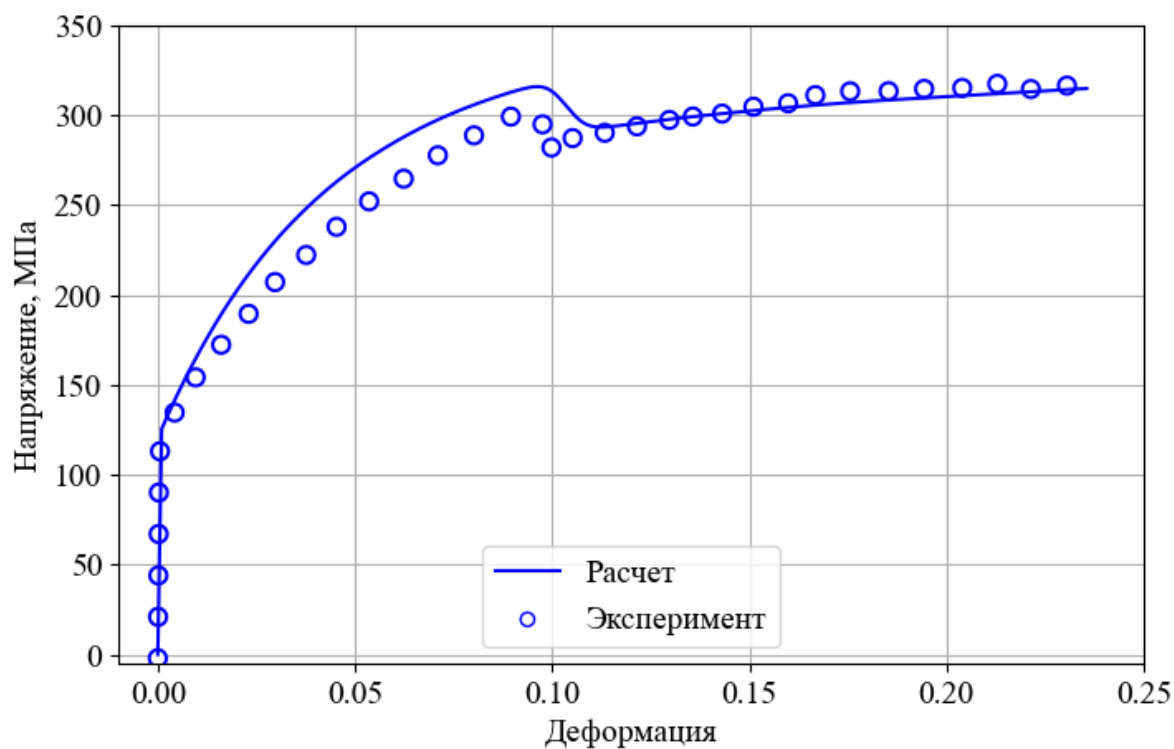


Рисунок 3.6.14 – Расчетная и экспериментальная диаграммы растяжения материала 12X18H10T с переменной скоростью деформации (со значения $\dot{\epsilon}$ 0,78 мин⁻¹ до 0,0156 мин⁻¹) при температуре 700 °С

Приведенные выше результаты моделирования хорошо коррелируют с результатами проведенных экспериментов, что позволяет сделать вывод об адекватности разработанной модели и метода идентификации её параметров. Разработанная модель позволяет учитывать следующие особенности процесса деформирования материала при высоких температурах и различных скоростях деформации:

- влияние скорости деформации на вид диаграммы деформирования материала.
- разупрочнение или упрочнение материала после предела текучести и до достижения заданного значения деформации.
- упругий характер процесса разгрузки и последующего нагружения материала.
- переход между диаграммами деформирования при изменении скорости деформации.

4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ РАСЧЕТОВ РАСКАТКИ ДИСКОВ

4.1 Метод внедрения модели деформирования материала в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов

Для внедрения модели материала в современные комплексы расчетов процессов деформирования, основанные на методе конечных элементов, необходимо разработать подпрограмму, которая за один шаг вычисления по известным исходным данным будет определять необходимые параметры процесса деформирования материала к концу шага. Помимо известных в начале шага тензора напряжений $\sigma_{ij(n)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij(n)}$, а также тензора приращений деформации $\Delta\varepsilon_{ij}$, в подпрограмму можно добавить необходимые параметры процесса деформирования, значения которых будут храниться в памяти программы. Для решения системы разрешающих уравнений необходимо вычислить матрицу Якоби $\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{lh}}$, определяющую изменение каждой из компонент тензора приращения напряжения, вызванное бесконечно малым изменением каждой компоненты тензора приращения деформации.

Таким образом, исходными данными для проведения расчета являются:

- 1) Компоненты тензора напряжений $\sigma_{11(n)}$, $\sigma_{22(n)}$, $\sigma_{33(n)}$, $\sigma_{12(n)}$, $\sigma_{23(n)}$, $\sigma_{31(n)}$ в начале шага n .
- 2) Компоненты тензора приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{11}$, $\Delta\varepsilon_{22}$, $\Delta\varepsilon_{33}$, $\Delta\gamma_{12}$, $\Delta\gamma_{23}$, $\Delta\gamma_{31}$. Приращения сдвиговых деформаций определяются приращениями углов сдвига.
- 3) Приращение времени Δt .
- 4) Параметры процесса деформирования в начале шага n :
 - 4.1) Накопленная вязкопластическая деформация $\varepsilon_{u*}^p(n)$.

4.2) Компоненты тензора микронапряжений $a_{11(n)}$, $a_{22(n)}$, $a_{12(n)}$, $a_{23(n)}$, $a_{31(n)}$. Компонента микронапряжений $a_{33(n)}$ может быть вычислена как сумма компонент $(-a_{11(n)})$ и $(-a_{22(n)})$.

4.3) Размер поверхности нагружения $C_{(n)}$.

5) Скорость деформации на предыдущем шаге $(n - 1)$ $\xi_{(n-1)}$.

6) Приращение времени на предыдущем шаге $(n - 1)$ $\Delta t_{(n-1)}$.

7) Определенные для заданной температуры параметры материала:

7.1) Модуль упругости E .

7.2) Коэффициент Пуассона ν .

7.3) Предел изотропного упрочнения ε_C^p .

7.4) Множитель функции начального размера поверхности нагружения K_{C_0} .

7.5) Показатель степени начального размера поверхности нагружения n_{C_0} .

7.6) Множитель функции модуля изотропного упрочнения K_{EC} .

7.7) Показатель степени модуля изотропного упрочнения n_{EC} .

7.8) Множитель функции предела анизотропного упрочнения K_{σ_a} .

7.9) Показатель степени предела анизотропного упрочнения n_{σ_a} .

7.10) Модуль анизотропного упрочнения β .

За один расчетный шаг должны быть определены следующие параметры:

1) Компоненты тензора напряжений $\sigma_{11(n+1)}$, $\sigma_{22(n+1)}$, $\sigma_{33(n+1)}$, $\sigma_{12(n+1)}$, $\sigma_{23(n+1)}$, $\sigma_{31(n+1)}$ в конце расчетного шага.

2) Параметры процесса деформирования в конце расчетного шага:

2.1) Значение накопленной вязкопластической деформации $\varepsilon_{u^*}^p$.

2.2) Компоненты тензора микронапряжений $a_{11(n+1)}$, $a_{22(n+1)}$, $a_{12(n+1)}$, $a_{23(n+1)}$, $a_{31(n+1)}$.

2.3) Размер поверхности нагружения $C_{(n+1)}$.

2.4) Скорость деформации на текущем шаге $\xi_{(n)}$.

2.5) Приращение времени на текущем шаге $\Delta t_{(n)}$.

3) Компоненты матрицы Якоби, определяющие изменение каждой из компонент приращения напряжения $\Delta\sigma_{ij}$, вызванное бесконечно малым изменением каждой компоненты приращения деформации $\Delta\varepsilon_{ij}$.

Поскольку алгоритм вычисления является шаговым, важно учитывать, что при вязкопластическом деформировании изображающая точка процесса нагружения должна находиться на поверхности нагружения. Если в начале шага изображающая точка находится внутри поверхности, упругое деформирование может привести к тому, что в конце шага изображающая точка будет находиться за пределами поверхности. В таком случае для нахождения приращения накопленной вязкопластической деформации необходимо решить следующее уравнение:

$$\sigma_{u(n+1)}^* = C_{(n)} + \Delta C, \quad (4.1.1)$$

где $\sigma_{u(n+1)}^*$ – интенсивность активных напряжений в конце шага n , ΔC – приращение размера поверхности нагружения.

Таким образом, за один расчетный шаг должен быть рассмотрен один из двух случаев деформирования:

1) Случай упругого деформирования.

В начале проводится расчет приращения интенсивности активных напряжений и приращения размера поверхности при упругом деформировании ($\Delta\varepsilon_{u*}^p = 0$). В случае, если выполняется условие

$$\sigma_{u(n+1)}^* \leq C_{(n)} + \Delta C, \quad (4.1.2)$$

принимается, что за расчетный шаг процесс деформирования упругий. Тогда напряжения и параметры процесса нагружения в конце расчетного шага, а также матрица Якоби вычисляются при $\Delta\varepsilon_{u*}^p = 0$.

2) Случай вязкопластического деформирования.

В случае невыполнения условия (4.1.2), процесс деформирования является вязкопластическим, но воспользоваться линеаризованным уравнением (3.2.30) для нахождения приращения накопленной пластической деформации $\Delta\varepsilon_{u*}^p$ нельзя,

поскольку оно не обеспечит нахождение точки, отображающей процесс деформирования, на поверхности текучести в конце шага. Для нахождения приращения накопленной вязкопластической деформации в этом случае необходимо решить уравнение (4.1.1).

Далее вычисляются напряжения и параметры процесса нагружения в конце расчетного шага, а также матрица Якоби по определенному значению приращения накопленной вязкопластической деформации.

4.2 Линеаризация уравнений модели поведения материала

Для упрощения внедрения модели вязкопластичности в конечно-элементный расчетный комплекс модуль упругости принимается постоянным. Это допущение обусловлено малостью упругих деформаций материала в процессе раскатки по сравнению с вязкопластическими деформациями. Как следствие, изменение модуля упругости при различных скоростях деформации незначительно влияет на результаты моделирования.

Приводятся линеаризованные уравнения модели поведения материала, связывающие приращения параметров процесса деформирования с исходными данными.

Приращения сдвиговых деформаций равны половине приращений углов сдвигов:

$$\Delta \varepsilon_{12} = \frac{\Delta \gamma_{12}}{2}, \quad \Delta \varepsilon_{23} = \frac{\Delta \gamma_{23}}{2}, \quad \Delta \varepsilon_{31} = \frac{\Delta \gamma_{31}}{2}. \quad (4.2.1)$$

Для определения скорости деформации и её приращения необходимо вычислить скорости компонент девиатора деформации:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\Delta t} (\Delta \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \Delta \varepsilon_0), \quad (4.2.2)$$

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33}). \quad (4.2.3)$$

Тогда скорость деформации ξ и её приращение $\Delta \xi$ можно определить следующим образом:

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}}, \quad (4.2.4)$$

$$\Delta \xi = 2\Delta t \frac{\xi - \xi_{(n-1)}}{\Delta t + \Delta t_{(n-1)}}. \quad (4.2.5)$$

Девииатор активных напряжений в начале шага $s_{ij(n)}^*$ и его интенсивность $\sigma_{u(n)}^*$ вычисляются по тензорам напряжений $\sigma_{ij(n)}$ и микронапряжений $a_{ij(n)}$ с помощью выражений (3.2.18).

Далее рассматривается случай упругого деформирования. Приращение накопленной вязкопластической деформации $\Delta \varepsilon_{u*}^p$ принимается равным 0.

Тогда приращение интенсивности активных напряжений при упругом деформировании $\Delta \sigma_u^{*e}$ определяется в соответствии с выражением (3.2.22):

$$\Delta \sigma_u^{*e} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij(n)}^* \Delta \sigma_{ij}^e}{\sigma_{u(n)}^*} - n_{\sigma_a} a_{u(n)}^* \frac{\Delta \xi}{\xi}. \quad (4.2.6)$$

Здесь параметр g_a^ξ определяется по (3.2.14), интенсивность микронапряжений в начале шага определяется по девиатору активных $s_{ij(n)}^*$ и тензору микронапряжений $a_{ij(n)}$ с помощью выражения (3.2.27).

Для определения компонент тензора приращений напряжений при упругом деформировании $\Delta \sigma_{ij}^e$ используется выражение (3.2.5):

$$\Delta \sigma_{ij}^e = 2G \Delta \varepsilon_{ij} + 3\lambda \delta_{ij} \Delta \varepsilon_0. \quad (4.2.7)$$

Здесь параметры G и λ определяются в соответствии с выражениями (3.2.6) и (3.2.7).

Выражение для приращения размера поверхности нагружения в случае упругого деформирования ΔC^e получается из (3.2.7) с учетом (3.2.9):

$$\Delta C^e = K_{c_0} n_{c_0} \xi^{(n_{c_0}-1)} \Delta \xi. \quad (4.2.8)$$

Приращения микронапряжений при упругом деформировании Δa_{ij}^e определяются в соответствии с (3.2.10) и (3.2.12):

$$\Delta a_{ij}^e = n_{\sigma_a} a_{ij(n)} \frac{\Delta \xi}{\xi}. \quad (4.2.9)$$

Далее проводится проверка на нахождение изображающей точки процесса деформирования внутри поверхности нагружения. В случае, если выполняется условие (4.1.2), деформирование за расчетный шаг считается упругим. Параметры процесса деформирования в конце расчетного шага определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij(n+1)} = \sigma_{ij(n)} + \Delta \sigma_{ij}^e, \quad (4.2.10)$$

$$\varepsilon_{u^*(n+1)}^p = \varepsilon_{u^*(n)}^p, \quad (4.2.11)$$

$$a_{ij(n+1)} = a_{ij(n)} + \Delta a_{ij}^e, \quad (4.2.12)$$

$$C_{(n+1)} = C_{(n)} + \Delta C^e. \quad (4.2.13)$$

В случае вязкопластического деформирования, когда не выполняется условие (4.1.2), необходимо вычислить приращение накопленной вязкопластической деформации $\Delta \varepsilon_{u^*}^p$. Для этого необходимо решить уравнение, следующее из (4.1.1). Направление вязкоупругого деформирования определяется законом ассоциированного течения:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} \Delta \varepsilon_{u^*}^p. \quad (4.2.14)$$

Тогда:

$$\frac{3}{2} s_{ij(n+1)}^* s_{ij(n+1)}^* - (C_{(n)} + \Delta C)^2 = 0, \quad (4.2.15)$$

$$s_{ij(n+1)}^* = s_{ij(n)}^* - a_{ij(n)} - \Delta a_{ij}, \quad (4.2.16)$$

$$s_{ij(n+1)} = s_{ij(n)}^e - 3G \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} \Delta \varepsilon_{u^*}^p. \quad (4.2.17)$$

Приращения компонент тензора микронапряжений Δa_{ij} определяется с помощью линеаризованного выражения (3.2.13):

$$\Delta a_{ij} = g \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} \Delta \varepsilon_{u^*}^p + g_a a_{ij(n)} \Delta \varepsilon_{u^*}^p + n_{\sigma_a} a_{ij(n)} \frac{\Delta \xi}{\xi}. \quad (4.2.18)$$

Линеаризовав выражение (3.2.10), получим уравнения для приращения размера поверхности нагружения ΔC в случае вязкогопластического деформирования:

$$\Delta C = q_\varepsilon \Delta \varepsilon_{u*}^p + q_\xi \Delta \xi. \quad (4.2.19)$$

Здесь параметры g , g_a и q_ε определяются с помощью выражений (3.2.14) – (3.2.16) и (3.2.11) – (3.2.11).

Тогда, тензор активных напряжений в конце шага:

$$\begin{aligned} s_{ij(n+1)}^* &= \left[s_{ij(n+1)}^e - a_{ij(n)} \left(1 - n_{\sigma_a} \frac{\Delta \xi}{\xi} \right) \right] = \\ &= - \left[(3G + g) \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} - g_a a_{ij(n)} \right] \Delta \varepsilon_{u*}^p. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Уравнение (4.2.20) можно записать в следующем виде:

$$\frac{3}{2} [(K_{ij} + P_{ij} \Delta \varepsilon_{u*}^p) : (K_{ij} + P_{ij} \Delta \varepsilon_{u*}^p)] - (K_C + P_C \Delta \varepsilon_{u*}^p)^2 = 0 \quad (4.2.21)$$

или

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2} K_{ij} K_{ij} - K_C^2 \right) + (3K_{ij} P_{ij} - 2K_C P_C) \Delta \varepsilon_{u*}^p + \\ &+ \left(\frac{3}{2} P_{ij} P_{ij} - P_C^2 \right) \Delta \varepsilon_{u*}^{p^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

где

$$K_{ij} = s_{ij(n+1)}^e - a_{ij(n)} \left(1 - n_{\sigma_a} \frac{\Delta \xi}{\xi} \right), \quad (4.2.23)$$

$$P_{ij} = g_a a_{ij(n)} - (3G + g) \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*}, \quad (4.2.24)$$

$$K_C = C_{(n)} + q_\xi \Delta \xi, \quad (4.2.25)$$

$$P_C = q_\varepsilon. \quad (4.2.26)$$

Решив уравнение (4.2.22) относительно $\Delta \varepsilon_{u*}^p$, получим

$$\Delta \varepsilon_{u*}^p = - \frac{B_{s*} + \sqrt{D_{s*}}}{2A_{s*}}, \quad (4.2.27)$$

где

$$A_{s*} = \frac{3}{2} P_{ij} P_{ij} - P_C^2, \quad (4.2.28)$$

$$B_{s*} = 3K_{ij} P_{ij} - 2K_C P_C, \quad (4.2.29)$$

$$C_{s*} = \frac{3}{2} K_{ij} K_{ij} - K_C^2, \quad (4.2.30)$$

$$D_{s*} = B_{s*}^2 - 4A_{s*} C_{s*}. \quad (4.2.31)$$

Нужным решением является именно тот корень уравнения (4.2.22), в который входит корень из дискриминанта со знаком минус. Второй корень уравнения (4.2.22) переместит поверхность нагружения таким образом, что отображающая точка процесса деформирования окажется на другом её крае.

Далее с помощью выражения (4.2.14) определяются компоненты тензора приращений пластических деформаций. Для нахождения тензора приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ используется следующее выражение:

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G(\Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^p) + 3\lambda\delta_{ij}\Delta\varepsilon_0. \quad (4.2.32)$$

Параметры процесса деформирования в конце расчетного шага при вязкопластическом деформировании определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij(n+1)} = \sigma_{ij(n)} + \Delta\sigma_{ij}, \quad (4.2.33)$$

$$\varepsilon_{u*(n+1)}^p = \varepsilon_{u*(n)}^p + \Delta\varepsilon_{u*}^p, \quad (4.2.34)$$

$$a_{ij(n+1)} = a_{ij(n)} + \Delta a_{ij}, \quad (4.2.35)$$

$$C_{(n+1)} = C_{(n)} + \Delta C. \quad (4.2.36)$$

4.3 Вычисление компонент матрицы Якоби

Для внедрения модели материала в программные комплексы расчетов процессов деформирования помимо значений параметров процесса нагружения в конце расчетного шага необходимо также определить компоненты матрицы Якоби, определяющей изменение каждой из компонент приращения напряжения $\Delta\sigma_{ij}$, вызванное бесконечно малым изменением каждой компоненты приращения деформации $\Delta\varepsilon_{ij}$. Для этого представим выражение (4.2.32) в следующем виде:

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta\varepsilon_{ij} + 3\lambda\delta_{ij}\Delta\varepsilon_0 - 2G\Delta\varepsilon_{ij}^p, \quad (4.3.1)$$

$$\Delta\sigma_{ij} = A_{ij} + \delta_{ij}A_0 - A_{ij}^p, \quad (4.3.2)$$

$$A_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \Delta\varepsilon_{ij}, \quad (4.3.3)$$

$$A_0 = \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta\varepsilon_0, \quad (4.3.4)$$

$$A_{ij}^p = \frac{E}{1+\nu} \Delta\varepsilon_{ij}^p. \quad (4.3.5)$$

Тогда компоненты матрицы Якоби $\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}$, с учетом того, что приращения сдвиговых деформаций определяются приращениями углов сдвига, можно вычислить с помощью следующего соотношения:

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = \frac{(1+\delta_{lk})}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} + \delta_{ij} \frac{\partial A_0}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} - \frac{\partial A_{ij}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} \right], \quad (4.3.6)$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = \frac{\delta_{lk}^{ij} E}{1+\nu}, \quad (4.3.7)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial\Delta\varepsilon_{ij}} = \frac{\nu\delta_{ij} E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial A_{ij}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial\Delta\varepsilon_{ij}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}, \quad (4.3.9)$$

$$\delta_{lk}^{ij} = \begin{cases} 1, & ij = lk, \\ 0, & ij \neq lk, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial\Delta\varepsilon_{ij}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} \frac{\partial\Delta\varepsilon_{u*}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}. \quad (4.3.11)$$

Градиенты приращения накопленной вязкопластической деформации по приращениям компонент тензора деформации $\frac{\partial\Delta\varepsilon_{u*}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}$:

$$\frac{\partial\Delta\varepsilon_{u*}^p}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = -\frac{1}{2A_{s*}} \left[2\Delta\varepsilon_{u*}^p \frac{\partial A_{s*}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} + \frac{\partial B_{s*}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} + \frac{1}{2\sqrt{D_{s*}}} \frac{\partial D_{s*}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} \right], \quad (4.3.12)$$

$$\frac{\partial A_{s*}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = \frac{3}{2} \frac{\partial(P_{ij}P_{ij})}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} - 2P_c \frac{\partial P_c}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}}, \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial B_{s*}}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} = 3 \left(\frac{\partial(K_{ij}P_{ij})}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} \right) - 2 \left(K_c \frac{\partial P_c}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} + P_c \frac{\partial K_c}{\partial\Delta\varepsilon_{lk}} \right), \quad (4.3.14)$$

$$\frac{\partial C_{s*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = \frac{3}{2} \frac{\partial (K_{ij} K_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} - 2K_C \frac{\partial K_C}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \quad (4.3.15)$$

$$\frac{\partial D_{s*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = 2B_{s*} \frac{\partial B_{s*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} - 4 \left(A_{s*} \frac{\partial C_{s*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} + C_{s*} \frac{\partial A_{s*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} \right), \quad (4.3.16)$$

$$\frac{\partial (K_{ij} K_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = 2 \left(K_{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} \right), \quad (4.3.17)$$

$$\frac{\partial (P_{ij} P_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = 2 \left(P_{ij} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} \right), \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\partial (K_{ij} P_{ij})}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = K_{ij} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} + P_{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \quad (4.3.19)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = \frac{a_{ij(n)} n_{\sigma_a}}{\xi^2} \left(\frac{\partial \Delta \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} \xi - \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} \Delta \xi \right), \quad (4.3.20)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = -\beta \frac{s_{ij(n)}^*}{\sigma_{u(n)}^*} K_{\sigma_a} n_{\sigma_a} \xi^{(n_{\sigma_a}-1)} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_C}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = & \left[K_{C_0} n_{C_0} \xi^{(n_{C_0}-1)} \left(1 + \frac{n_{C_0}-1}{\xi} \Delta \xi \right) \right. \\ & \left. + K_{E_C} n_{E_C} \xi^{(n_{E_C}-1)} \varepsilon_{u^*(n)}^p \left(1 + \frac{n_{E_C}-1}{\xi} \Delta \xi \right) \right] \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

$$\frac{\partial P_C}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}} = \begin{cases} K_{E_C} n_{E_C} \xi^{(n_{E_C}-1)} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, & \text{если } \varepsilon_{u^*}^p < \varepsilon_C^p, \\ 0, & \text{если } \varepsilon_{u^*}^p \geq \varepsilon_C^p. \end{cases} \quad (4.3.23)$$

Градиенты скорости деформации и её приращения определяются следующими соотношениями.

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{6 \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}} \frac{(2 - \delta_{ij})}{\Delta t} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.3.24)$$

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}} = \frac{2 \Delta t}{\Delta t + \Delta t_{(n-1)}} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}}. \quad (4.3.25)$$

В случае упругого деформирования при вычислении компонент матрицы Якоби A_{ij}^p и $\frac{\partial A_{ij}^p}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ равны 0.

4.4 Внедрение модели поведения материала в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов

Для проведения моделирования процесса изотермической раскатки заготовки диска в программный комплекс SIMULIA Abaqus внедрена модель деформирования материала. Для этого на языке программирования FORTRAN на основании уравнений, приведенных в разделе 4.2 и 4.3, разработана пользовательская подпрограмма «UMAT» (приложение В). Подпрограмма написана для случая деформирования 3-х мерных конечных элементов.

В таблице 4.4.1 приведены массивы, в которых находятся значения параметров процесса нагружения на начало расчетного шага и в которые надо записать значения этих же параметров в конец шага. В таблице 4.4.2 приведены переменные и массивы, заданные в начале расчётного шага и используемые в качестве исходных данных.

Таблица 4.4.1 – Массивы переменных, обновляемые за расчетный шаг

Массив параметров процесса деформирования – «STATEV(10)»										
Индекс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Параметр	ε_{u*}^p	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{12}	a_{23}	a_{31}	C	$\xi_{(n-1)}$	$\Delta t_{(n-1)}$

Таблица 4.4.2 – Переменные и массивы исходных данных

Переменная приращения времени Δt – «DTIME»										
Массив параметров материала – «PROPS(10)»										
Индекс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Параметр	E	ν	K_{C_0}	n_{C_0}	K_{E_C}	n_{E_C}	ε_C^p	K_{σ_a}	n_{σ_a}	β

Значения массива параметров материала «PROPS(10)» задаются при создании конечно-элементной модели в оболочке программы SIMULIA Abaqus. Вычисленные компоненты матрицы Якоби сохраняются в массиве «DDSDDE(6,6)».

Для вычисления параметров процесса нагружения в подпрограмму добавлены дополнительные переменные и массивы:

- 1) Приращение средней деформации $\Delta \varepsilon_0$ – «deps_0»
- 2) Массив скоростей компонент девиатора деформаций $\dot{e}_{ij}$ – «de(6)»
- 3) Скорость деформации ξ – «xi»
- 4) Приращение скорости деформации $\Delta \xi$ – «dxi»
- 5) Среднее напряжение σ_0 – «sig_0»
- 6) Интенсивность напряжений σ_u – «sig_u»
- 7) Интенсивность активных напряжений $\sigma_{u(n)}^*$ – «sig_u_st»
- 8) Массив компонент девиатора активных напряжений $s_{ij(n)}^*$ – «sig_st(6)»
- 9) Компоненты девиатора активных напряжений в конце расчетного шага «sig_st_1(6)»
- 10) Массив компонент тензора приращений напряжений $\Delta \sigma_{ij}$ – «dsig(6)»
- 11) Приращение размера поверхности нагружения ΔC – «dC»
- 12) Массив компонент тензора приращений микронапряжений Δa_{ij} – «da(6)»
- 13) Приращение накопленной вязкопластической деформации $\Delta \varepsilon_{u*}^p$ – «deps_p_u»
- 14) Массив компонент тензора приращений вязкопластической деформации $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ – «deps_p(6)»
- 15) Символ Кронекера δ_{ij} – «Kr_ij(6)»
- 16) Модуль упругости E – «E»
- 17) Модуль сдвига G – «G_mod»
- 18) Модуль анизотропного упрочнения g – «g»
- 19) Модуль анизотропного упрочнения g_a – «ga»
- 20) Модуль анизотропного упрочнения g_a^ξ – «ga_xi»
- 21) Модуль изотропного упрочнения q_ε – «q_eps»
- 22) Модуль изотропного упрочнения q_ξ – «q_xi»
- 23) Параметры K_{ij} , P_{ij} , K_C , P_C – «K_ij(6)», «P_ij(6)», «K_C», «P_C»
- 24) Параметры A_{S*} , B_{S*} , C_{S*} , D_{S*} – «A_Sst», «B_Sst», «C_Sst», «D_Sst»
- 25) Массив слагаемых компонент матрицы Якоби $\frac{\partial A_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dA_de(6,6)»

- 26) Массив слагаемых компонент матрицы Якоби $\frac{\partial A_0}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}}$ – «dA0_de(6)»
- 27) Массив слагаемых компонент матрицы Якоби $\frac{\partial A_{ij}^p}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dAp_de(6,6)»
- 28) Градиент скорости деформации $\frac{\partial \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}}$ – «dxi_de(6)»
- 29) Градиент приращений вязкопластической деформации $\frac{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^p}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dep_de(6,6)»
- 30) Градиент накопленной вязкопластической деформации $\frac{\partial \Delta \varepsilon_{u*}^p}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dep_u_de(6)»
- 31) Градиенты параметров накопленной вязкопластической деформации $\frac{\partial A_{S*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial B_{S*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial C_{S*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial D_{S*}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dA_Sst_de(6)», «dB_Sst_de(6)», «dC_Sst_de(6)», «dD_Sst_de(6)»
- 32) Градиенты параметров накопленной вязкопластической деформации $\frac{\partial K_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial P_{ij}}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial K_C}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}, \frac{\partial P_C}{\partial \Delta \varepsilon_{lk}}$ – «dKij_de(6,6)», «dPij_de(6,6)», «dKC_de(6)», «dPC_de(6)»
- 33) Градиент приращения скорости деформации $\frac{\partial \Delta \xi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}}$ – «ddxi_de(6)»
- 34) Символ Кронекера δ_{lk}^{ij} – «Kr_ij_lk(6,6)»
- 35) Целочисленная переменная «i»
- 36) Целочисленная переменная «j»

В программный код добавлена формула «contr», определяющая значение свертки двух тензоров. Входными переменными формулы являются два массива «X(6)» и «Y(6)». Значение «contr» вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \text{contr} = & X(1) * Y(1) + X(2) * Y(2) + X(3) * Y(3) + \\ & + 2(X(4) * Y(4) + X(5) * Y(5) + X(6) * Y(6)). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

5 МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА РАСКАТКИ ДИСКА

5.1 Описание процесса раскатки

Разработанная компьютерная модель процесса изотермической раскатки заготовки диска, представляющая из себя пользовательскую подпрограмму «UMAT» пакета SIMULIA Abaqus, предназначенного для проведения прочностных расчетов, апробирована путем проведения моделирования процесса раскатки заготовки из никелевого жаропрочного сплава ЭП741НП при температуре 1130 °С. Чертеж заготовки приведен на рисунке 5.1.1.

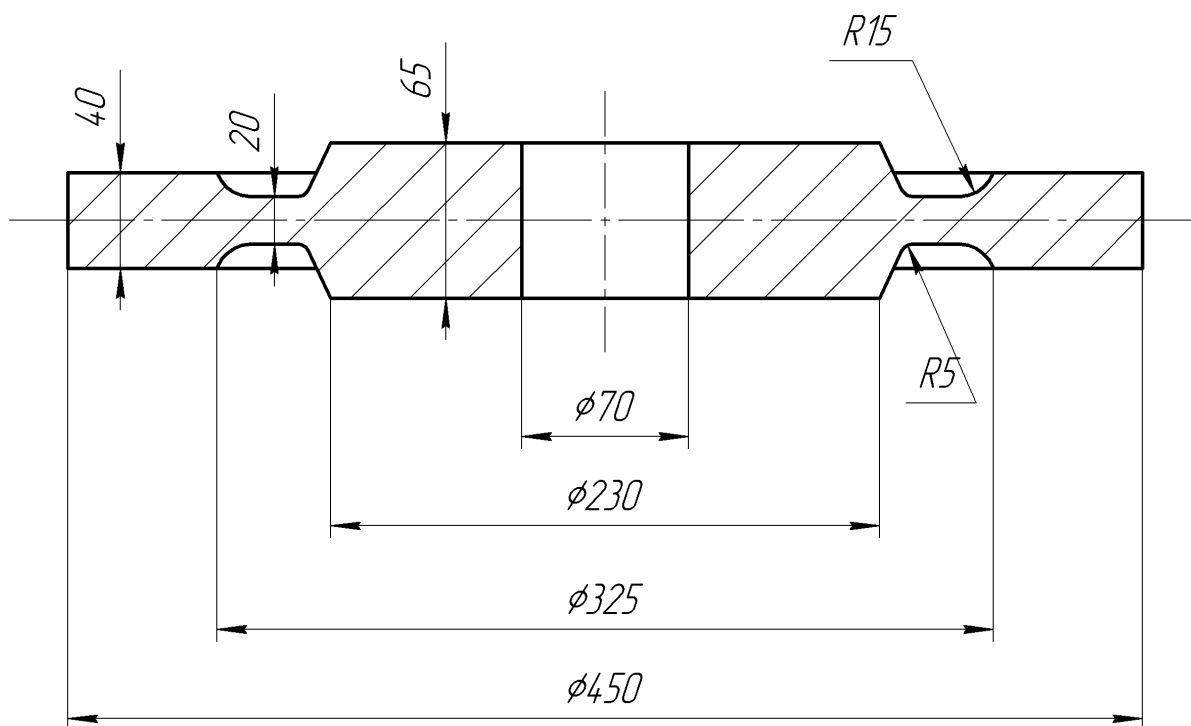


Рисунок 5.1.1 – Заготовка из жаропрочного сплава ЭП741НП

В процессе раскатки заготовка, зажатая между двумя пинолями, вращается вокруг своей оси с заданной угловой скоростью $\omega_{\text{заг}}$. Материал заготовки прокатывается четырьмя деформирующими роликами, прижатыми к поверхности заготовки. Ролики перемещаются от оси вращения заготовки в радиальном направлении с постоянной линейной скоростью $V_{\text{рол}} = 1,5$ мм/мин. На рисунке 5.1.2 приведена схема раскатки заготовки из сплава ЭП741НП. На рисунке 5.1.3 приведен чертеж рабочей части раскатного ролика.

В процессе раскатки четыре ролика перемещаются одновременно в радиальном направлении. Длина пути ролика от точки касания заготовки составляет 26 мм. Скорость вращения заготовки $\omega_{\text{заг}}$ в процессе раскатки не постоянна, её значение контролируется таким образом, чтобы линейная скорость в очаге деформации составляла $V_{\text{заг}} = 300$ мм/мин:

$$\omega_{\text{заг}} = \frac{R_0}{V_{\text{заг}} + U_{\text{рол}}}, \quad (5.1.1)$$

где R_0 – расстояние от оси вращения до начального положения ролика, $U_{\text{рол}}$ – радиальное перемещение каждого ролика.

После достижения роликами заданного радиального перемещения, заготовка вращается еще несколько оборотов, после чего процесс раскатки считается завершенным. Чертеж полученного по результатам раскатки диска приведен на рисунке 5.1.4.

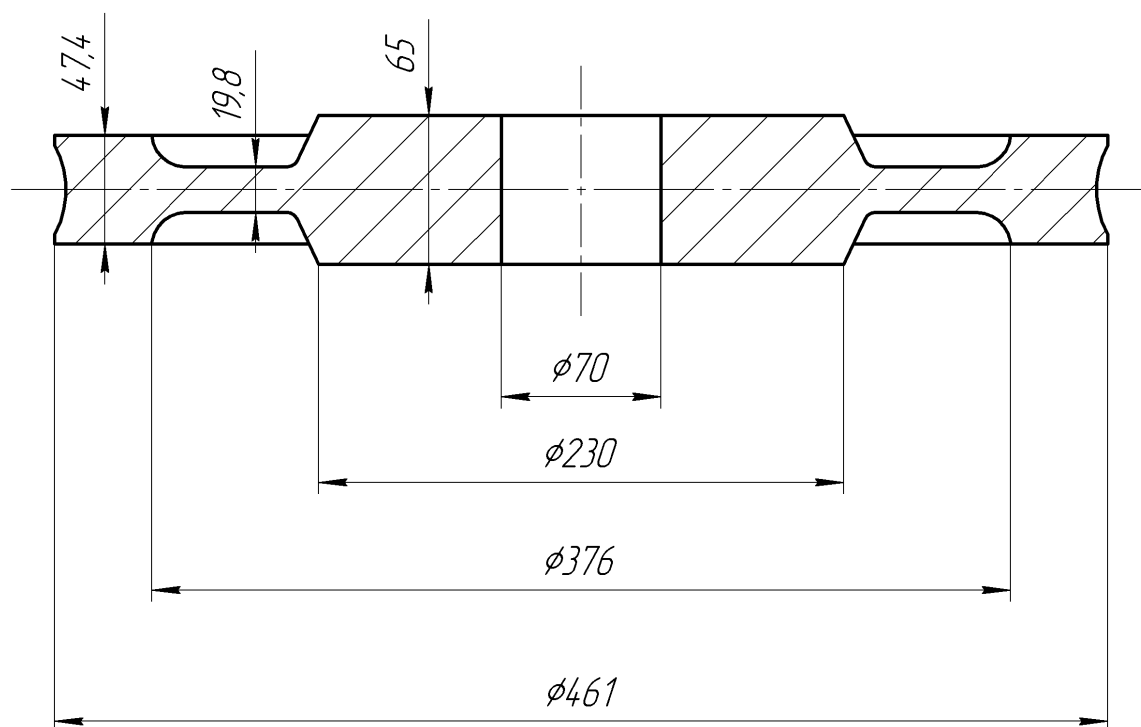


Рисунок 5.1.4 – Диск из сплава ЭП741НП полученный после раскатки

5.2 Материальные параметры сплава ЭП741НП

Раскатка заготовки диска из жаропрочного сплава ЭП741НП проводится при температуре 1130 °С, поэтому необходимо спрогнозировать параметры материала

ЭП741НП для этой температуры. Значения параметров E , K_{C_0} , n_{C_0} , K_{E_C} , n_{E_C} , K_{σ_a} , n_{σ_a} и β находятся по методу линейной интерполяции по параметрам материала при температурах 1100 и 1140 °С. Определенные параметры жаропрочного сплава ЭП741НП для температур 1100, 1140 °С и спрогнозированные для 1130 °С приведены в таблице 5.2.1. Параметры степенных функций K_{C_0} , n_{C_0} , K_{E_C} , n_{E_C} , K_{σ_a} , n_{σ_a} определяют связь параметров E_C , C_0 и σ_a , выраженных в МПа со скоростью деформации в мин⁻¹.

Таблица 5.2.1 – Параметры жаропрочного сплава ЭП741НП

T , °С	1100	1130	1140
E , МПа	4120	3463	3244
ν	0,3	0,3	0,3
ε_C^p	0,35	0,35	0,35
K_{C_0}	276	155	128
n_{C_0}	0,1764	0,1677	0,1648
K_{E_C}	-166	-156	-153
n_{E_C}	0,6889	0,3153	0,1907
K_{σ_a}	20	27,5	30
n_{σ_a}	0	0	0
β	72	67	65

5.3 Разработка конечно-элементной модели изотермической раскатки заготовки диска

Моделирование процесса изотермической раскатки заготовки диска из жаропрочного сплава ЭП741НП проводится в программном комплексе SIMULIA Abaqus, основанном на методе конечных элементов. Для этого на основании чертежей заготовки и ролика (рисунки 5.1.1 и 5.1.3) созданы их конечно-элементные модели.

Конечно-элементная модель заготовки состоит из 23600 объемных элементов типа C3D8, имеющих по 8 узлов. Поскольку процесс раскатки симметричен относительно срединной плоскости заготовки, смоделирована её половина. Конечно-элементная модель заготовки приведена на рисунках 5.3.1 и 5.3.2.

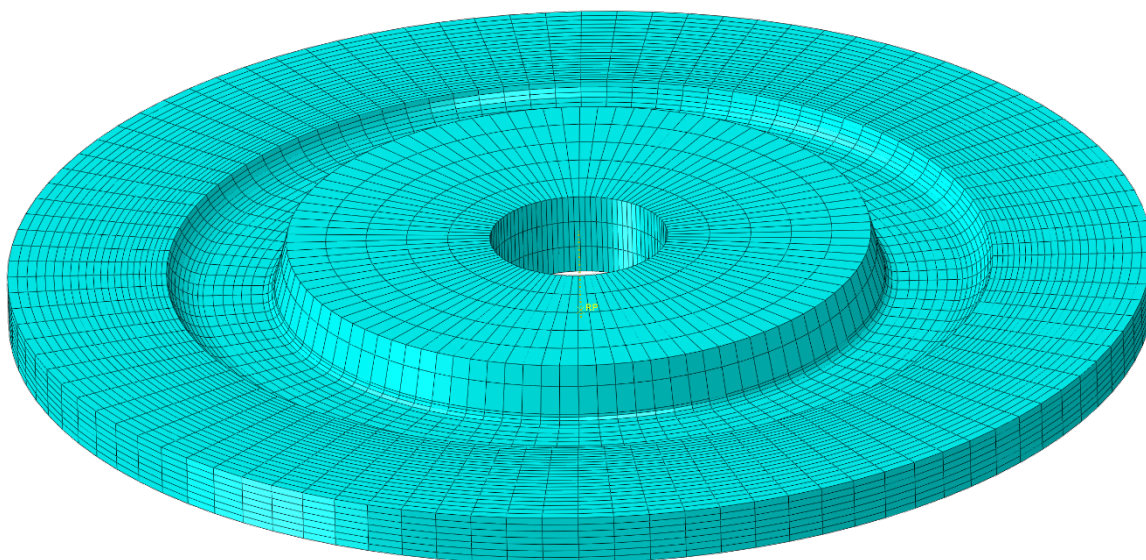


Рисунок 5.3.1 – Конечно-элементная модель заготовки диска

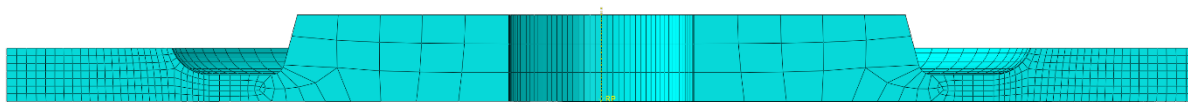


Рисунок 5.3.2 – Конечно-элементная модель заготовки диска (разрез)

Для моделирования поведения заготовки используется разработанная пользовательская модель вязкопластического деформирования материала с заданными свойствами, определенными в разделе 5.2. Для задания вращения заготовки поверхность внутреннего отверстия заготовки связана с опорной точкой.

Конечно-элементная модель раскатного ролика представляет из себя оболочку, повторяющую контур его рабочей поверхности. Она состоит из 1014 оболочечных элементов типа S4. Конечно-элементная модель ролика приведена на рисунке 5.3.3.

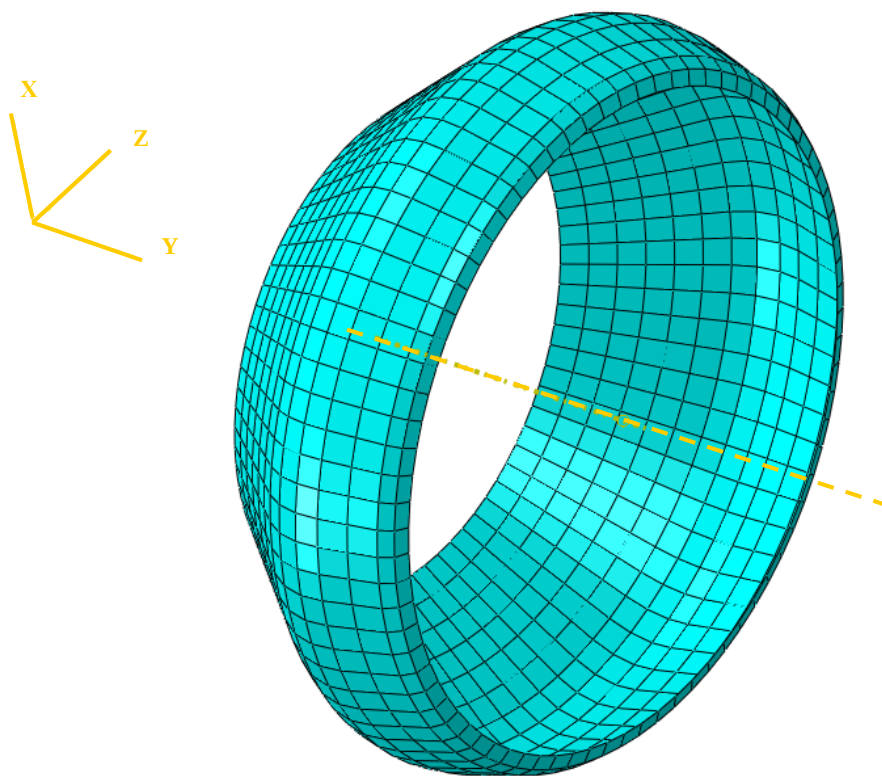


Рисунок 5.3.3 – Конечно-элементная модель ролика

Оболочечным элементам модели ролика присвоено сечение толщиной 1 мм. Ролики изготовлены из жаропрочного литейного сплава на основе никеля ЖС6У. В процессе раскатки рабочая часть роликов охлаждается на 80-100 °С по сравнению с температурой диска. Поэтому принимается, что ролик является абсолютно жестким телом, связанным с опорной точкой. Модель ролика имеет свою прямоугольную систему координат, одна из осей которой направлена вдоль оси ролика. В начале этой системы координат расположена опорная точка.

Сборка, позволяющая смоделировать процесс раскатки, состоящая из заготовки и двух роликов, приведена на рисунках 5.3.4 и 5.3.5.

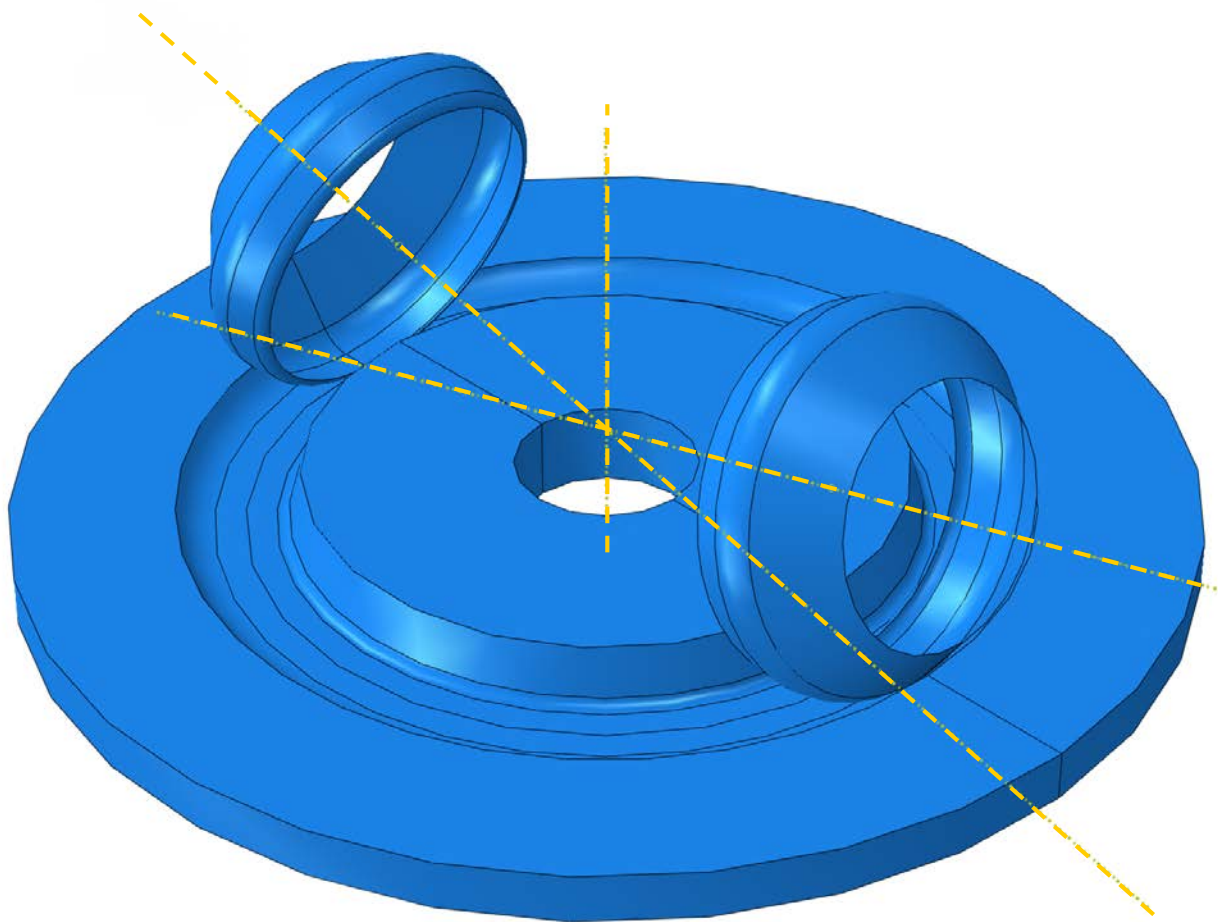


Рисунок 5.3.4 – Модель раскатки заготовки

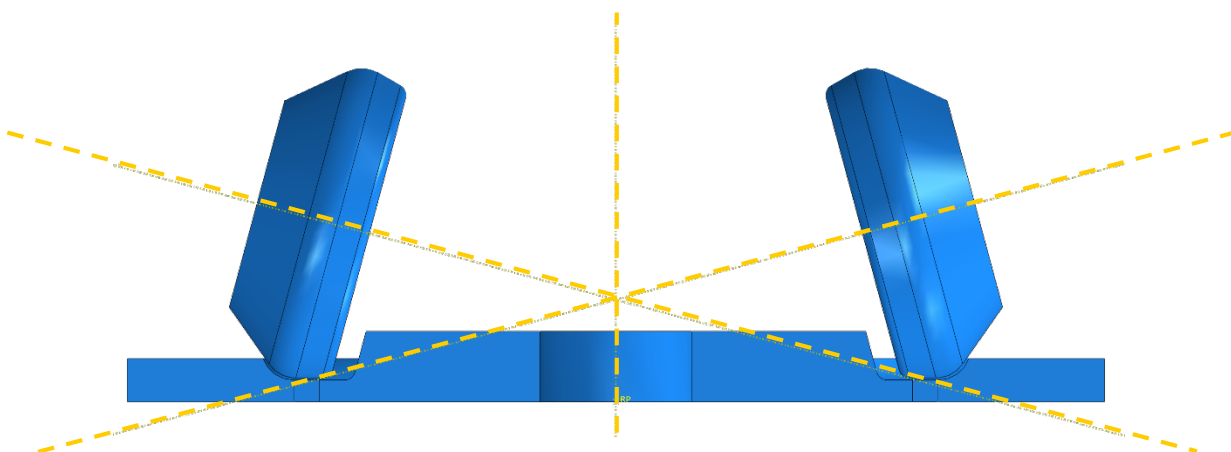


Рисунок 5.3.5 – Модель раскатки заготовки

Между поверхностями диска и роликов создано условие абсолютно жесткого контакта. Контактные поверхности показаны на рисунке 5.3.6.

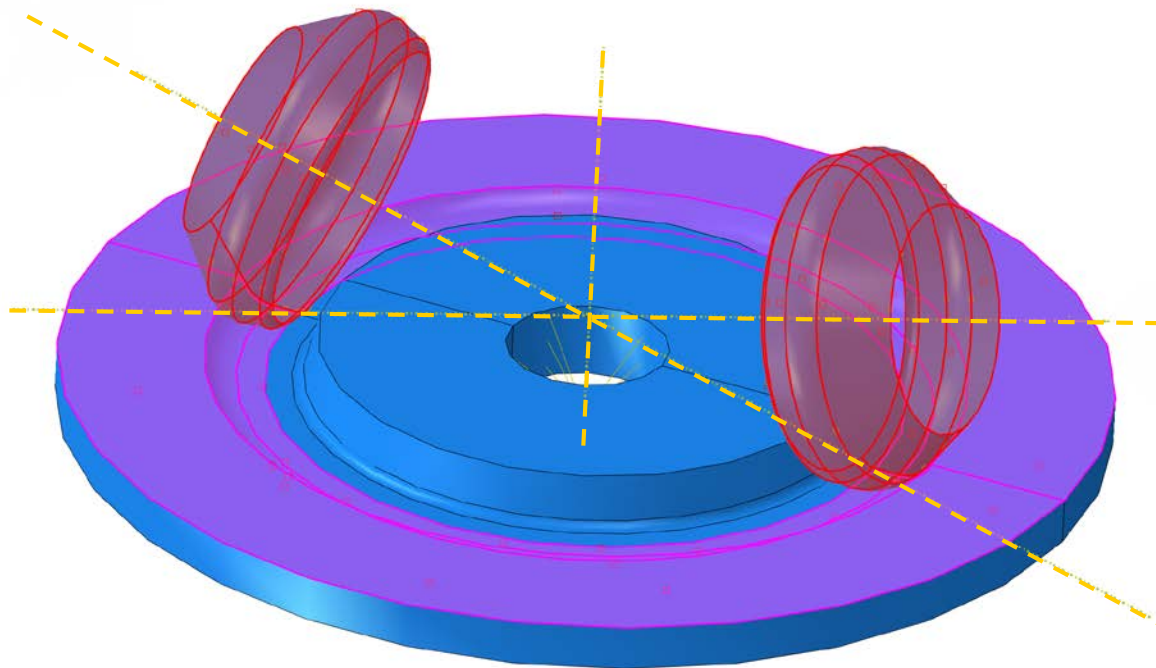


Рисунок 5.3.6 – Схема контакта в модели раскатки заготовки

В модели заданы следующие граничные условия:

- условие симметрии заготовки, относительно её срединной плоскости;
- запрет перемещения опорной точки заготовки;
- запрет перемещения опорных точек роликов в направлении, соответствующем кольцевому направлению заготовки.

Вращение заготовки задано путем приложения к опорной точке скорости вращения (рисунок 5.3.7), изменяющейся в соответствии с законом (5.1.1).

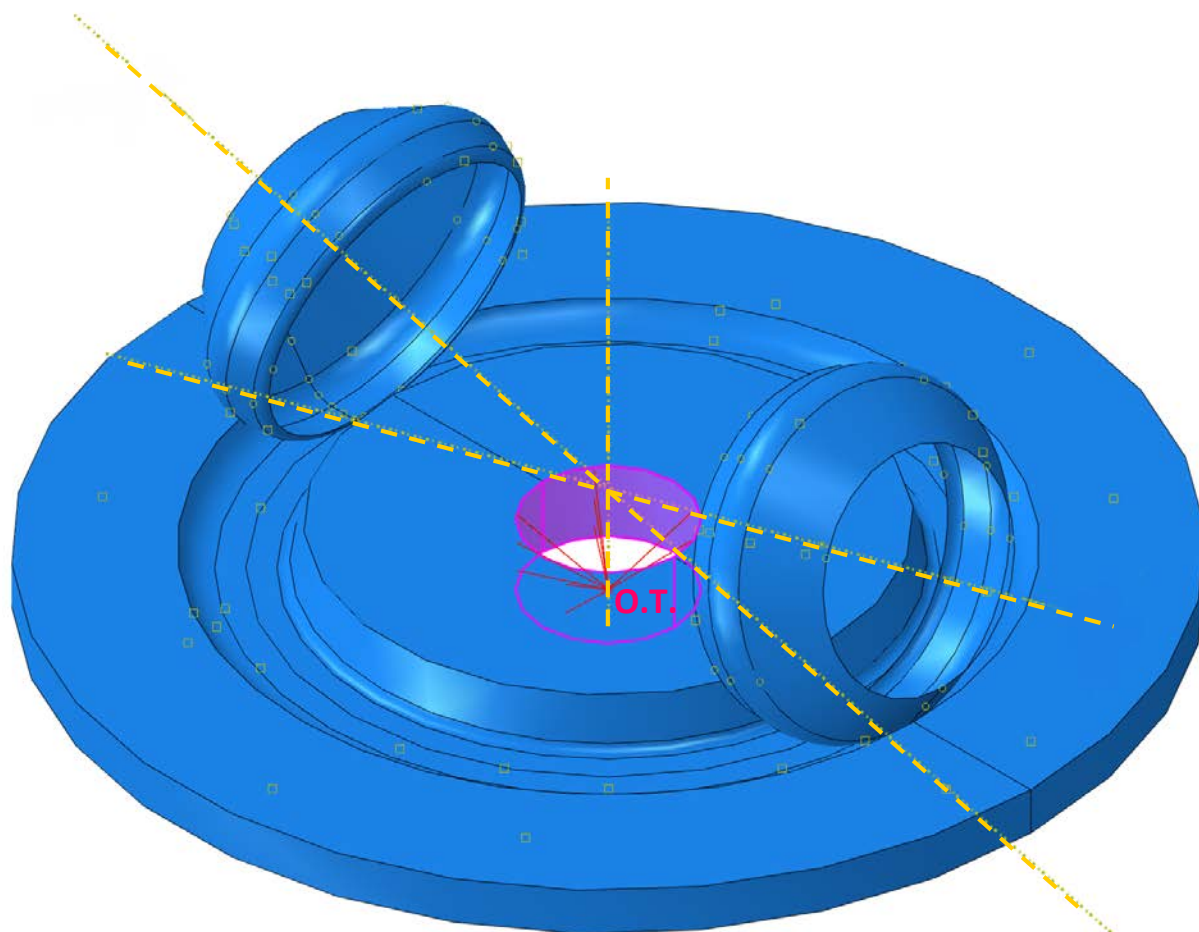


Рисунок 5.3.7 – Схема вращения заготовки

Ролики в процессе раскатки перемещаются от точки касания с заготовкой вдоль её радиуса на расстояние равное 26 мм. Кроме того, для исключения ошибок при определении контактирующих узлов необходимо моделировать вращение роликов. Вращение роликов реализовано путем задания угловой скорости опорной точки в собственной системе координат. Постоянная скорость вращения ролика составляет 4,08 рад/мин, что соответствует линейной скорости точки контакта 300 мм/мин. Схема нагружения роликов приведена на рисунке 5.3.8.



Рисунок 5.3.8 – Схема нагружения роликов

В начале процесса раскатки ролик расположен с зазором 1 мм от поверхностей заготовки. Длительность моделируемого процесса раскатки заготовки составляет 24 минуты. За первую минуту ролики перемещаются на 1 мм в сторону диска, происходит касание поверхностей роликов и заготовки. Далее за 23 минуты ролики перемещаются в радиальном направлении на 26 мм с постоянной скоростью 1,5 мм/мин. После чего в течение 5 минут ролики сохраняют свое положение и за последнюю минуту моделируемого процесса перемещаются от заготовки на расстояние достаточное для того, чтобы поверхности роликов и заготовки отделились. На рисунке 5.3.9 приведены зависимости радиального перемещения роликов и перемещения роликов вдоль оси заготовки, а на рисунке 5.3.10 приведена зависимость скорости вращения заготовки и количества её оборотов в зависимости от времени моделируемого процесса.

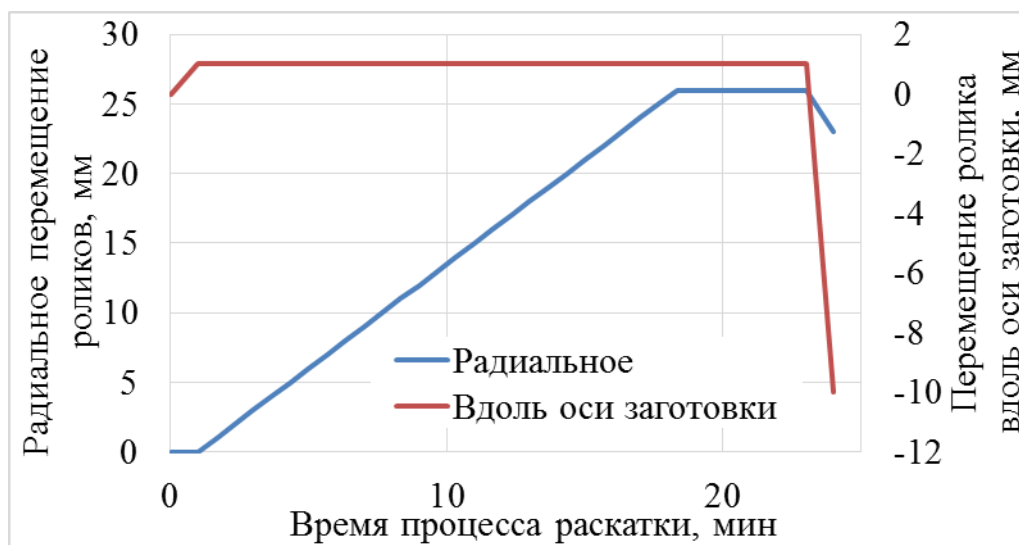


Рисунок 5.3.9 – Перемещение роликов в моделируемом процессе раскатки

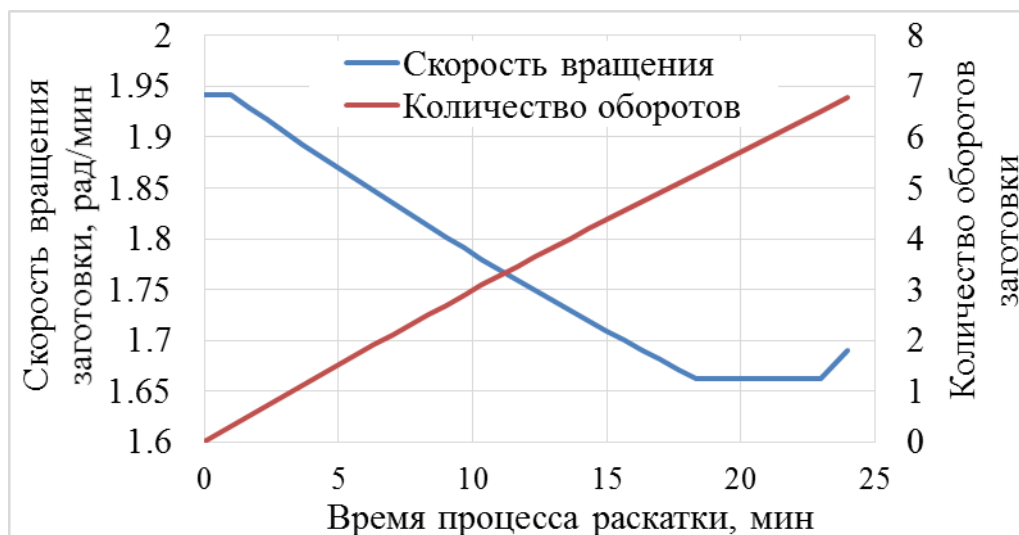


Рисунок 5.3.10 – Скорость вращения и обороты заготовки в моделируемом процессе раскатки

Перемещение роликов необходимо задавать в собственной системе координат, в двух осях, одна из которых направлена вдоль оси ролика, а вторая перпендикулярна этой оси и находится в плоскости, образованной осями двух роликов (рисунок 5.3.8). На рисунке 5.3.11 приведены зависимости перемещений роликов в собственной системе координат от времени моделируемого процесса раскатки.

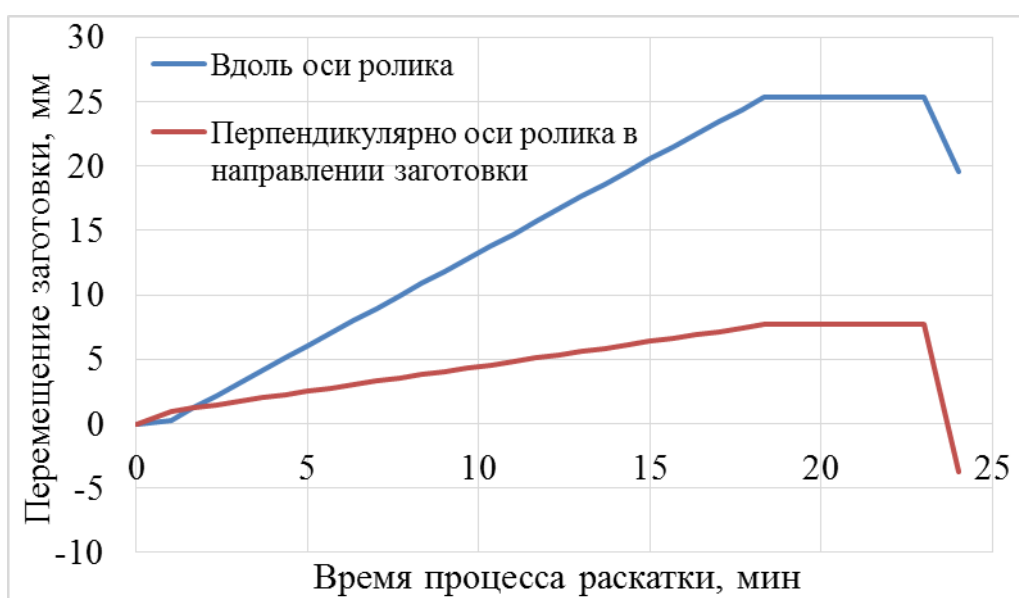


Рисунок 5.3.11 – Перемещения роликов в собственной системе координат

5.4 Результаты расчета процесса изотермической раскатки диска

Результаты моделирования процесса изотермической раскатки заготовки диска из жаропрочного сплава ЭП741НП приводятся в виде графиков, характеризующих процесс деформирования, и картограмм, показывающих распределение параметров напряжений и деформаций в разные моменты процесса раскатки.

На рисунке 5.4.1 приведена зависимость скорости деформации ξ от времени процесса изотермической раскатки. Значение скорости деформации приведено для точки верхней кромки обода диска, с которой происходит контакт ролика в начальный момент раскатки. Наблюдается значительное изменение скорости деформации в этой точке.

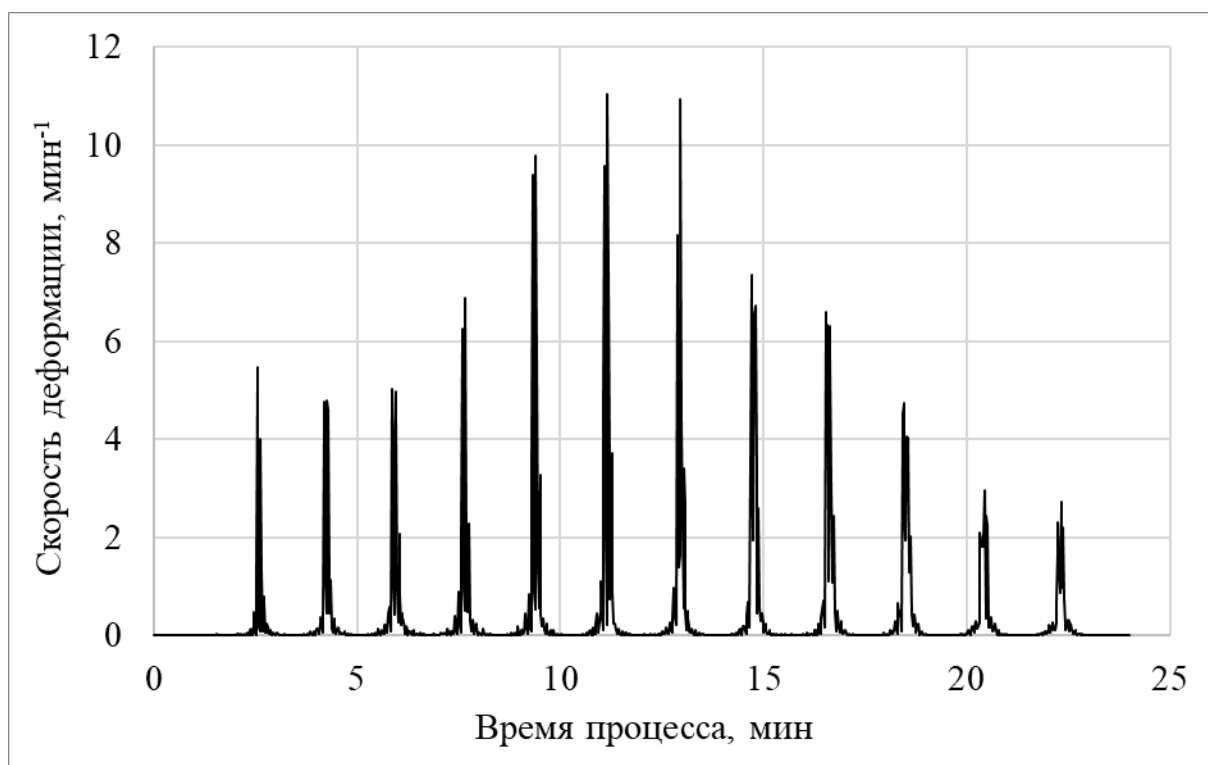


Рисунок 5.4.1 – Изменение скорости деформации

Из приведенной зависимости видно, что скорость деформации в месте контакта с роликом может достигать 10 мин^{-1} . Скорость деформации материала при раскатке может превышать диапазон скоростей, используемый для определения материальных параметров, однако при скоростях деформации выше $0,3 \text{ мин}^{-1}$ вид диаграммы деформирования изменяется не существенно.

На рисунках 5.4.2 – 5.4.7 приведены картограммы интенсивности напряжений в заготовке диска после каждого оборота, а на рисунке 5.3.8 картограмма интенсивности остаточных напряжений (пунктирной линией отмечены оси роликов).

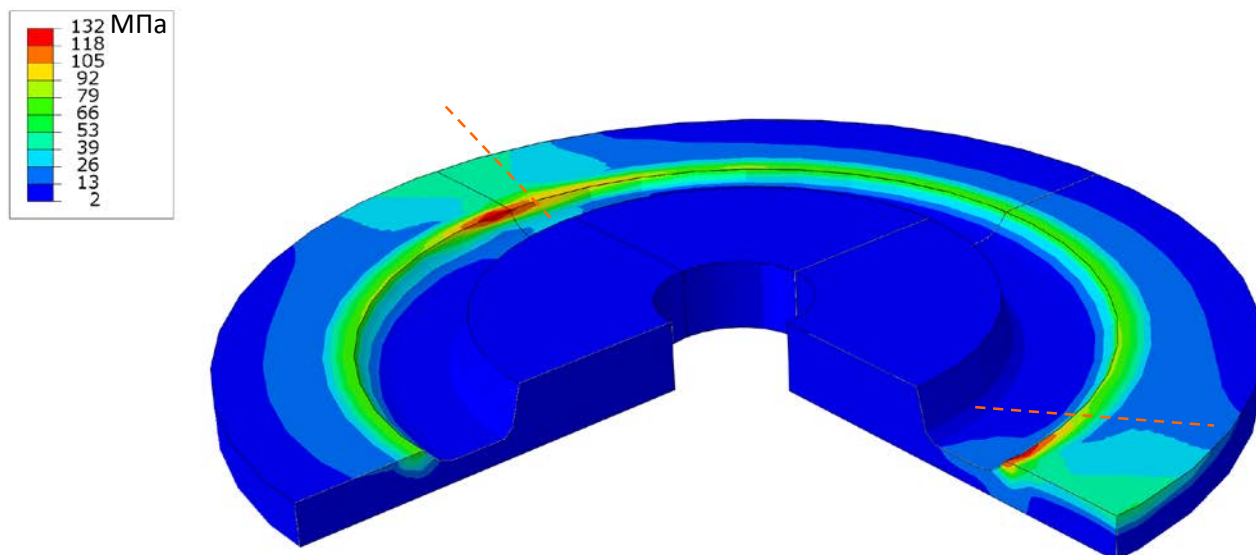


Рисунок 5.4.2 – Интенсивность напряжений после одного оборота заготовки

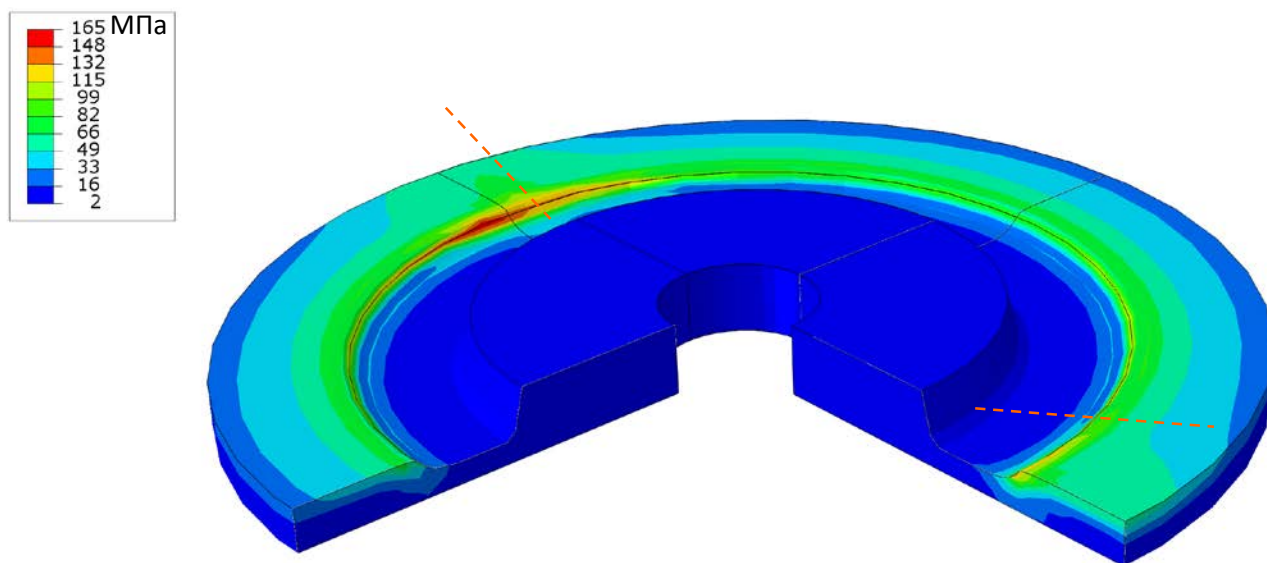


Рисунок 5.4. 3 – Интенсивность напряжений после двух оборотов заготовки

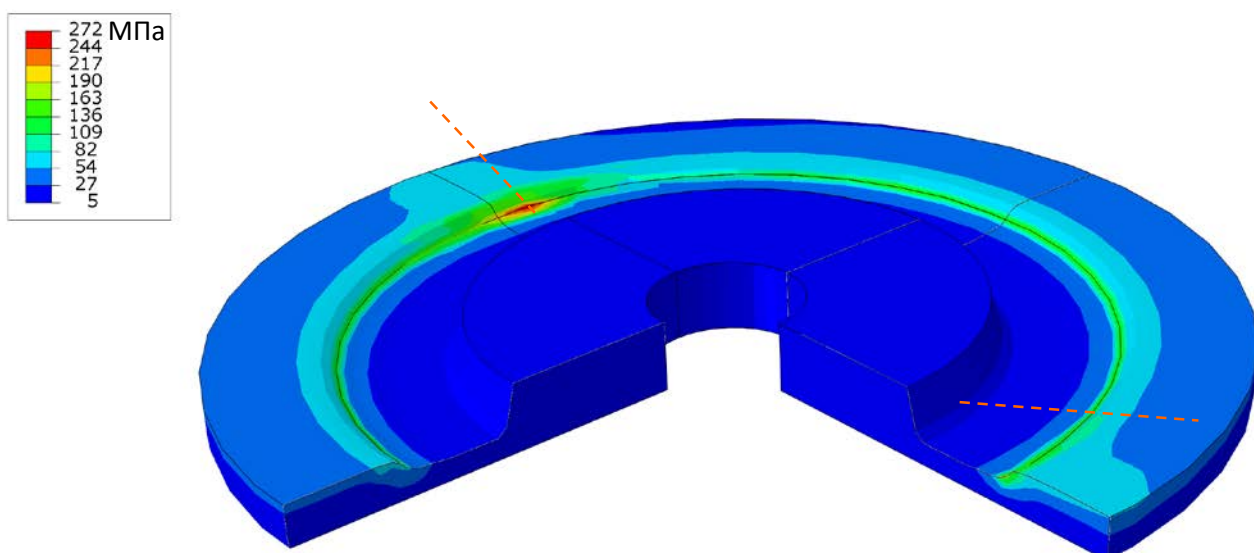


Рисунок 5.4.4 – Интенсивность напряжений после трех оборотов заготовки

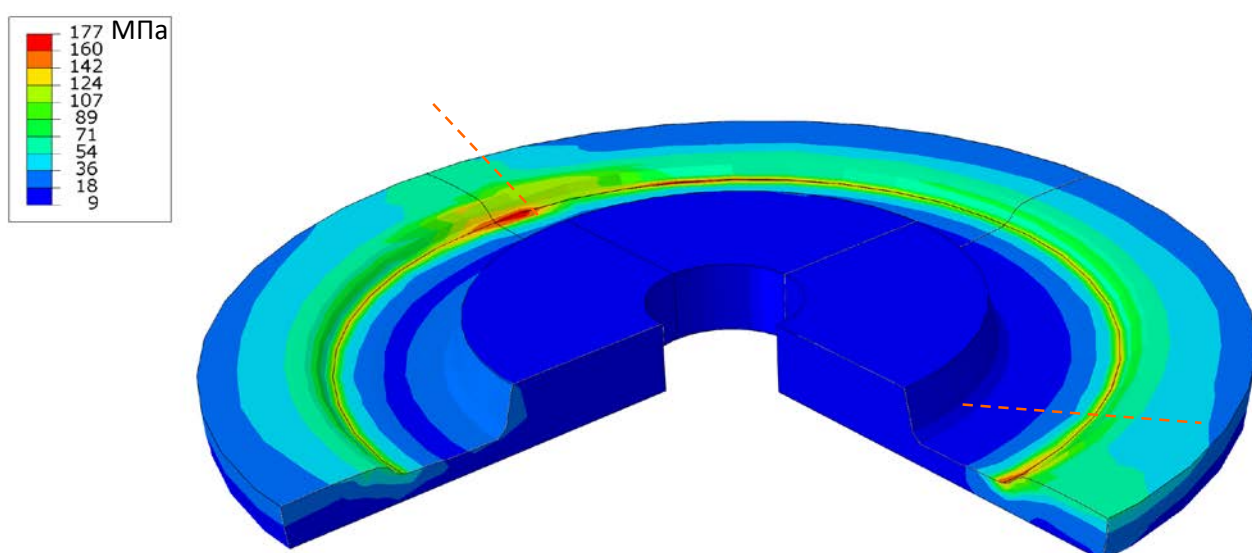


Рисунок 5.4.5 – Интенсивность напряжений после четырех оборотов заготовки

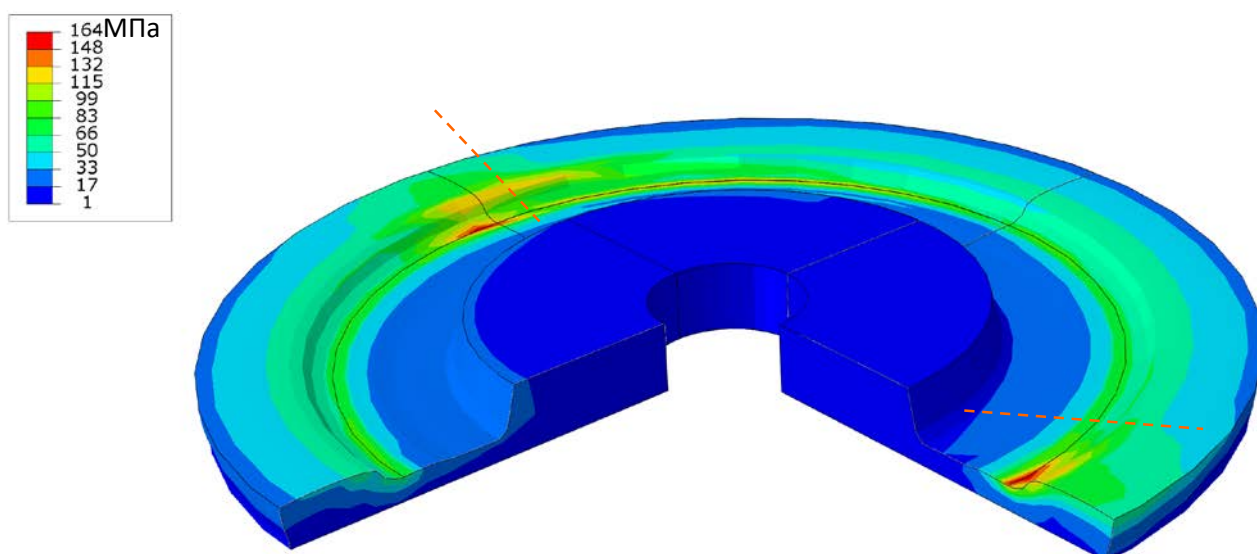


Рисунок 5.4.6 – Интенсивность напряжений после пяти оборотов заготовки

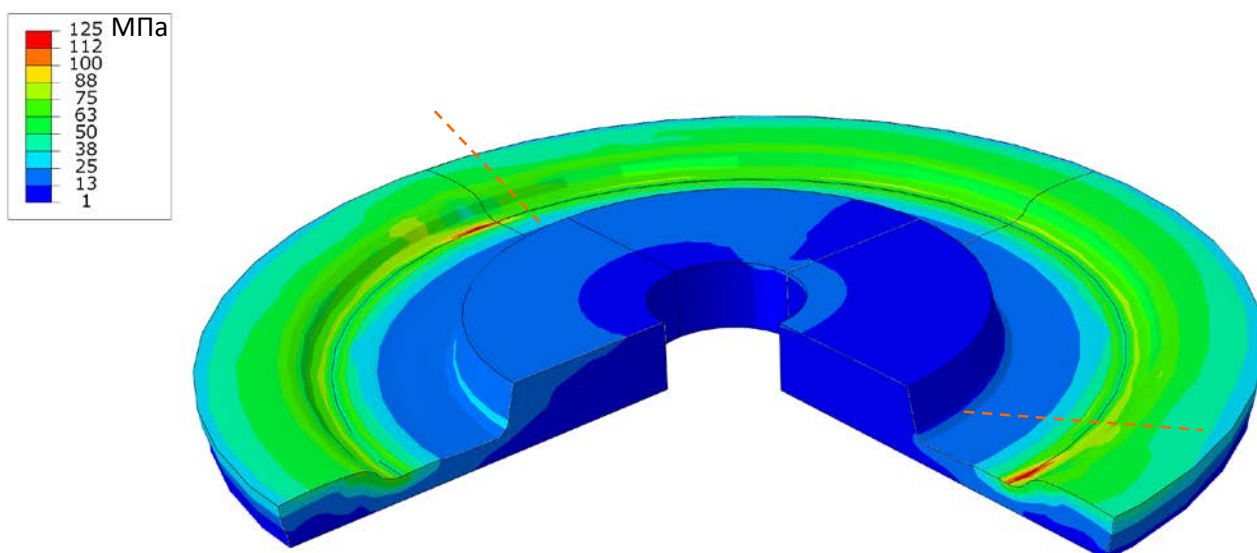


Рисунок 5.4. 7 – Интенсивность напряжений после шести оборотов заготовки

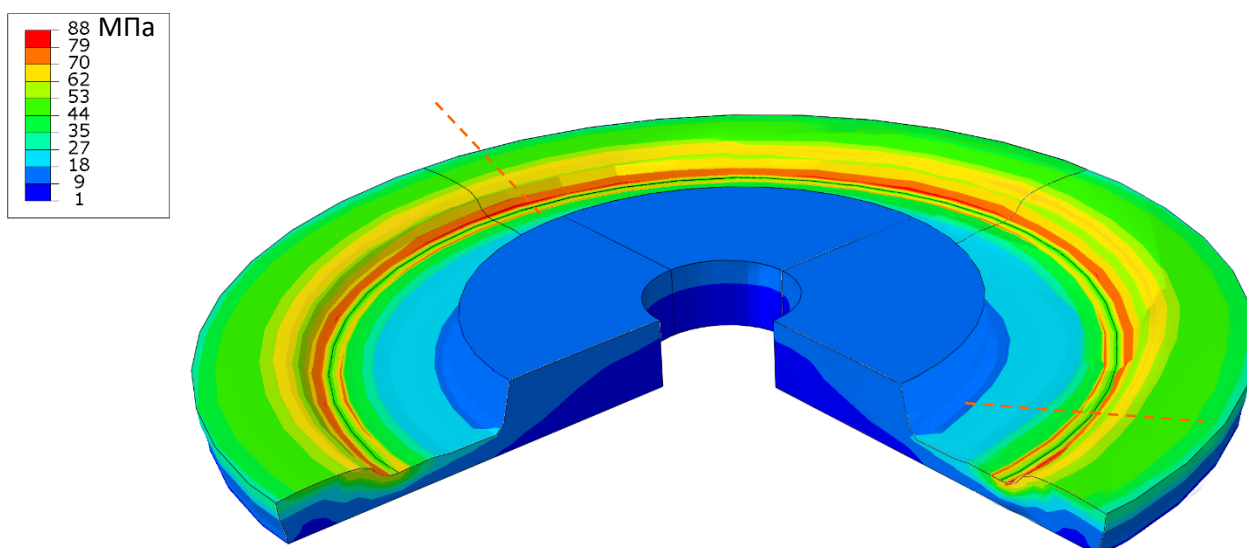


Рисунок 5.4.8 – Интенсивность остаточных напряжений

Из приведенных картограмм видно, что в очаге деформирования значения интенсивности напряжений могут превышать 250 МПа, что свидетельствует высокой степени сжатия материала.

На рисунке 5.4.9 приводятся зависимости реакции сил, возникающих в роликах в радиальном, осевом направлениях, а также значение равнодействующей силы, из которых видно, что усилие в радиальном направлении остается практически постоянным в течение всего процесса раскатки, в то время как осевое усилие возрастает, что также свидетельствует о том, что основная доля

вязкопластического формоизменения заготовки является сжатием материала обода диска по толщине заготовки диска.

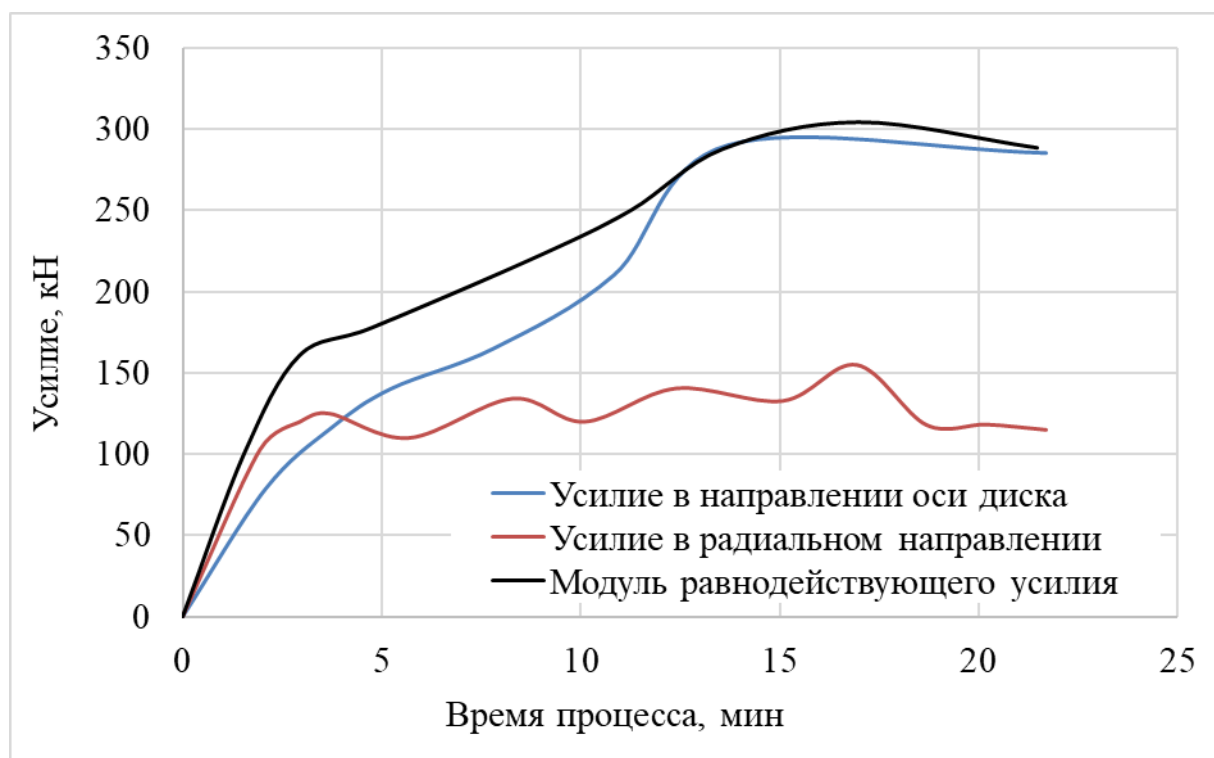


Рисунок 5.4.9 – Усилие, придаваемое ролику в процессе раскатки

Для анализа формоизменения заготовки в процессе раскатки на рисунке 5.4.10 приводятся зависимости вязкопластических деформаций точки верхней кромки обода диска, с которой происходит первоначальный контакт ролика. Видно, что в процессе изотермической раскатки происходит сложное знакопеременное деформирование материала с переменной скоростью деформации. На рисунке 5.4.11 в векторном пространстве А.А. Ильюшина представлена проекция траектории деформации на плоскость Э1-Э2, которая представляет собой трехзвенную траекторию с двумя прямолинейными и одним криволинейным участками. Представленная траектория подтверждает сложный знакопеременный характер процесса деформирования.

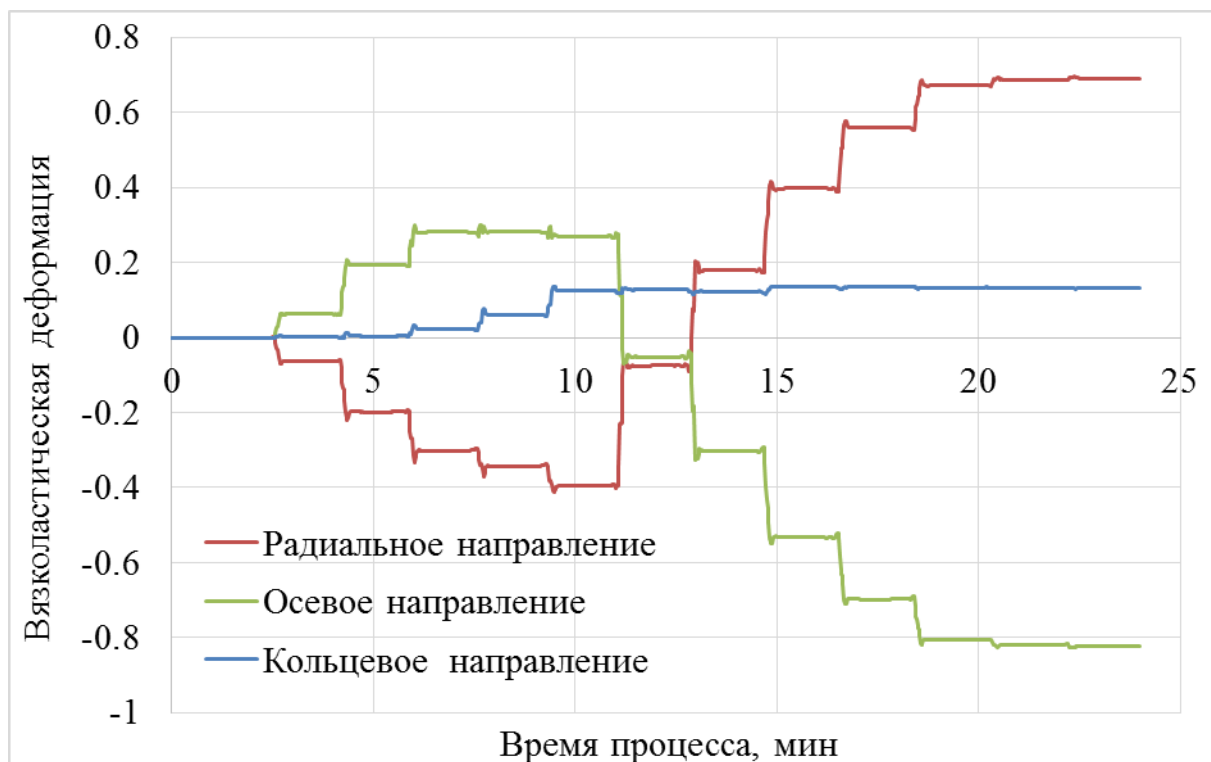


Рисунок 5.4.10 – Изменение вязкопластической деформации в процессе раскатки

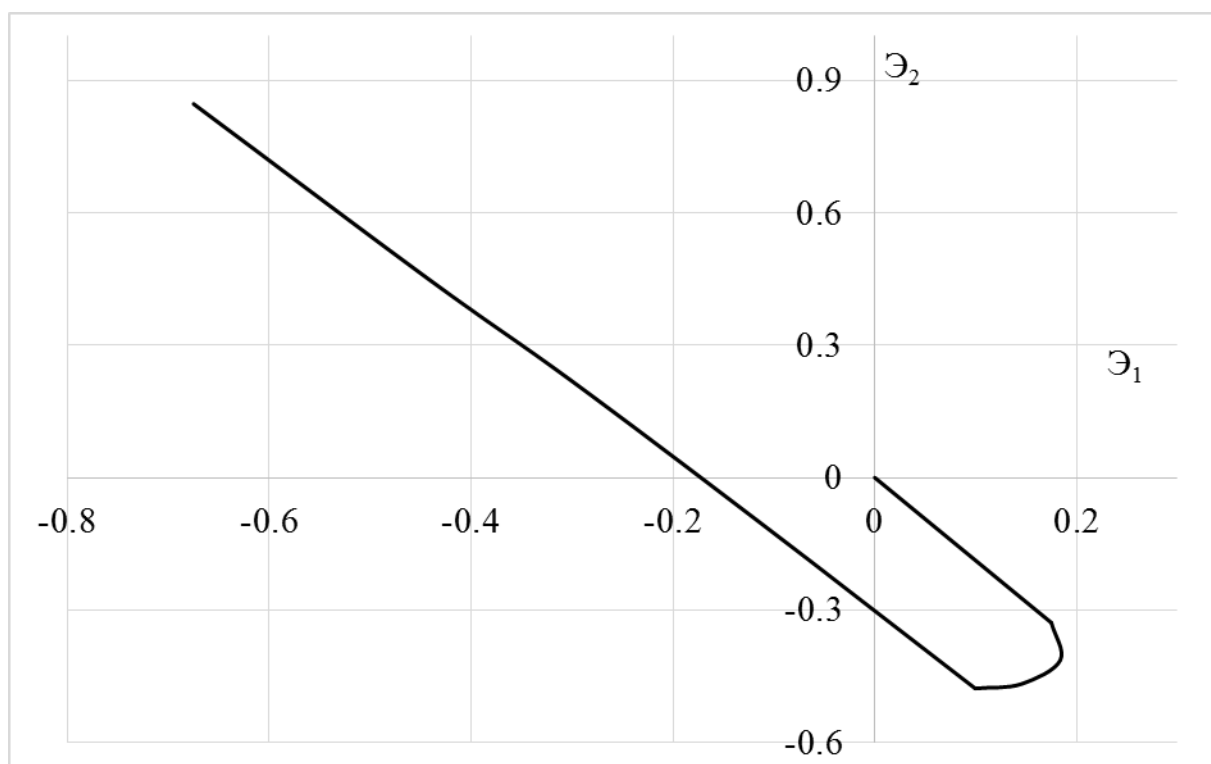


Рисунок 5.4.11 – Проекция траектории деформации

Из рисунков видно, что процесс деформирования материала обода диска разделяется на два этапа. В начале раскатки материал кромки обода диска сжимается в радиальном направлении. При этом происходит смещение материала

обода к центру заготовки в осевом направлении, и в момент достижения критического значения, при котором толщина обода становится равной толщине полотна, происходит смена направления вязкопластического деформирования – материал подвергается значительному сжатию в направлении оси заготовки диска и в тоже время растягивается в радиальном направлении, сохраняя свой объем. При этом следует отметить, что кольцевая компонента вязкопластической деформации меньше осевой и радиальной и на протяжении всего процесса раскатки имеет положительный знак, а максимальное её значение достигается в конце первого этапа деформирования, когда знак двух других компонент меняется.

Далее на рисунках 5.4.12 – 5.7.18 приводятся картограммы максимальных значений накопленной вязкопластической деформации после каждого оборота заготовки диска и её остаточных значений.

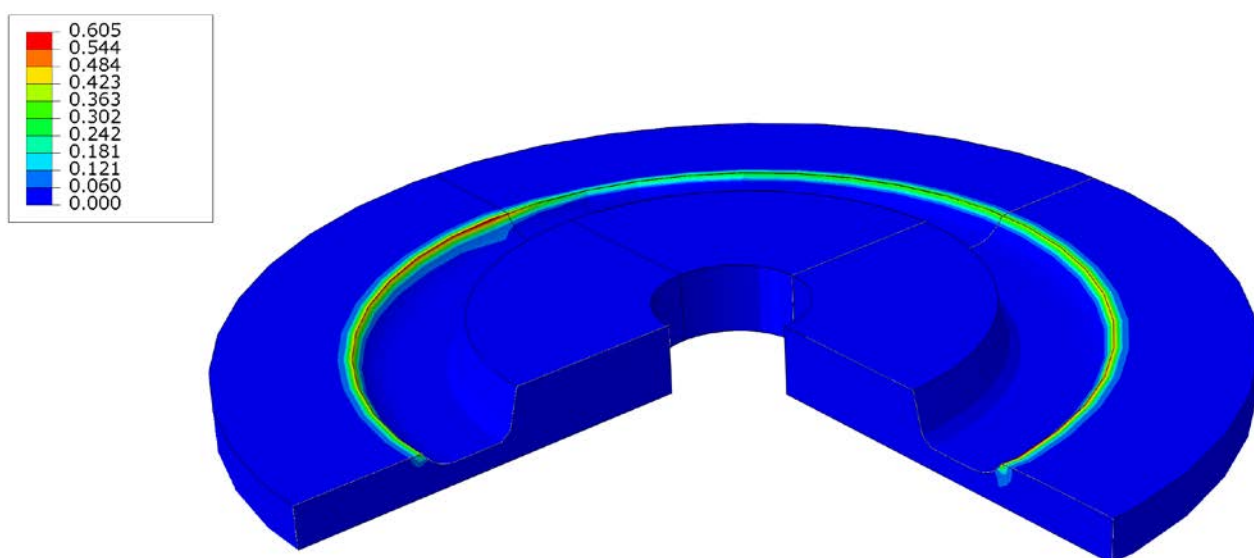


Рисунок 5.4.12 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после одного оборота заготовки

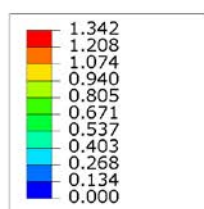
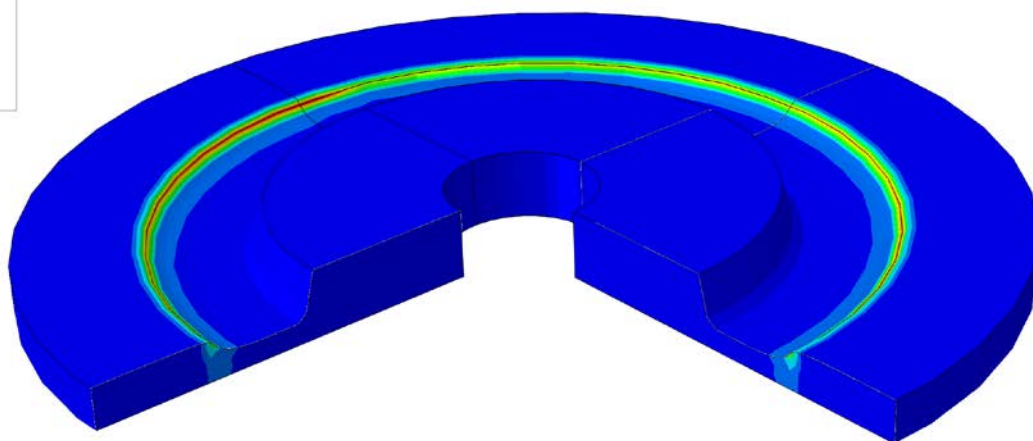


Рисунок 5.4.13 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после двух оборотов заготовки

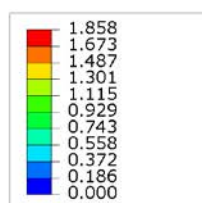
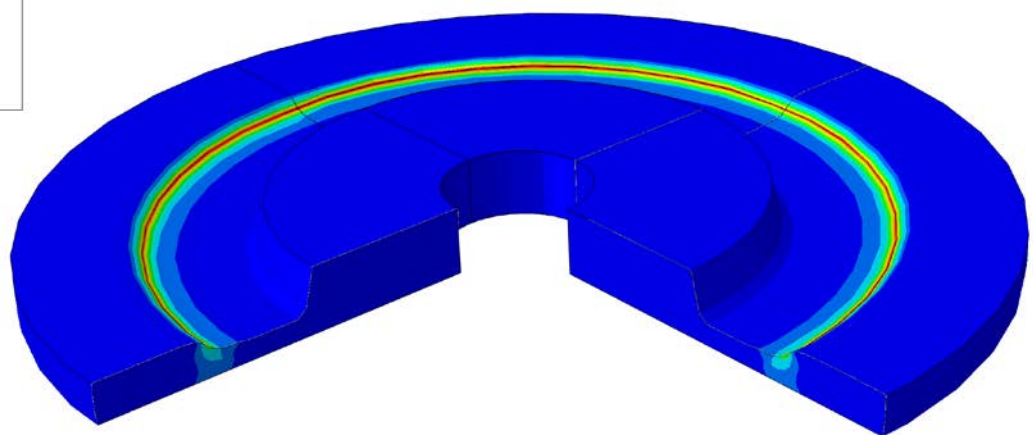


Рисунок 5.4.14 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после трех оборотов заготовки

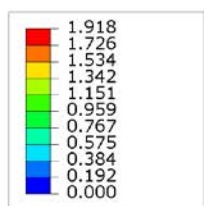
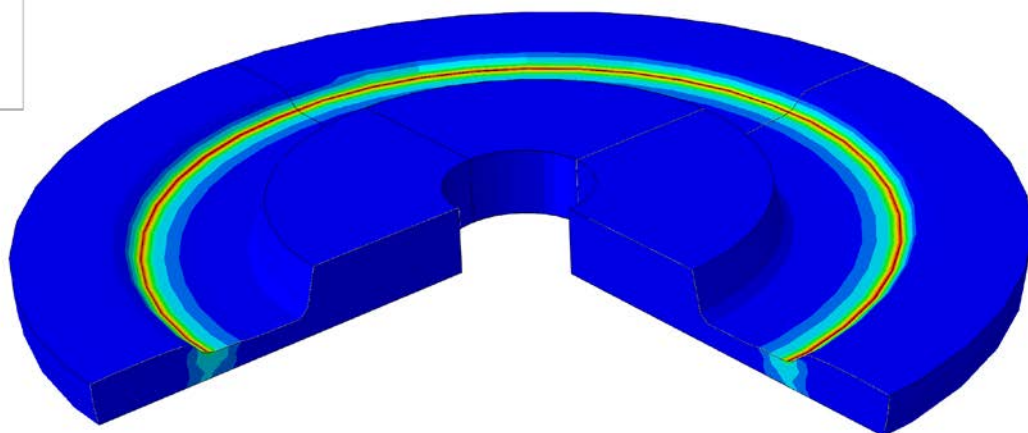


Рисунок 5.4.15 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после четырех оборотов заготовки

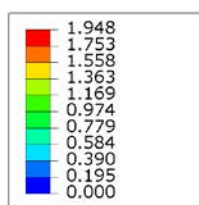
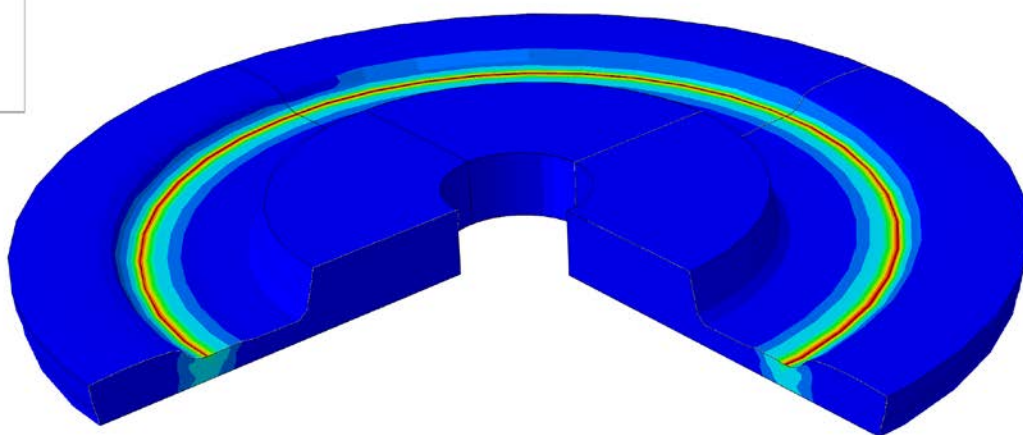


Рисунок 5.4.16 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после пяти оборотов заготовки

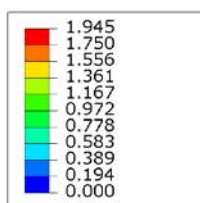
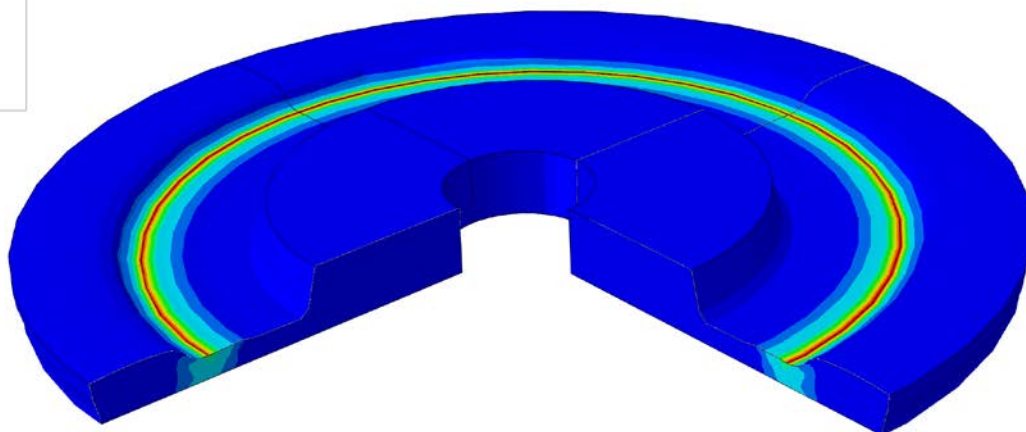


Рисунок 5.4.17 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации после шести оборотов заготовки

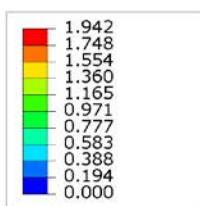
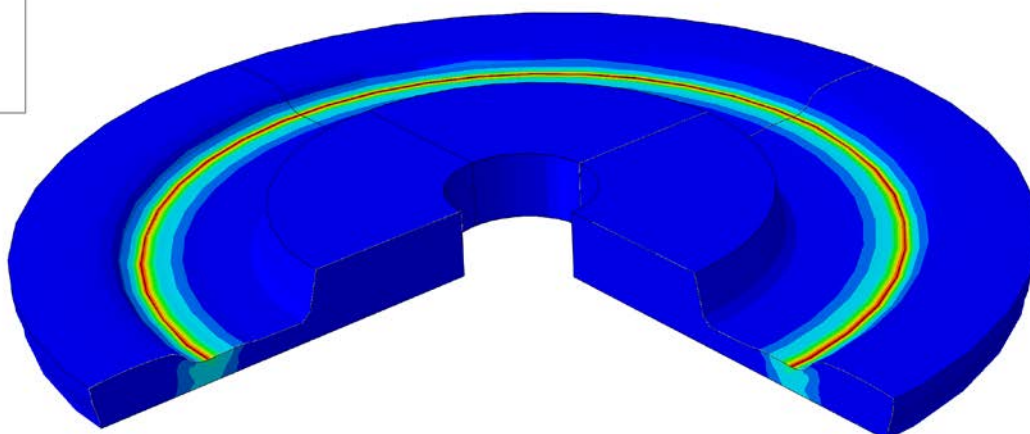


Рисунок 5.4.18 – Максимальное значение накопленной вязкопластической деформации в конце процесса раскатки

Значительно большие значения вязкопластической деформации реализуются в элементах кромки обода диска, где происходит касание с роликом. Это обусловлено формой заготовки, которая отличается от формы ролика. Такие деформации могут приводить к существенной неоднородности структуры получаемой детали и должны быть исключены путем выбора наиболее оптимальной формы заготовки диска перед раскаткой.

На рисунках 5.4.19 – 5.4.30 приведены значения перемещений элементов заготовки после каждого оборота и в конце процесса раскатки в осевом и радиальном направлениях. На рисунках 5.4.24 и 5.4.30 кружком обозначена точка, с которой происходит контакт ролика в начальный момент раскатки и которая в конце процесса раскатки перемещается в положение, обозначенное крестиком.

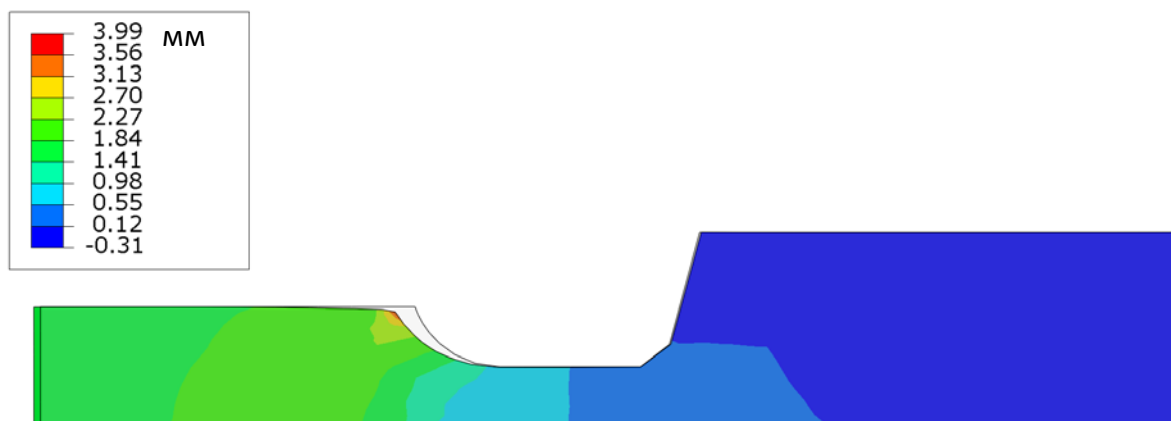


Рисунок 5.4.19 – Радиальные перемещения после одного оборота заготовки

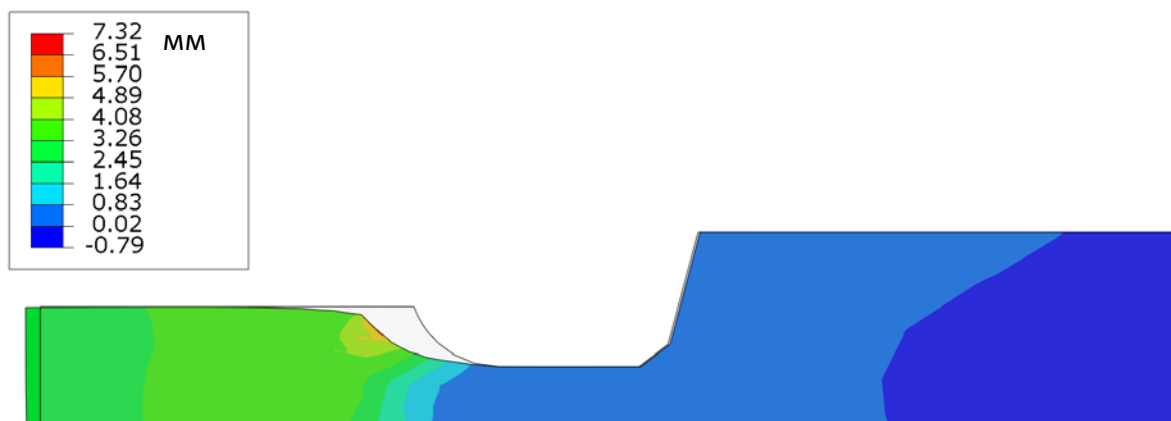


Рисунок 5.4.20 – Радиальные перемещения после двух оборотов заготовки

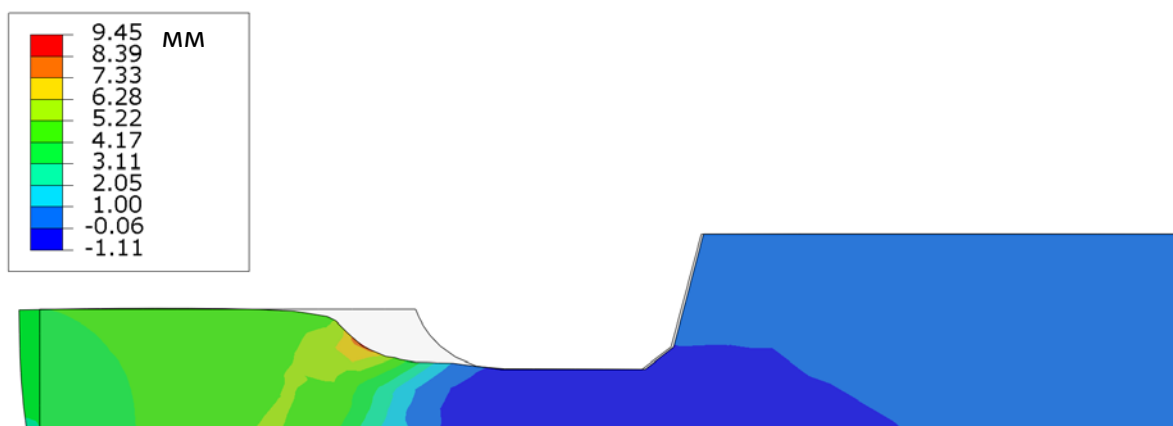


Рисунок 5.4.21 – Радиальные перемещения после трех оборотов заготовки

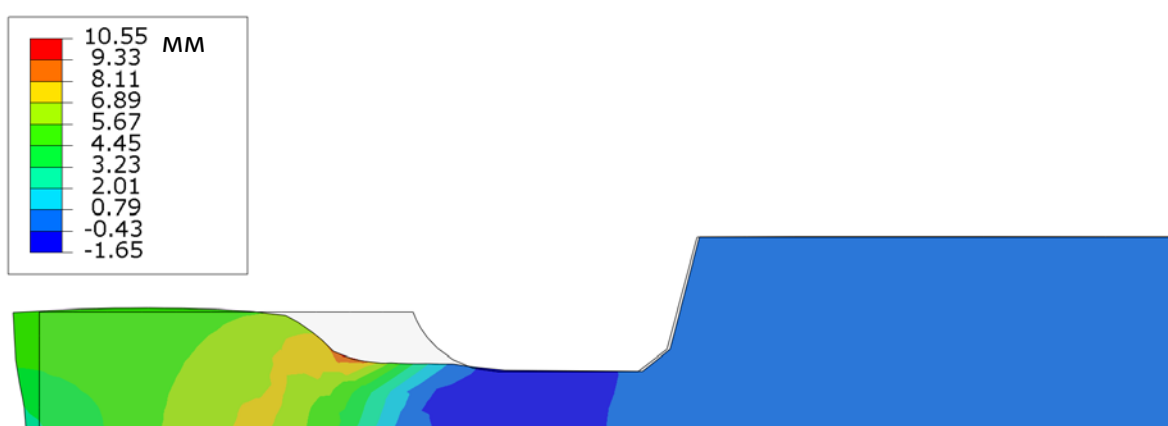


Рисунок 5.4.22 – Радиальные перемещения после четырех оборотов заготовки

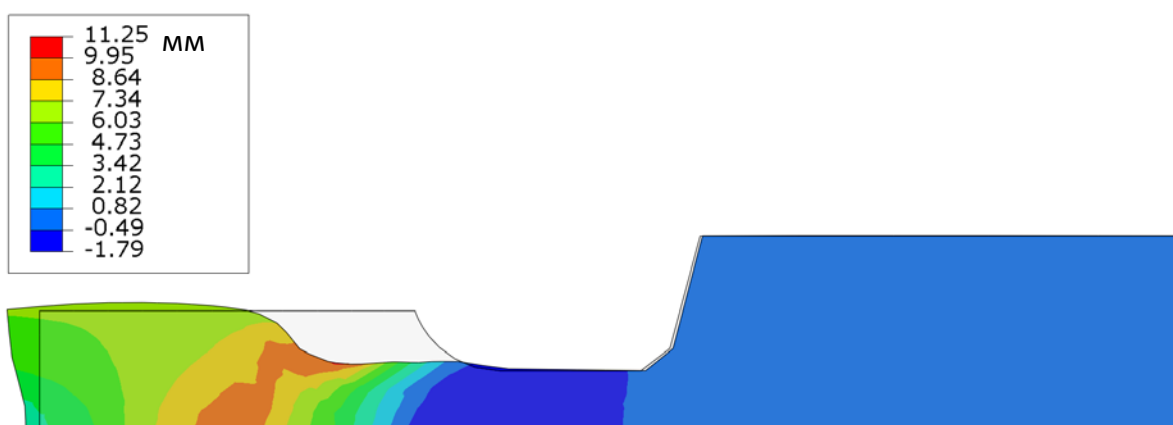


Рисунок 5.4.23 – Радиальные перемещения после пяти оборотов заготовки

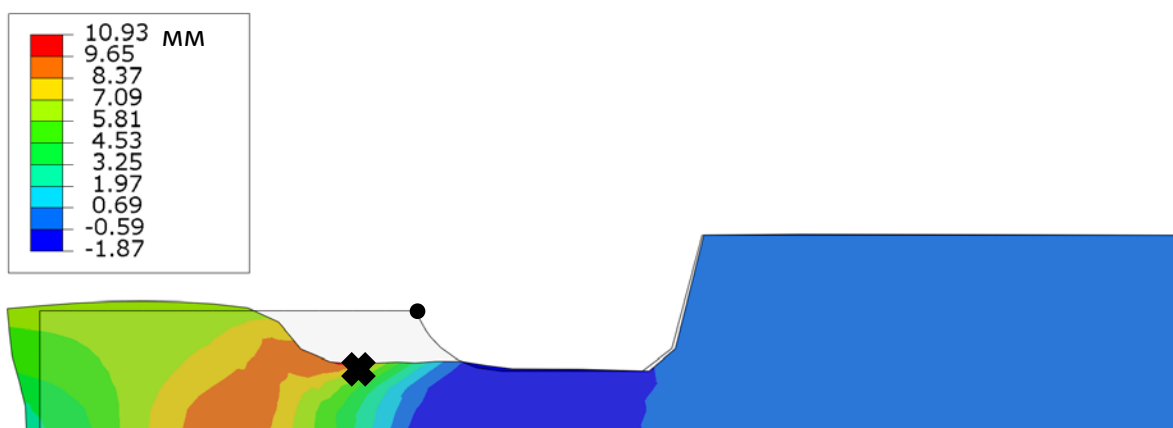


Рисунок 5.4.24 – Радиальные перемещения в конце процесса раскатки

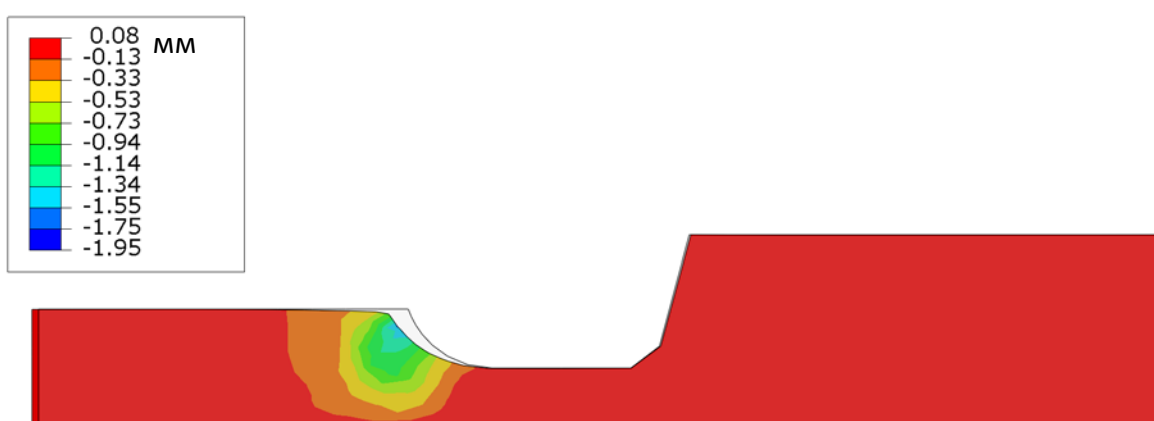


Рисунок 5.4.25 – Осевые перемещения после одного оборота заготовки

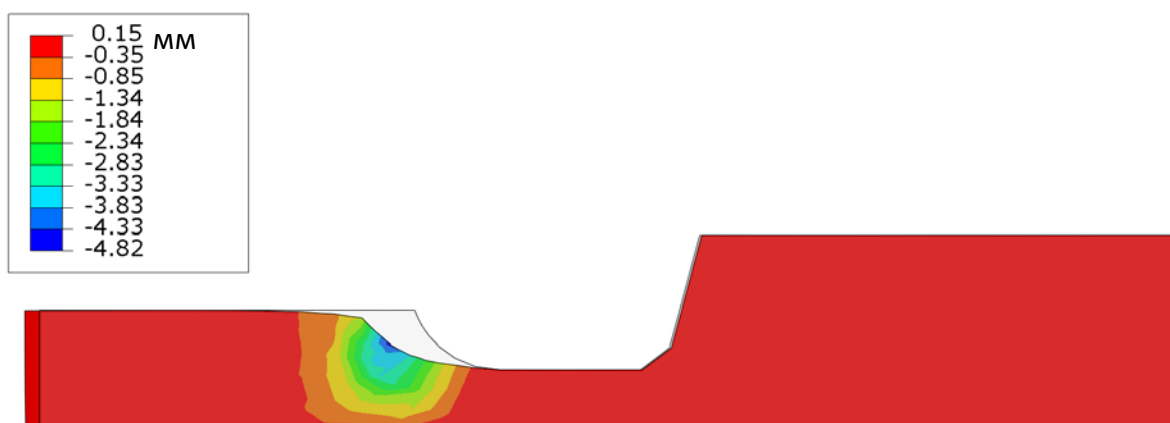


Рисунок 5.4.26 – Осевые перемещения после двух оборотов заготовки

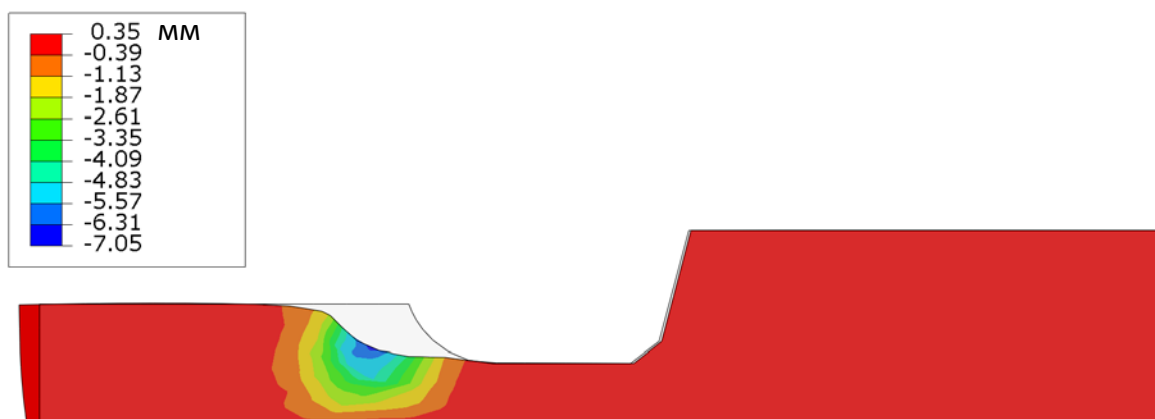


Рисунок 5.4.27 – Осевые перемещения после трех оборотов заготовки

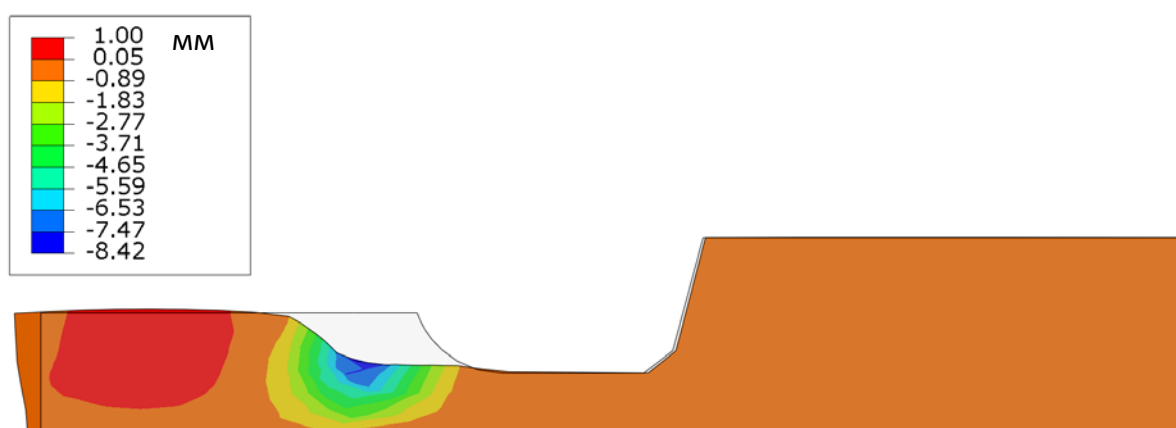


Рисунок 5.4.28 – Осевые перемещения после четырех оборотов заготовки

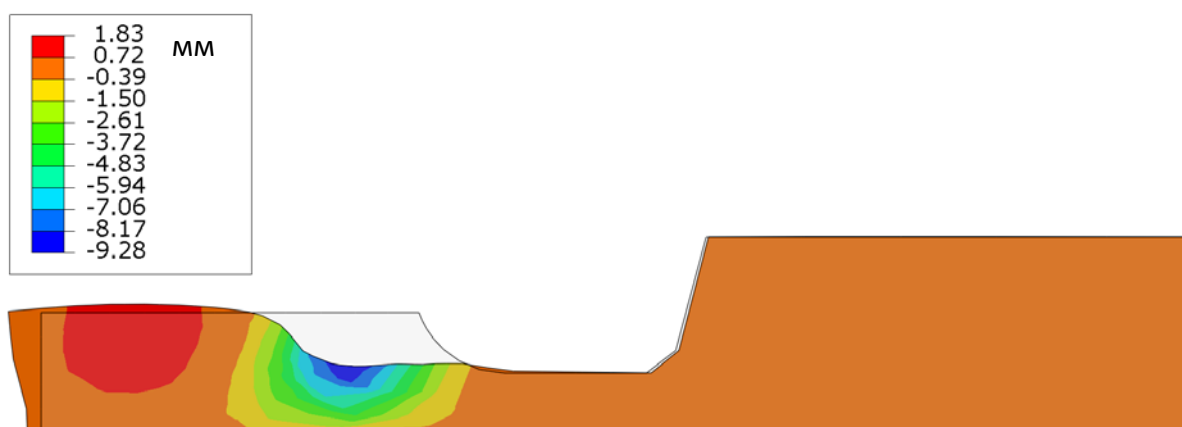


Рисунок 5.4.29 – Осевые перемещения после пяти оборотов заготовки

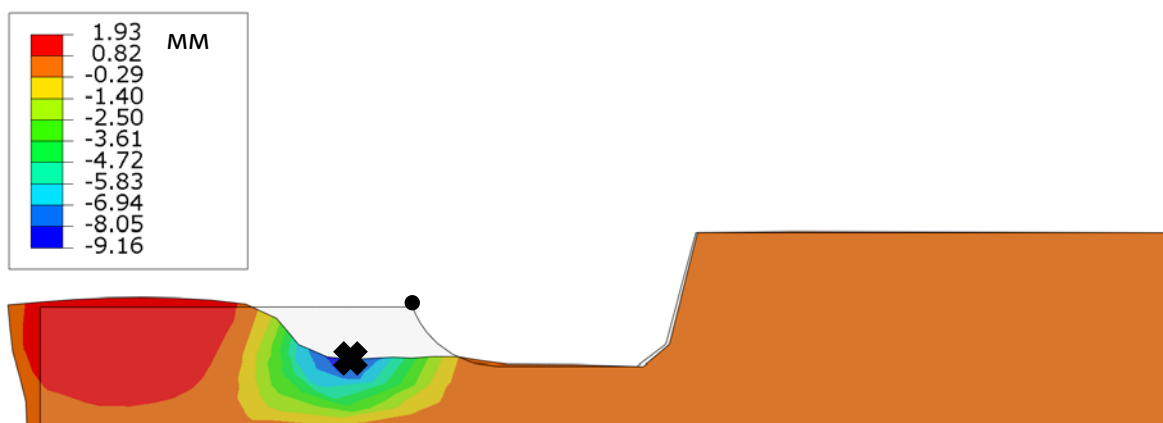


Рисунок 5. 4.30 – Осевые перемещения в конце процесса раскатки

Из приведенных рисунков можно сделать вывод, что в процессе изотермической раскатки наибольшему деформированию подвержен материал обода диска, происходит его сжатие в направлении оси диска и незначительное вытягивание в радиальном направлении. Присутствует неоднородность деформированного состояния – величина вязкопластической деформации уменьшается от места контакта с роликом к центру заготовки. При этом важно отметить, что в смоделированном процессе раскатки заготовки диска из сплава ЭП741НП удлинение полотна практически отсутствует, что свидетельствует о неоднородности структуры получаемой заготовки в радиальном направлении.

На рисунке 5.3.31 приведена картограмма полных перемещений элементов диска и наложенные на неё формы заготовки до раскатки и диска, полученного экспериментальным путем. Также на рисунке 5.4.31 кружком обозначена точка, с которой происходит контакт ролика в начальный момент раскатки и которая в конце процесса раскатки перемещается в положение, обозначенное крестиком.

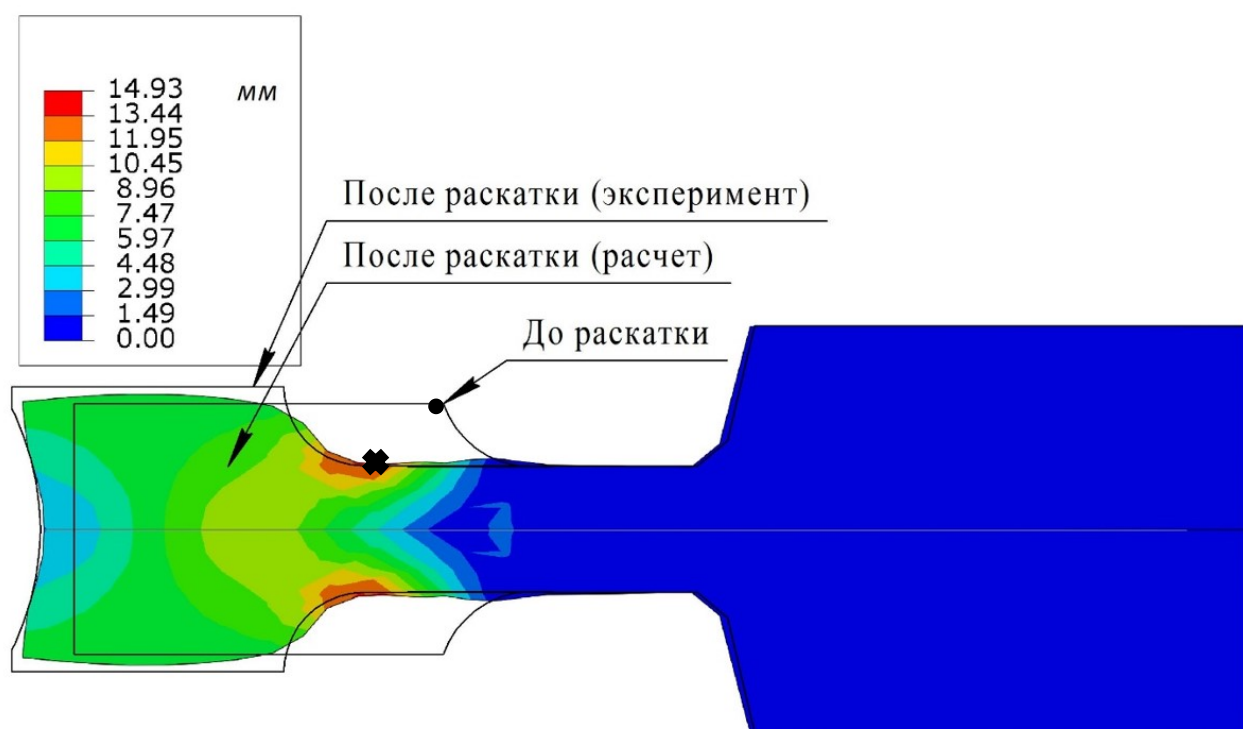


Рисунок 5.3.31 – Геометрические характеристики диска, полученные путем экспериментальной изотермической раскатки, и геометрические характеристики, полученные в результате расчета.

Сравнение геометрических характеристик диска, полученных на основе экспериментальной и расчетной изотермической раскатки диска, показывает, как качественное, так и количественное их соответствие. Отличие по геометрическим характеристикам не превышает 10%. При этом результаты моделирования показывают незначительную неровность полотна диска по сравнению с формой, полученной путем экспериментальной раскатки. Обод диска имеет выгнутую форму. Форма торца обода диска, полученная с помощью моделирования, совпадает с чертежом диска, полученного путем экспериментальной раскатки. Полученные значения геометрических характеристик диска свидетельствуют о достаточной эффективности разработанной модели вязкопластичности при моделировании процессов изотермической раскатки дисков с использованием метода конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты:

1. Проведены экспериментальные исследования конструкционных материалов в условиях высоких температур с различными постоянными и переменными скоростями деформации, результаты которых позволили выявить особенности процесса деформирования материала диска в процессе изотермической раскатки.

2. Разработана модель вязкопластичности, позволяющая учитывать влияние повторного нагружения с различной скоростью при высоких температурах на процесс деформирования материала. Разработан метод идентификации материальных параметров на основе серии испытаний на растяжение или сжатие с различными скоростями деформации и проведена верификация разработанной модели вязкопластичности.

3. Разработан метод внедрения модели вязкопластичности в современные программные комплексы, позволяющие моделировать процессы изотермической раскатки, основанные на методе конечных элементов. Получены необходимые для этого линеаризованные уравнения модели вязкопластичности.

4. Проведено практическое апробирование разработанной модели вязкопластичности и программного комплекса на примере расчета процесса изотермической раскатки диска из сплава ЭП741НП и сравнение полученных результатов с результатами проведенных экспериментальных исследований по раскатке диска. Отличие расчетных и экспериментальных геометрических характеристик дисков в конце процесса раскатки не превысило 10%.

Основные выводы:

1. В процессе раскатки диска материал деформируется в условиях сложного знакопеременного нагружения при значительном изменении скорости деформации.

2. На основе анализа особенностей деформирования материала в процессе раскатки диска показана необходимость использования модели вязкопластичности, основанной на теории течения при комбинированном

упрочнении, учитывающей особенности сложного знакопеременного характера нагружения и влияние скорости деформации на процесс деформирования материала, для достоверного моделирования раскатки диска.

3. Анализ результатов экспериментальных исследований показал, что зависимости параметров материала от скорости деформации описываются аналитическими уравнениями степенного вида. При изменении скорости деформации в процессе нагружения напряжения увеличиваются или уменьшаются до значения на диаграмме, соответствующей новой скорости деформации.

4. При численном решении уравнений модели вязкопластичности для обеспечения нахождения точки напряженного состояния на поверхности нагружения приращение накопленной вязкопластической деформации необходимо вычислять с учетом выполнения равенства интенсивности активных напряжений и размера поверхности нагружения в конце расчетного шага.

Перспективы развития:

Перспективами развития является внедрение результатов работы в технологический процесс изготовления дисков газотурбинных двигателей, которое в совокупности с современными подходами к оценке материала позволят выбрать наиболее оптимальные режимы изотермической раскатки для получения заданных характеристик дисков газотурбинных двигателей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абашев Д.Р. Развитие модели упругопластического деформирования, критериев усталости и методик идентификации материальных параметров конструкционных сплавов: дисс.: канд. физ.-мат. н. – Королев, 2016. – 157 с.
2. Абашев Д.Р., Бондарь В. С., Диковицкий П.О., Морозов С.В., Ларионова О.Е. Вязкопластическое деформирование гранулированного никелевого сплава при высоких температура // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2024. – №1. – С. 13–20.
3. Бессон Ж. Нелинейная механика материалов / Бессон Ж., Каето Ж., Ж.-Л. Шабоши, Форест Т.С. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
4. Биргер И.А. Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. – 1961. – № 1. – С. 193–196.
5. Биргер И.А. Термопрочность деталей машин. / Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В., и др. – Москва: Машиностроение, 1975. – 455 с.
6. Бондарь В.С. Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждений материала // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюзн. Межвуз. Сб. // Горьк. Ун-т., 1987. – С. 24–28.
7. Бондарь В.С. Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М.: Ленанд, 2006. – С. 94–109.
8. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкции при сложном неизотермическом нагружении: дис. д-ра физ.-мат.наук. – М.: Изд-во МАМИ, 1990. – 314 с.
9. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.
10. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Некоторые особенности процессов монотонных и циклических нагружений. Эксперимент и моделирование // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2 – С. 25–34.

11. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. О поверхностях памяти, разделяющих процессы монотонных и циклических нагружений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 42–50.
12. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Построение поверхности памяти для разделения процессов монотонных и циклических нагружений // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т. 84, № 3. – С. 364–375.
13. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Прикладная теория неупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 147–162.
14. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Ларионова О.Е. Внедрение модели вязкопластичности в программные комплексы, основанные на методе конечных элементов // XLIX Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов. – Москва. – 2025. – С. 415 – 418.
15. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Ларионова О.Е. Линеаризация уравнений модели вязкопластичности для внедрения в программный комплекс на основе метода конечных элементов // Материалы 67-й Всероссийской Конференции МФТИ: (30 марта – 5 апреля 2025 года). – Москва. – 2025 – С. 114 – 116.
16. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Ларионова О.Е. Моделирование процессов деформирования конструкционных сплавов и сталей при высоких температурах с учетом скорости нагружения // Математическое моделирование в естественных науках: материалы XXXIII Всероссийской конференции. – Пермь, 2024. – С. 68–71.
17. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Анализ циклического деформирования и мало-многоциклового усталости в условиях одноосного напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 52–71.
18. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Пластичность материалов при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях // Вестник

Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 53–74.

19. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 23–44.

20. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций // Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 35–46.

21. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при сложном нагружении по пространственным траекториям деформаций // Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 41–48.

22. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2018 – № 1. – С. 31–40.

23. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – № 72. – С. 18–27.

24. Бондарь В.С., Горохов В.Б., Санников В.М. Исследования малоциклового прочностии оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем: Всесоюзн. межвуз. сб. / Горьк. ун-т., – 1979. № 12. – С. 120–126.

25. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 176 с.

26. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С.39–56.

27. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35.
28. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.
29. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. – 2011. – № 3. – С. 46–56.
30. Бондарь В.С., Санников В.М. Малоцикловая усталость тоностенных конструкций при повышенных температурах // Конструк. прочность лопаток турбин ГТД Тезисы докладов IV научн.-технич. конф. – Куйбышев, 1976. – С. 75–76.
31. Бондарь В.С., Фомин Д.Ю., Ларионова О.Е. Моделирование процесса раскатки диска из жаропрочного никелевого сплава // Математическое моделирование в естественных науках: матер. XXXII Всероссийской конференции. – Пермь, 2023. – С. 67–69.
32. Бондарь В.С., Фомин Д.Ю., Ларионова О.Е. Юдинцева А.И. Моделирование процесса раскатки // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – т. 85, № 4. – С. 500–509.
33. Бурлаков И.А. Изготовление заготовок дисков ГТД на автоматизированной линии АЛРД-800 // Известия МГТУ «МАМИ». – 2008. – № 1 (5). – С. 164–166.
34. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., и др. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. – М., 1986. – С. 67.
35. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Степанов Л.П., Широков Р.И. Упругопластическое поведение стали 45 на винтовых траекториях деформаций // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 21–29.

36. Вавакин А.С., Викторов В.В., Сливовский М., Степанов Л.П. Экспериментальное исследование упругопластического поведения стали при простом и сложном циклическом деформировании. – М., 1986. – С. 175.
37. Васильев Д.М. О природе эффекта Баушингера // Сб. Некоторые проблемы прочности твердого тела. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
38. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 59–126.
39. Васин Р.А. О «памяти» материала в теории упругопластических процессов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Часть 2. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 57–70.
40. Васин Р.А. О двух гипотезах, используемых в теории упругопластических процессов для построения частных вариантов определяющих соотношений // Упругость и неупругость. Дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2011 года) Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. Г.Л. Бровк. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – С. 56–66.
41. Васин Р.А. О связи напряжений и деформаций для траекторий деформаций в виде двухзвенных ломаных // Прикл. механ. Т. 1. – 1965. – С. 89–94.
42. Васин Р.А. Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 40–57.
43. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. МДТТ. Т. 21. – М.; ВНИТИ, 1990. – С. 3–75.
44. Васин Р.А. Теория упругопластических процессов: подходы к построению и аттестации определяющих соотношений // Современные проблемы термовязкопластичности в прикладных задачах анализа конструкций и технологий высоких параметров. Труды VI школы-семинара. – М.: Ун-т машиностроения, 2013. – С. 34–40.

45. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов // Автореф. дисс. д.ф.-м.н. – М.: МГУ, 1987. – 36 с.
46. Васин Р.А., Широ́в Р.И. Исследование векторных свойств определяющих соотношений для металлов при плоском напряженном состоянии. – Деп. ВИНТИ 5.10.85, Ш 7541. – 1985. – С. 80.
47. Васин Р.А., Широ́в Р.И. Об исследованиях векторных и скалярных свойств металлов в экспериментах на сложное нагружение // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1986. – С. 57-61.
48. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 304 с.
49. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. Прикладная теория вязкопластичности. Монография. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. университета, 2015. – 317 с.
50. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.
51. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
52. ГОСТ 1497-84 Металлы. Методы испытаний на растяжение. – Москва: Стандартинформ, 2008. – 26 с.
53. ГОСТ 25.503-97 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Метод испытания на сжатие. – М.: Стандартинформ, 2005. – 25 с.
54. ГОСТ 9651-84 Металлы. Методы испытаний на растяжение при повышенных температурах. – М.: Издательство стандартов, 1993. – 6 с.
55. Давиденков Н.Н. Усталость металлов. – Киев: изд-во и тип. Изд-ва Акад. Наук УССР, 1949.

56. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений упругопластических процессов средних кривизн // Вестн. Моск. Ун-та. – 1981. – № 5. – С. 103 – 106.
57. Дао Зуй Бик. Некоторые свойства функций материала, фигурирующих в соотношениях теории пластичности // Прикл. пробл. прочн. и пластич. Методы решения задач упруг. и пластич. Всесоюзн. межвуз. сб.. // Горьк. ун-т. – 1981. – С. 37–45.
58. Дао Зуй Бик. О гипотезе локальной определенности в теории пластичности // Вестн. Моск. Ун-та Сер. Матем. Механ. – 1965. – №2. – С. 67–75.
59. Дао Зуй Бик. Экспериментальная проверка упрощенных вариантов теории пластичности // Вестн. МГУ. Сер. Матем. Мех. – 1966. – №1. – С. 107–117.
60. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. – 133 с.
61. Демьянушко И.В. Теория пластичности при неизотермическом нагружении // Мех. тверд. тела. 1968. – № 6. – С. 70–77.
62. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов с учетом воздействия физических полей // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1975. – № 5. – С. 111–119.
63. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30–57.
64. Жуков А.М. Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке // Инженерный журнал. 1961. Т. 1.
65. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 336 с.
66. Зубчанинов В.Г. Экспериментальное исследование и обоснование теории упругопластических процессов // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. III симпоз. – Тверь: ТвеПИ, 1992. – С. 94–158.
67. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гульяев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального

исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 203–215.

68. Зубчанинов В.Г., Иванов Д.Е. Локально простые процессы деформирования // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. II Всесоюз. симпоз. – Калинин: КГУ, 1987. – С. 24–31.

69. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Исследование процессов сложного деформирования материалов на плоских криволинейных траекториях // Проблемы пластичности в технологии. – Тез. докл. Международн. Научн.-техн. конф. – Орел: ОГТУ, 1995. – С. 15–16.

70. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Пластическое деформирование стали по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. – 1996. – № 4. – С. 19–26.

71. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования металлов при сложном нагружении // IX конференция по прочности и пластичности. Труды. – М., 1996. – С. 86–92.

72. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Кн. 1. Процессы сложного деформирования. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.

73. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Кн. 2. Процессы сложного нагружения. – Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.

74. Ильюшин А.А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести // ПММ. – 1960. – Т. 24. – С. 663–666.

75. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3–29.

76. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

77. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украин. матем. журнал. – 1954. Т. 6. – № 3. – С. 314–325.

78. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 359 с.

79. Кадашевич Ю.И. О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – 1967. – № 6. – С. 39–45.
80. Кадашевич Ю.И. Об одном классе теорий пластического течения // Пикл. пробл. прочн. и пластичн.: Всесоюзн. межву. сб. / Горьк. Ун-т. – Горький, 1979. – С. 69–72.
81. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л. Машиностроение, 1990. – 224 с.
82. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. ж. МТТ. 1968. – № 3. – С. 83–91.
83. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1981. – № 5. – С. 99–110.
84. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. – 1958. – Т. 22. – С. 78–89.
85. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 117. – С. 586–588.
86. Кайбышев О.А. Пластичность и сверхпластичность металлов. – М.: Металлургия, – 1975. – 279 с.
87. Кайбышев О.А. Утяшев Ф.З. Сверхпластичность, измельчение структуры и обработка труднодеформируемых сплавов. – М.: Наука, – 2002. – 438 с.
88. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
89. Коротких Ю.Г. О моделях вязкоупругих и вязкопластических сред и их реализация в статических и динамических задачах термопластичности // Прикл. пробл. прочн. и пластичн.: Всесоюзн. межвуз. сб. / Горьк. ун-т., – 1975. – № 1. – С. 42–57.
90. Коротких Ю.Г., Угодчиков А.Г. Уравнения теории термовязкопластичности с комбинированным упрочнением. – М.: Наука, 1981. – 180 с.
91. Ларионова О.Е. Метод и результаты расчета процесса изотермической раскатки диска // Авиационные двигатели. – 2025. – №2 – С. 67– 76.

92. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОTH. Механ. и машиностр. 1962. – № 5. – С. 154–158.
93. Ленский В.С. Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОTH. 1960. – № 5. – С. 93–100.
94. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. – 1978. – № 5. – С. 65–96.
95. Ленский В.С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОTH. 1958. – № 11. – С. 15–24.
96. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
97. Ленский В.С., Ленский Э.В. Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1985. – № 4. – С. 111–115.
98. Малый В.И. Об упрощениях функционалов теории упругопластических процессов // Прик. Мех. – 1978. – Т. 14. № 1. – С. 48–53.
99. Марин Н.И. Зависимость прочности металлов при повторных нагрузках от частоты повторения // Тр. ЦАГИ. 1950.
100. Марин Н.И. Прочность конструктивного элемента при повторной нагрузке // Тр. ЦАГИ. 1946. – № 596.
101. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.
102. Мельников Б.Е., Бенин А.В., Гецов Л.Б. и др. Многомодельный анализ вязкоупругопластического деформирования на различных структурных уровнях с учетом накопления повреждений. Отчет о НИР/НИОКР. – 2014. – 28 с.
103. Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П. Расчет и экспериментальное исследование сложных путей упругопластического деформирования // Проблемы прочности. – 1990. – № 8. – С. 14–17.

104. Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Семенов С. Г. Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью // Вестник ННГУ. – 2011. – №4(4). – С.1618–1620.
105. Мельников Б.Е., Семенов А.С. Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью пластических податливостей // Труды СПбГТУ. 1991. – № 144. – С. 26–31.
106. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Каплиенко А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А. Прикладная теория пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 282 с.
107. Мовчан А.А. О влиянии истории деформирования на скорость накопления повреждений при немонотонном упругопластическом нагружении // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1984. – № 5. – С. 125–131.
108. Молодцов И.Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2020. – № 5. – С. 33–38.
109. Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. О роли функционалов пластичности в геометрическом истолковании диссипации и описании векторных свойств материала в процессах сложного нагружения // Упругость и неупругость. – 2016. – С. 209–214.
110. Молодцов И.Н., Математическое моделирование упругопластических процессов с траекториями средней кривизны // Интеллектуальные системы. Теория и приложения – 2009. – Т. 13. № 1–4.
111. Молодцов Н.И., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации – 2016. – № 3. – С. 98–105.
112. Морозов С.В. Перспективы применения изотермической раскатки дисков ГТД из титановых сплавов. // Труды научно-технической конференции «Современные титановые сплавы и проблемы их развития». – М.: ВИАМ, 2010г. – С. 81–85.

113. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. – 1964. – Т. 28. № 3. – С. 393–400.
114. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Ленинград: Машиностроение Ленинградское отделение, 1990. – 221 с.
115. Охлопков Н.Л. Закономерности процессов упругопластического деформирования металлов при сложном напряженном состоянии и нагружении // Автореферат диссерт. д.т.н. – Тверь: ТГТУ, 1997. – 35 с.
116. Патент РФ № 2254195 С1, МКП В21Н1/02. Способ изготовления осесимметричных деталей / Елисеев Ю.С., Бурлаков И.А., Утяшев Ф.З. и др. // Опубликовано: 2005.06.20. Бюл. № 17
117. Пелешко В.А. Об одном представлении трехчленного соотношения общей теории пластичности // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике. – М.: МГУ, 1988. – С. 12–17.
118. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 6. – С. 61–68.
119. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 110–135.
120. Пелешко В.А. Разрешимость краевых задач и свойства функционалов трехчленного соотношения теории упругопластических процессов // Автор. диссертации на соиск. учен. степ. к.ф.-м.н. – М.: МГУ, 1988. – 22 с.
121. Подкопаев С.А., Гаврюшин С.С. Численное моделирование нелинейного деформирования промышленных мембран // Инженерный журнал: наука и инновации – 2025 – №1 (157).
122. Ратнер С.И. Разрушение при повторных нагрузках. – М., 1959.

123. Ратнер С.И., Данилов Ю.С. Изменение пределов пропорциональности и текучести при повторном нагружении // Заводская лаборатория. 1950. Т. 4.
124. Ройтман И.М., Фридман Я.Б. Об испытаниях металлов при повторно-переменных нагружения в пластической области // Заводская лаборатория. 1947. Т. 13. – № 4.
125. Соси Д. Модели разрушения при многоосной усталости // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – Т. 3. – С. 9–21.
126. Темис Ю.М., Пучков И.В. Модель упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов // Материалы V Всесоюзного семинара «Малоцикловая усталость – критерий разрушения и структуры материалов». Тезисы Докладов и сообщений. – Волгоград, 1987. – 2 с.
127. Темис Ю.М., Пучков И.В. Характеристики упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов при циклическом нагружении. / Межвуз. Сборник «Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения». – Изд-во Нижегородского университета, 1992. – С. 82–89.
128. Технология авиационного двигателе- и агрегатостроения, в 12-ти томах. Т2. Получение деталей авиационных двигателей и их агрегатов методами обработки давлением – М.: НИИД, 1993.
129. Шнейдерович Р.М. Несущая способность деталей при повторно-статическом нагружении // Вестник машиностроения. 1962. – № 1.
130. Шнейдерович Р.М. Усталость при упруго-пластическом деформировании // Тр. совещ. по механич. вопр. усталости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.
131. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П. О свойствах кривых циклического деформирования в диапазоне мягкого и жесткого нагружения // Изв. АН СССР, ОТН, сер. механика и машиностроение. – 1961. – № 2.
132. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П. Сопротивление деформированию при циклическом нагружении с малым числом циклов // Заводская лаборатория. – 1961. – № 9.

133. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П., Т.С. П. Некоторые свойства кривых повторного деформирования при симметричном цикле // Изв. АН СССР, ОН, сер. механика и машиностроение. – 1960. – № 5.
134. Шульц К.Я. Некоторые сведения по рентгенографическому изучению эффекта Баушингера // Тр. Таллинского политехн. ин-та. 1960. Т. 172.
135. Abaqus 6.11. Analysis User's Manual. Volume I-V, Dassault Systemes, 2011.
136. Abashev D.R., Bondar V.S. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2020. – N. 15(2) – P. 225–239.
137. Abashev D.R., Bondar V.S., Dikovitskyi P.O., Morozov S.V., Larionova O.E. High-temperature deformation of a granulated nickel alloy // High temperature. – 2023. – Vol. 61. – P. 814–817.
138. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // Materials at high temperatures. – 1966. – V. 24(1). – P. 1–26.
139. Backhaus G. Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung // Zeitschrift für Angew. Math. und mech. – 1986. – P. 99–108.
140. Bairstow L. Elastic Limits of Iron and Steel under Cyclic Variation of Stress. // Trans roy. soc. – London, 1911.
141. Baryshnikova O. O., Gavryushin. Sergey S.S. The Numerical Simulation of the Flexible Element Deformation with Nonlinear Relay Character. // In Proceedings of the 2021 8th International Conference on Industrial Engineering and Applications. – 2021 – New York. – P. 95–98.
142. Baushinger J. Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmals wiederholte Beanspruchungen // Mitteilung XV aus dem mechanisch-Technischen Lab. – 1886. – P. 1–116
143. Baushinger J. Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls verschiedener Metalle // Civilingenieur. – 1881. – P. 289–348.
144. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

145. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Theories of plasticity under complex loading along flat trajectories of deformations // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2021. – N. 3. – P. 35–47.
146. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Y. A variant of the thermoplasticity theory for monotonic and cyclic processes of nonisothermal loads // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020. – N. 2. – P. 28–36.
147. Bondar V.S., Dansin V.V., Long D. Vu., Nguyen D.D. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018. – V. 25. N 12. – P. 1009–1017.
148. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. Int. J. of Plasticity. – 2008. – V. 24. – P.1642–1692.
149. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. Inter. J. of Plasticity. – 1989. – V. 5. N 3. – P. 247–302.
150. Chaboche J.-L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I & II // J. Appl. Mech. – 1993. – P. 813–831.
151. Chaboche J.-L. Le concept de contrainte effective applique a l’elasticite et a la viscoplasticite en presece d'un endommagement anisotrope // In J.-P. Boehler, editor, Colloque EUROMECH 115. – Grenoble: Editions du CNRS, 1979. – P. 737–760.
152. Chaboche J.-L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches // Eur. J. Mech. A, Solids. – 1994. – P. 501–518.
153. Chaboche J.-L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of rachetting effects // Int. J. Plast. – 1991. – T. 7. – P. 661–678.
154. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations: theory versus experiment. ASME Winter Annual Meeting, Atlanta, GA (USA). – 1991. – P. 1–20.
155. Chaboche J.-L., Cailletaud G. Integration methods for complex plastic constitutive equations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1996. – P. 125–155.
156. Chaboche J. L., Lemaitre J. Mechanics of Solid Materials. – Cambridge University Press, 1990. – 556 p.

157. Chaboche J.-L., Maire J.F. A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's // *Aerosp. Sci. Technol.* – 2002. – P. 131–145.
158. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic an viscoplastic constitutive equations // *ASME J. of Pres. Vessel Techn.* – 1983. – V. 105. – P. 153–164.
159. Coffin L.F. Study of the Effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal // *ASME trans.* – 1954. – T. 76. – P. 41–47.
160. Coffin L.F. The stability of metals under cyclic plastic strain // *Poper. Amer. Soc. Mech. Engrs.* – 1959.
161. Coffin L.F., Read I.H. A study of the Strain cycling and Fatigue. Behavior of AS Cold-worked Metal // *Int. Conf. Fatigue Met.* – 1956.
162. Coffin L.F., Tavernelli I.F. The cyclic straining and fatigue of Metals // *Trans. Metall. Soc. AJME.* – 1959. – 215 p.
163. Kang G., Gao Q., Cai L., Sun Y. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures // *Nucl. Eng. Des.* – 2002. – T. 216. – P. 13–26.
164. Kang G., Gao Q., Yang X. Experimental study on the cyclic deformation and plastic flow of U71Mn rail steel // *Int. J. Mech. Sci.* – 2002. – T. 44. – P. 1647–1663.
165. Kang G., Gao Q., Yang X. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures // *Mech. Mater.* – 2002. – T. 34. – P. 145–159.
166. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel // *Int. J. Plast.* – 2006. – T. 22. N 5. – P. 858–894.
167. Kang G., Li Y., Zhang J., Sun Y., Gao Q. Uniaxial ratcheting and failure behaviors of two steels // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2005. – T. 43. – P. 199–209.
168. Lemaitre J. A continuum damage mechanics model for ductile fracture // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1985. – P. 83–89.
169. Lemaitre J. How to use damage mechanics // *Nucl. Eng. Des.* 1984. – pp. 233–245.
170. Lemaitre J., Chaboche J.-L. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement // *J. Mec. Appl.* – 1978. – P. 317–365.

171. Masing G., Mauksch W. // Wissenschaftliche Veroffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. – 1926. – V. 5. – 142 p.
172. Mroz Z., Shrivastava H.P., Dubey R.N. A Non-Linear Hardening Model and Its Application to Cyclic Loading // Acta Mech. – 1976. – T. 25. N 1. – P. 51–61.
173. Ohno N., Kachi Y., A constitutive model of cyclic plasticity for nonlinear hardening materials // J. Appl. Mech. – 1986. – V. 53. – P. 395–403.
174. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratchetting behaviour // Int. J. Plast. – 1993. – P. 375–390.
175. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery, part II: application to experiments of ratchetting behaviour // Int. J. Plast. – 1993. – P. 390–403.
176. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids // ASME J. Appl. Mech. – 1956. – V. 23. – P. 493–496.
177. Rahlfs P., Masing G. // Zeit. f. Met. – 1950. – V. 41. – 454 p.
178. Saks G., Shoji H. Zug-Druckversuche an Messingkristallen (Bauschinger effekt) // Zeitschrift fur Phys. – 1927. – V. 45. – P. 776–796.
179. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity // Acta Mech. – 1985. – V. 57. – P. 167–182.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ)



АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«ОБЪЕДИНЕННАЯ ДВИГАТЕЛЕСТРОИТЕЛЬНАЯ КОРПОРАЦИЯ»

**ФИЛИАЛ «НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИИ
И ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА ДВИГАТЕЛЕЙ»**

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора
филиала АО «ОДК» «НИИД»

С.В. Морозов

2025 г.



Акт о внедрении (использовании)

Результатов диссертационной работы Ларионовой Ольги Евгеньевны
в рабочий процесс отдела «Обработки металлов давлением и разработки
нового технологического оборудования»

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Ларионовой О. Е. на тему «Вязкопластическое деформирование диска из жаропрочного никелевого сплава в процессе изотермической раскатки» внедрены в расчетную практику отдела «Обработки металлов давлением и разработки нового технологического оборудования» и используются при определении режимов изотермической деформации жаропрочных сплавов.

Начальник отдела

А.В. Македонов

John

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

АКТ

№ _____

Кафедра «Техническая механика и
компьютерное моделирование»
(место составления)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Московского Политеха
Г.Х. Шарипзянова
_____ 2025 г.

(гербовая печать)

О внедрении в учебный процесс университета результатов научной работы Вязкопластическое деформирование диска из жаропрочного никелевого сплава в процессе изотермической раскатки

Мы, нижеподписавшиеся:

Директор департамента по образовательной политике А.Б. Максимов, декан факультета базовых компетенций Моргунов Ю.А., заведующий кафедрой «Техническая механика и компьютерное моделирование» Бровкина Ю. И. составили настоящий акт в том, что результаты инициативной научной работы соискателя Ларионовой Ольги Евгеньевны, по теме «Вязкопластическое деформирование диска из жаропрочного никелевого сплава в процессе изотермической раскатки» (раздел «Разработка модели вязкопластического деформирования») имеют теоретическое и практическое значение для учебного процесса и внедрены в учебный процесс Московского политехнического университета при обучении аспирантов направления подготовки 1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»

Кафедра, внедрившая результаты – «Техническая механика и компьютерное моделирование».

Дата и номер протокола заседания кафедры, на котором рассмотрены результаты внедрения Протокол № 12 от «30» июня 2025 г.

Начало использования объекта внедрения – 01.07.2025 г.

Директор департамента по
образовательной политике

Декан факультета,
внедрившего разработку

Заведующий кафедрой

А. Б. Максимов

Ю.А. Моргунов

Ю.И. Бровкина

ПРИЛОЖЕНИЕ В. КОД ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ПОДПРОГРАММЫ «УМАТ», ПОЗВОЛЯЮЩИЙ ИСПОЛЬЗОВАТЬ МОДЕЛЬ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ РАСЧЕТОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ SIMULIA ABAQUS.

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
  RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
  STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PRED,DPRED,CMNAME,
  NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
  CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
  DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
  STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PRED(1),DPRED(1),
  PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3),
  de(6),sig_st(6),sig_st_1(6),dsig(6),da(6),deps_p(6),Kr_ij(6),
  K_ij(6),P_ij(6),dA_de(6,6),dA0_de(6),dAp_de(6,6),dxi_de(6),
  dep_de(6,6),dep_u_de(6),dA_Sst_de(6),dB_Sst_de(6),dC_Sst_de(6),
  dD_Sst_de(6),dKij_de(6,6),dPij_de(6,6),dKC_de(6),dPC_de(6),
  ddx_i_de(6),Kr_ij_lk(6,6)

C user coding to define DDSDDE, STRESS, STATEV, SSE, SPD, SCD
C and, if necessary, RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, PNEWDT

real*8 deps_0,de,xi,dxi,sig_0,sig_u,sig_u_st,sig_st,sig_st_1,
  dsig,dC,da,deps_p_u,deps_p,Kr_ij,E,G_mod,g,ga,ga_xi,q_eps,q_xi,
  K_ij,P_ij,K_C,P_C,A_Sst,B_Sst,C_Sst,D_Sst,dA_de,dA0_de,dAp_de,
  dxi_de,dep_de,dep_u_de,dA_Sst_de,dB_Sst_de,dC_Sst_de,dD_Sst_de,
  dKij_de,dPij_de,dKC_de,dPC_de,ddxi_de,Kr_ij_lk

!Символ Кронекера ij
Kr_ij(1:3)=1.
Kr_ij(4:6)=0.
!Символ Кронекера ij lk
Kr_ij_lk=0.
do i=1,6
  Kr_ij_lk(i,i)=1.
end do

!Переход к угловым деформациям
DSTRAN(4:6)=DSTRAN(4:6)/2.
!Средняя деформация
deps_0=(DSTRAN(1)+DSTRAN(2)+DSTRAN(3))/3.
!Среднее напряжение
sig_0=(STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))/3.
!Девiator скоростей деформации

```

```

de=(DSTRAN-Kr_ij*deps_0)/DTIME
!Скорость деформации
xi=sqrt(2./3.*contr(de,de))
!Приращение скорости деформации
dxi=2.*DTIME*(xi-STATEV(9))/(DTIME+STATEV(10))
!Модуль упругости
E=PROPS(1)
!Модуль сдвига
G_mod=E/2./(1.+PROPS(2))

!Условие начала нагружения
if ((STATEV(1).eq.0).and.(STATEV(8).eq.0)) then
!Начальное значение размера поверхности нагружения
STATEV(8)=PROPS(3)*xi**PROPS(4)
!Начальное значение приращения скорости деформации
dxi=0.
end if

!Девiator активных напряжений
sig_st=STRESS-Kr_ij*sig_0-STATEV(2:7)
!Интенсивность активных напряжений
sig_u_st=sqrt(3./2.*contr(sig_st,sig_st))
!Параметр микронапряжений ga_xi
ga_xi=PROPS(8)/xi
!Компоненты приращений напряжений при упругом деформировании
dsig=2.*G_mod*DSTRAN+
6.*G_mod*PROPS(2)/(1.-2.*PROPS(2))*Kr_ij*deps_0
!Компоненты приращений микронапряжений при упругом деформировании
da=ga_xi*STATEV(2:7)*dxi
!Модуль изотропного упрочнения q_xi
q_xi=PROPS(4)*PROPS(3)*xi**(PROPS(4)-1.)+
PROPS(6)*PROPS(5)*xi**(PROPS(6)-1.)*STATEV(1)
!Приращение размера поверхности нагружения
dC=q_xi*dxi
!Компоненты девиатора активных напряжений в конце шага при
!упругом деформировании
sig_st_1=sig_st+dsig-Kr_ij*(dsig(1)+dsig(2)+dsig(3))/3.-da

!Градиент скорости деформации
if (xi.eq.0.) then
dxi_de=0.
else
dxi_de=2./DTIME*(2.-Kr_ij)*de/sqrt(6.*contr(de,de))
end if
!Градиент приращения скорости деформации
ddxi_de=2.*DTIME/(DTIME+STATEV(10))*dxi_de

!Слагаемые компонент матрицы Якоби dA_de
do i=1,6
do j=1,6
dA_de(i,j)=Kr_ij_lk(i,j)*E/(1.+PROPS(2))

```

```

        end do
    end do

    !Слагаемые компонент матрицы Якоби dA0_de
    dA0_de=PROPS(2)*Kr_ij*E/(1.+PROPS(2))/(1.-2.*PROPS(2))

    !Матрица Якоби при упругом деформировании
    do i=1,6
        do j=1,6
            DDSDE(i,j)=(1.+Kr_ij(j))/2.*(dA_de(i,j)+
            Kr_ij(i)*dA0_de(j))
        end do
    end do

    !Приращение накопленной пластической деформации при
    !упругом деформировании
    deps_p_u=0.

    !Случай вязкопластического деформирования
    if (sqrt(3./2.*contr(sig_st_1,sig_st_1)).gt.(STATEV(8)+dC)) then
        !Уменьшение шага, если первый шаг попадает в пластику
        if (sig_u_st.eq.0.) then
            PNEWDT=0.5
            RETURN
        end if

        !Модуль анизотропного упрочнения g
        g=PROPS(10)*(PROPS(8)*xi**PROPS(9))
        !Модуль анизотропного упрочнения ga
        ga=-PROPS(10)
        !Модуль изотропного упрочнения qe
        if (STATEV(1).le.PROPS(7)) then
            q_eps=PROPS(5)*xi**PROPS(6)
        else
            q_eps=0.
        end if

        !Параметры K_ij, P_ij, K_C, P_C
        K_ij=sig_st_1-STATEV(2:7)*(1.-PROPS(9)*dxi/xi)
        P_ij=ga*STATEV(2:7)-(3.*G_mod+g)*sig_st/sig_u_st
        K_C=STATEV(8)+q_xi*dxi
        P_C=q_eps

        !Параметры A_Sst, B_Sst, C_Sst, D_Sst
        A_Sst=3./2.*contr(P_ij,P_ij)-P_C**2.
        B_Sst=3.*contr(K_ij,P_ij)-2.*K_C*P_C
        C_Sst=3./2.*contr(K_ij,K_ij)-K_C**2.
        D_Sst=B_Sst**2.-4.*A_Sst*C_Sst

        !Приращение накопленной пластической деформации при
        !вязкопластическом деформировании
        deps_p_u=-(B_Sst+SQRT(D_Sst))/2./A_Sst

        !Приращение компонент пластической деформации
        deps_p=3./2.*sig_st/sig_u_st*deps_p_u
    end if
end if

```

```

!Приращения напряжений при вязкопластическом деформировании
dsig=dsig-2.*G_mod*deps_p
!Приращение микронапряжений при вязкопластическом деформировании
da=da+2./3.*g*deps_p+ga*STATEV(2:7)*deps_p_u
!Приращение размера поверхности нагружения при
!вязкопластическом деформировании
dC=dC+q_eps*deps_p_u

!Градиент параметров dKij_de и dPij_de
do j=1,6
    dKij_de(:,j)=STATEV(2:7)*PROPS(9)/xi**2*
        (ddxi_de(j)*xi-dxi_de(j)*dxi)
    dPij_de(:,j)=-PROPS(10)*sig_st/sig_u_st*
        PROPS(8)*PROPS(9)*xi**(PROPS(9)-1.)*dxi_de(j)
end do
!Градиент параметра накопленной пластической деформации dKC_de
dKC_de=(PROPS(3)*PROPS(4)*xi**(PROPS(4)-1.)*
    (1.+(PROPS(4)-1.)/xi*dxi)+PROPS(5)*PROPS(6)*xi**(PROPS(6)-1.)*
    deps_p_u*(1.+(PROPS(6)-1.)/xi*dxi))*dxi_de
!Градиент параметра накопленной пластической деформации dPC_de
if (STATEV(1).lt.PROPS(7)) then
    dPC_de=PROPS(5)*PROPS(6)*xi**(PROPS(6)-1.)*dxi_de
else
    dPC_de=0.
end if

!Градиент параметров dA_Sst_de, dB_Sst_de и dC_Sst_de
do i=1,6
    dA_Sst_de(i)=3.*contr(P_ij,dPij_de(:,i))-2.*P_C*dKC_de(i)
    dB_Sst_de(i)=3.*(contr(K_ij,dPij_de(:,i))+
        contr(P_ij,dKij_de(:,i)))-2.*(K_C*dPC_de(i)+P_C*dKC_de(i))
    dC_Sst_de(i)=3.*contr(K_ij,dKij_de(:,i))-2.*K_C*dKC_de(i)
end do
!Градиент параметра накопленной пластической деформации dD_Sst_de
dD_Sst_de=2.*B_Sst*dB_Sst_de-4.*(A_Sst*dC_Sst_de+C_Sst*dA_Sst_de)

!Градиент накопленной пластической деформации
dep_u_de=-1./2./A_Ast*(2.*deps_p_u*dA_Sst_de+
    dB_Sst_de+1./2./SQRT(D_Sst)*dD_Sst_de)

do i=1,6
    do j=1,6
        !Градиенты приращений пластической деформации
        dep_de(i,j)=3./2.*sig_st(i)/sig_u_st*dep_u_de(j)
        !Слагаемые компонент матрицы Якоби dAp_de
        dAp_de(i,j)=dep_de(i,j)*E/(1.+PROPS(2))
        !Матрица Якоби при упругопластическом деформировании
        DDSDDDE(i,j)=DDSDDDE(i,j)-(1.+Kr_ij(j))/2.*dAp_de(i,j)
    end do
end do
!Окончание случая упругого деформирования

```

```

end if

!Уменьшение шага расчета при большом приращении
!накопленной пластической деформации
if (deps_p_u.gt.0.005) then
    PNEWDT=0.5
end if

!Переход к углам сдвига
DSTRAN(4:6)=DSTRAN(4:6)*2.
!Вычисление напряжений в конце шага
STRESS=STRESS+dsig
!Вычисление накопленной пластической деформации в конце шага
STATEV(1)=STATEV(1)+deps_p_u
!Вычисление микронапряжений в конце шага
STATEV(2:7)=STATEV(2:7)+da
!Вычисление размера поверхности нагружения в конце шага
STATEV(8)=STATEV(8)+dC
!Запоминание скорости деформации
STATEV(9)=xi
!Запоминание приращения времени
STATEV(10)=DTIME

RETURN
END

!Функция свертки тензоров
FUNCTION contr(X,Y)
    DIMENSION X(6),Y(6)
    real*8 X,Y,contr
    contr=X(1)*Y(1)+X(2)*Y(2)+X(3)*Y(3)+
        2*(X(4)*Y(4)+X(5)*Y(5)+X(6)*Y(6))
    RETURN
END FUNCTION contr

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОДНООСНОМ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ.

Ввод [6]:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
plt.rc('font',family='Times New Roman',size=12)
```

Ввод [7]:

```
#Задание температуры материала
Temp=700
xis=[1.56, 0.78, 0.078, 0.0156]
#Набор материальных параметров для температуры 700 градусов
T=[700]
K_EC_T=[243]
n_EC_T=[0.194]
bet_T=[27]
E_T=[155000]
K_C0_T=[126]
n_C0_T=[0.0251]
K_SigA_T=[186]
n_SigA_T=[0.012]
#Определение материальных параметров для заданной температуры
nu=0.3
K_EC=np.interp(Temp,T,K_EC_T)
n_EC=np.interp(Temp,T,n_EC_T)
bet=np.interp(Temp,T,bet_T)
E=np.interp(Temp,T,E_T)
K_C0=np.interp(Temp,T,K_C0_T)
n_C0=np.interp(Temp,T,n_C0_T)
K_SigA=np.interp(Temp,T,K_SigA_T)
n_SigA=np.interp(Temp,T,n_SigA_T)
```

Ввод [8]:

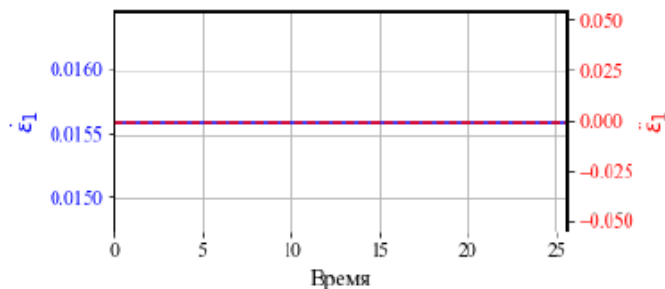
```
# Функция модуля анизотропного упрочнения
def EC (xi,xi_min=0.00066,xi_max=1.92):
    y,dy={
        xi<=xi_min: (K_EC*xi_min**n_EC,0),
        xi_min<xi<=xi_max: (K_EC*xi**n_EC,K_EC*n_EC*xi**(n_EC-1)),
        xi_max<xi : (K_EC*xi_max**n_EC,0)
    }[True]
    return y,dy
# Функция начального размера поверхности нагружения
def C0(xi,xi_min=0.00066,xi_max=1.92):
    y,dy={
        xi<=xi_min: (K_C0*xi_min**n_C0,0),
        xi_min<xi<=xi_max: (K_C0*xi**n_C0,K_C0*n_C0*xi**(n_C0-1)),
        xi_max<xi : (K_C0*xi_max**n_C0,0)
    }[True]
    return y,dy
# Предельное значение микронапряжений
def SigA(xi,xi_min=0.00066,xi_max=1.92):
    y,dy={
        xi<=xi_min: (K_SigA*xi_min**n_SigA,0),
        xi_min<xi<=xi_max: (K_SigA*xi**n_SigA,K_SigA*n_SigA*xi**(n_SigA-1)),
        xi_max<xi : (K_SigA*xi_max**n_SigA,0)
    }[True]
    return y,dy
```

Ввод [9]:

```
def graph(d_eps1):
    if d_eps1(0)[4]=='time':
        x_max=d_eps1(0)[2]
        x_lab='Время'
    elif d_eps1(0)[4]=='strain':
        x_lab='Деформация'
        x_max=d_eps1(0)[3]
    x=np.linspace(0,x_max,1000)
    deps=([])
    ddeps=([])
    for i in x:
        deps.append(d_eps1(i)[0])
        ddeps.append(d_eps1(i)[1])
    fig=plt.figure(figsize=(5, 2.5))
    ax=fig.add_subplot()
    ax1=ax.twinx()
    ax.plot(x,deps,label=r'$ \dot{\varepsilon}_1$',color="blue")
    ax1.plot(x,ddeps,label=r'$ \ddot{\varepsilon}_1$',color="red",linestyle='--')
    ax1.yaxis.set_label_position('right')
    ax1.yaxis.tick_right()
    ax.set_xlabel(x_lab,fontsize=14)
    ax.set_ylabel(r'$ \dot{\varepsilon}_1$',color="blue",fontsize=14)
    ax1.set_ylabel(r'$ \ddot{\varepsilon}_1$',color="red",fontsize=14)
    ax.tick_params(axis='y',labelcolor="blue")
    ax1.tick_params(axis='y',labelcolor="red")
    ax.grid(axis='both')
    plt.xlim([0, x_max])
    plt.show()
```

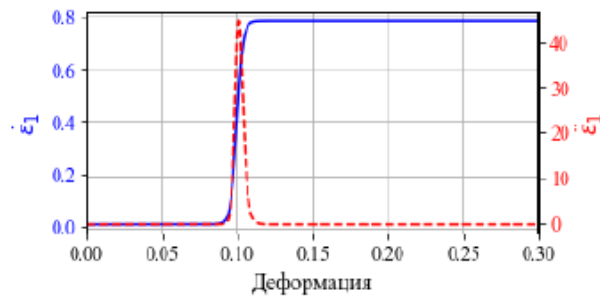
Ввод [10]:

```
def d_eps1(time,xi=0.0156,eps_max=0.4):
    dy_1=xi
    dy_2=0
    t_max=eps_max/xi
    return dy_1,dy_2,t_max,eps_max,'time'
graph(d_eps1)
```



Ввод [19]:

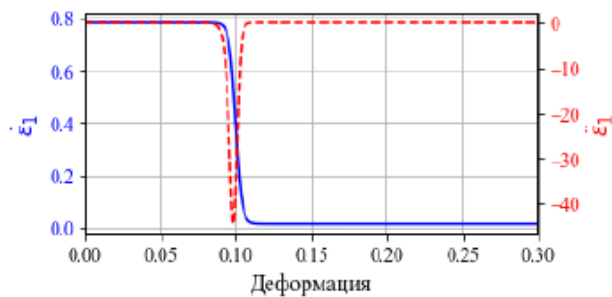
```
def d_eps1 (eps,xi_max=0.78,xi_min=0.0156,xi_st=500,eps_m=0.10,eps_max=0.3):
    delta_xi=xi_max-xi_min
    dy_1=delta_xi/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))+xi_min
    dy_2=dy_1*delta_xi*xi_st/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))*(1-1/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps))))
    dt_de=lambda eps: 1/(delta_xi/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))+xi_min)
    t_max=quad(dt_de,0,eps_max)[0]
    return dy_1,dy_2,t_max,eps_max,'strain'
graph(d_eps1)
```



Ввод [12]:

```
def d_eps1(eps,xi_max=0.78,xi_min=0.0156,xi_st=500,eps_m=0.1,eps_max=0.3):
    delta_xi=xi_max-xi_min
    dy_1=-delta_xi/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))+xi_max
    dy_2=-dy_1*delta_xi*xi_st/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))*(1-1/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps))))
    dt_de=lambda eps: 1/(-delta_xi/(1+np.exp(xi_st*(eps_m-eps)))+xi_max)
    t_max=quad(dt_de,0,eps_max)[0]
    return dy_1,dy_2,t_max,eps_max,'strain'
```

graph(d_eps1)



Ввод [20]:

```
def df(t,y):
    # Создание массива производных параметров процесса нагружения
    dy=np.zeros(7)
    # Вычисление материальных параметров
    E_C=EC(y[0])
    C_0=C0(y[0])
    Sig_A=SigA(y[0])
    qe=E_C[0]
    qxi=C_0[1]+E_C[1]*y[5]
    g=bet*Sig_A[0]
    ga=-bet
    gxi=Sig_A[1]/Sig_A[0]
    # Вычисление активного напряжения и его знака
    sigma_st=y[3]-y[4]
    sign_sigma_st=np.sign(sigma_st)
    # Вычисление производных 1-й деформации и скорости деформации
    if d_eps1(0)[4]=='time': #Для функции, заданной по времени
        dy[1]=d_eps1(t)[0]
        dy[0]=np.sign(dy[1])*d_eps1(t)[1]
    elif d_eps1(0)[4]=='strain': #Для функции, заданной по деформации
        dy[1]=d_eps1(y[1])[0]
        dy[0]=np.sign(dy[1])*d_eps1(y[1])[1]
    # Вычисление параметров E*, B_xi, alpha_xi_1 и alpha_xi_2
    E_st=qe+g+sign_sigma_st*ga*y[4]
    B_xi=qxi+sign_sigma_st*gxi*y[4]
    al_xi_1=0
    al_xi_2=0
```

```
# Вычисление производной накопленной пластической деформации
if abs(sigma_st)<y[6]:
    d_eps_p_u=0
else:
    d_eps_p_u=(sign_sigma_st*E*(dy[1]-a1_xi_1*dy[0])-B_xi*dy[0])/(E_st+E)
# Проверка условия упругопластического нагружения
# и вычисление производной пластической деформации
if d_eps_p_u<=0:
    d_eps_p_u=0
    dy[5]=0
else:
    dy[5]=sign_sigma_st*d_eps_p_u
# Вычисление скорости напряжений (4.2.15)
dy[3]=E*(dy[1]-dy[5]-a1_xi_1*dy[0])
# Вычисление скорости микронапряжений (4.2.18)
dy[4]=g*dy[5]+ga*y[4]*d_eps_p_u+gxi*y[4]*dy[0]
# Вычисление скорости размера поверхности напряжений (4.1.7)
#print(qe,d_eps_p_u,qxi,dy[0])
dy[6]=qe*d_eps_p_u+qxi*dy[0]
# Вычисление скорости 2-й деформации (4.2.20)
dy[2]=-nu*dy[1]-a1_xi_2*dy[0]+(nu-0.5)*dy[5]
return dy
```

Ввод [21]:

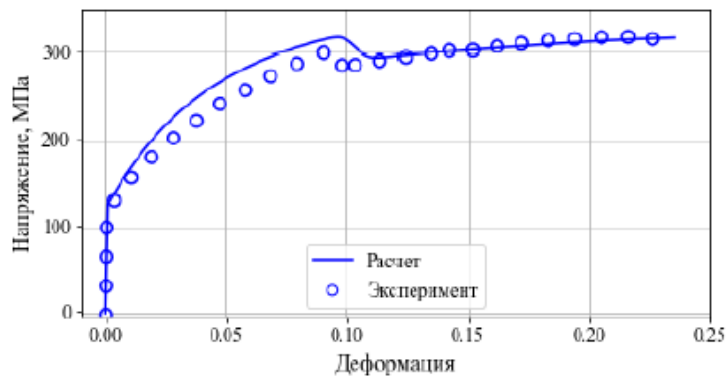
```
sols=[]
eps_max = 0.3
#Задание начальных значений параметров процесса нагружения
xi_0=d_eps1(0)[0]
C_0=C0(xi_0)[0]
y0=[xi_0,0,0,0,0,0,C_0]
#Задание временного диапазона и опорных точек для проведения расчета
t_max=d_eps1(0)[2]
t = np.linspace(0, t_max, 10000)
#Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты
sol=solve_ivp(df,(0,t_max),y0,t_eval=t,method='RK23')
```

Ввод [22]:

```
data8 = pd.read_csv('experiment_V_0.00026_V_0.013.csv', sep=';')
data18 = pd.read_csv('experiment_V_0.013_V_0.00026.csv', sep=';')
```

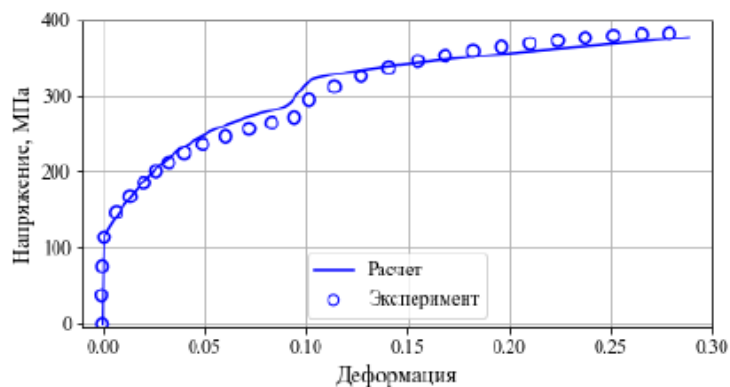
Ввод [17]:

```
plt.figure(figsize=(7, 3.5))
ps=(9,6)
pf=2
ind=np.argmax(data18['Stress'])
plt.plot(data18['Strain'][:ind], data18['Stress'][:ind], ls=(0,(1e-5,pf)),lw=ps[0],dash_cap
plt.plot(data18['Strain'][:ind], data18['Stress'][:ind],ls=(0,(1e-5,pf*ps[0]/ps[1])),lw=ps[
ind=sol['y'][1]<=data18['Strain'][np.argmax(data18['Stress'])]
plt.plot(sol['y'][1][ind], sol['y'][3][ind], color='b', label='Расчет')
plt.scatter(-1,-1,marker='o',edgecolors='b',label='Эксперимент',facecolors='none')
plt.legend(loc='lower center')
plt.xlabel('Деформация',fontsize=14)
plt.ylabel('Напряжение, МПа',fontsize=14)
plt.grid()
plt.xlim(-0.01,0.25)
plt.ylim(-5,350)
plt.savefig('1.png')
```



Ввод [23]:

```
plt.figure(figsize=(7, 3.5))
ps=(9,6)
pf=2
ind=np.argmax(data8['Stress'])
plt.plot(data8['Strain'][:ind], data8['Stress'][:ind], ls=(0,(1e-5,pf)),lw=ps[0],dash_capst
plt.plot(data8['Strain'][:ind], data8['Stress'][:ind],ls=(0,(1e-5,pf*ps[0]/ps[1])),lw=ps[1]
ind=sol['y'][1]<=data8['Strain'][np.argmax(data8['Stress'])]
plt.plot(sol['y'][1][ind], sol['y'][3][ind], color='b', label=r'Расчет')
plt.scatter(-1,-1,marker='o',edgecolors='b',label='Эксперимент',facecolors='none')
plt.legend(loc='lower center')
plt.xlabel('Деформация',fontsize=14)
plt.ylabel('Напряжение, МПа',fontsize=14)
plt.grid()
plt.xlim(-0.01,.3)
plt.ylim(-5,400)
plt.savefig('2.png')
```



Ввод [157]:

```
names=['Strain Speed','Strain_1', 'Strain_2', 'Stress','Backstress','Plastic Strain','Surfa
data=pd.DataFrame(sol.y.T,columns=names)
data.insert(0,'Time',sol.t)
data['Strain eng.']=np.exp(data['Strain_1'])-1
data['Stress eng.']=data['Stress']/np.exp(data['Strain_1'])
data.to_csv('results.csv',index=False,sep=';')
```